ANALYTISCH-GEOMETRISCHE
ENTWICKLUNGEN

VON

Dr. JUL. PLÜCKER,

Privatdocenten in Bonn.

ERSTER BAND.

MIT ACHT KUPFERTAFELN.

ESSEN,
bei G. D. Baedeker.
1828.

125 = 9.

ANALYTISCH-GEOMETRISCHE
ENTWICKLUNGEN

VON

Dr. JUL. PLÜCKER,

PRIVATDOCENTEN IN BONN.

ERSTER BAND.

MIT ACHT KUPFERTAFELN.

ESSEN,
BEI G. D. BAEDEKER.
1828.

125 = g.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorrede.

In diesen „analytisch - geometrischen Entwicklungen," von denen der erste Band vorliegt, gedenk' ich eine neue Behandlungsweise der analytischen Geometrie niederzulegen. Ich nenne dieselben neu, ohngeachtet die Principien, auf welche sie beruht, in einzelnen Fällen schon zur Beweisführung mögen angewandt worden seyn. Aber solche Beweise stehen nicht in generischem Zusammenhange mit dem Ganzen, und erscheinen deshalb als analytische Kunstgriffe, während sie im Grunde doch anders nichts sind, als Einzelnheiten einer allgemeinen Methode.

Die von mir aufgestellte und durchgeführte Behandlungsweise ist eine rein analytische, in demjenigen Sinne des Wortes, in welchem man dasselbe seit Monge nimmt. In jeder Gleichung zwischen Coordinaten seh' ich einen geometrischen Ort, in dem Systeme zweier solchen Gleichungen die Durchschnitte zweier Oerter, und endlich und hauptsächlich in jeder dritten Gleichung, die eine algebraische Folge zweier gegebenen ist, einen neuen geometrischen Ort, der die Durchschnitte der, durch die beiden gegebenen Gleichungen dargestellten, Oerter enthält, und dessen Natur von der Form der resultirenden Gleichung abhängt. Fast überall genügt es, die Verbindung durch einen unbestimmten Coefficienten blofs anzudeuten; ja sogar, wenn man die Form der Gleichungen einmal kennt, auch diese durch ein blofses Symbol zu bezeich-

nen. Hiernach erhält man z. B. (III, §. 10) durch die Combination von ein paar Buchstaben die wichtigsten und allgemeinsten Sätze über Linien zweiter Ordnung, und zwar viele neue Sätze neben solchen, deren Beweis man für nicht leicht zu halten gewohnt ist.

Es begreift sich leicht, daſs wir sicher sind, auf diesem Wege die einfachsten und zierlichsten Constructionen zu erhalten. Man braucht nur zu erwägen, daſs wir die gegebenen Figuren, und zwar zunächst die, sie vertretenden, Symbole, nie aus dem Auge verlieren, und, bei der Einfachheit der Verbindung, in jeder Gleichung bis zur Endgleichung hin, die Beziehung zu den gegebenen Gleichungen wiedererkennen — während, von der einen Seite, in der alten Geometrie, wie sie z. B. Apollonius handhabt, das Hauptthema in den Schatten von Umschreibungen zurücktritt, eben so wie die Hauptconstructionen von Hülfslinien maskirt werden, und, von der andern Seite, die bloſse Anwendung der Algebra auf Geometrie in Eliminationen sich verliert.

Die Eleganz der rein analytischen Constructionen (namentlich der von Herrn Gergonne in dem 7. und 8. Bande seiner Annalen gegebenen) ist nie in Abrede gestellt worden; wohl aber die Fruchtbarkeit derselben in Vergleich mit gemischten Methoden und einer rein constructiven, als deren Repräsentant, in einer gewissen Sphäre von Entwicklungen, ich Herrn Poncelet nennen darf. Ueber diesen Punct kann ich nicht ganz mit Stillschweigen hinweggehen, weil ich allerdings die Fruchtbarkeit einer Methode als ein, gewissermaſsen practisches, Criterium ihrer Vorzüglichkeit betrachte. Jene rein constructive Methode sucht die Raumverhältnisse und die Beziehung der Figuren zu einander unter verschiedenen Gesichtspuncten in Verbindung zu bringen; sie geht abwechselnd vom Besondern zum Allgemeinen und vom Allgemeinen zum Besondern. Eben hier liegt die Hauptquelle ihrer Fruchtbarkeit, aus der eine Reihe einzelner (zum Theil auch den gemischten Methoden angehörigen) Theorien hervorgegangen ist, wie z. B. die Theorie der Pole, der Chordalen (*axes radicaux*), der Transversalen, das Projections-Verfahren, die Anwendung der Lehre vom Schwerpuncte auf die Geometrie. Aber denselben unschätzbaren Vortheil, der aus dem Bestreben hervorgeht, die Resultate unter allgemeinen Gesichtspuncten zusammenzustellen, kann auch die analytische Geometrie sich aneignen, wenn sie aus ihrem Bereiche jede überflüssige Entwicklung und jede Vermischung von Construction und Rechnung verbannt. Alsdann eröffnet sich in ihr ein neues Feld der Forschung, in welchem man sich viel leichter bewegen kann, weil hier Alles auf eine Combination bloſser Symbole ankommt. Zugleich ergibt sich hier ein wesentlicher, sehr bedeuten-

der Vorzug: der Gebrauch imaginärer Gröfsen. Denn sehr häufig stehen die Resultate der Geometrie in einer solchen Verbindung, die, in der analytischen Bezeichnung, durch imaginäre Ausdrücke vermittelt wird: und diese Art der Verbindung kann in der constructiven Methode nur auf Umwegen erkannt werden. Ich wage hier nicht zu entscheiden, ob dieses überall geschehen kann; aber so viel scheint gewifs, dafs dadurch nothwendig ein fremdartiges Element in diese Art der Behandlung hineinkommt.

Die Beziehung der Poncelet schen Methode zu der meinigen hat mich mehrmals überrascht, und zwar um so mehr, als die Art der Beweisführung eine so ganz verschiedene ist. Auf einem ungemein leichten Wege gelange ich z. B. zu denjenigen Resultaten, die Herr Poncelet in Gergonne's Annalen mitgetheilt hat, und, noch mehr, einige dieser Resultate gaben mir Winke zur Ausbildung meiner Methode im Einzelnen. So war die, in der 354. Nummer angeführte, Aufgabe die unmittelbare Veranlassung zu der (III, §. 8.) aufgestellten Theorie der Osculation, die, wie mir scheint, erst zu den zierlichsten Darstellungen führt, wenn man sie auf beliebige krumme Flächen und Linien doppelter Krümmung überträgt. Noch auffallender mufste mir die Beziehung der beiden Methoden zu einander werden, als ich mehrere neue, unter sich sehr verschiedene Resultate, zu denen ich auf meinem Wege gekommen war, später in dem ersten und zweiten Hefte des, von Herrn Crelle herausgegebenen, Journals für Mathematik wiederfand. Ich meine nemlich die hauptsächlichsten Sätze, deren blofse Aussage Herr Steiner, der in die Fufsstapfen des Herrn Poncelet zu treten scheint, an dem eben angeführten Orte gibt. Um nur das anzuführen, was sich auf den Inhalt des vorliegenden Bandes meiner Entwicklungen bezieht, nenne ich erstens die Aufgaben der 217. und 218. Nummer, die Herr Steiner, als Erweiterungen des Problems der Tactionen, blofs anführt, mit der Bemerkung, dafs er zur Construction derselben gekommen sey; und zweitens die Construction der gemeinschaftlichen Tangenten zweier gegebenen Linien zweiter Ordnung. Die Sätze *), aus denen Herr Steiner diese Construction herleitet, sind ohne Beweis mitgetheilt (der Beweis ergibt sich auf analytischem Wege unmittelbar), und hier ist es, rücksichtlich der Methode, nicht ohne Interesse zu vergleichen, wie er durch Zusammenstellung von Flächen zweiter Ordnung, die sich in ebenen Curven schneiden, auf einem Umwege zu demjenigen Systeme zweier geraden Linien hingeführt wird, das ich „Chordal-System zweier Linien zweiter Ordnung“ genannt habe.

*) Crelle's Journal I, p. 46.

Obgleich durch meine Entwicklungen sich eine einzige Methode hindurchzieht, so erscheint dieselbe doch unter verschiedenen Nüancen. Um diese näher zu bezeichnen, verweise ich beispielsweise auf die verschiedenen Beweisarten, die ich von dem Satze gegeben habe, „dafs die Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten eines, in eine Linie zweiter Ordnung beschriebenen, „Sechsecks sich in solchen drei Puncten schneiden, die in gerader Linie liegen." Der erste Beweis (292) liegt in der blofsen Nebeneinanderstellung zweier Coefficienten derjenigen Gleichung, die man erhält, indem man die allgemeine Gleichung der Linien zweiter Ordnung mit einem unbestimmten Coefficienten multiplicirt, und alsdann zu der allgemeinen Gleichung eines Systems zweier geraden Linien addirt. Man gelangt auf diese Weise zu einem allgemeinern Satze über die Verbindung von geraden Linien und einer Linie zweiter Ordnung. Der eben angeführte Satz erscheint ferner als ein sehr specieller Fall eines allgemeinen Satzes über die Zusammenstellung dreier, durch dieselben beiden Puncte gehenden, Linien zweiter Ordnung, und den Beweis dieses allgemeinen Satzes erhalten wir einmal (362) durch Abziehen der Gleichungen zweier Linien zweiter Ordnung von einander, wenn wir die geometrische Bedeutung der Coefficienten derselben berücksichtigen und die Coordinaten-Axen gehörig bestimmen; das andere Mal (383) durch die Verbindung blofser Symbole vermittelst unbestimmter Coefficienten. Der vierte Beweis (384) ist ein indirecter, der sich an ein, zum Behuf einer andern Beweisführung aufgestelltes, Schema anknüpft. Zugleich kommen wir auf diesem Wege zu einer geometrischen Bedeutung derjenigen geraden Linie, welche die drei, in Rede stehenden, Durchschnitte enthält. Diese Art indirecter Beweise scheint eine besondere Würdigung zu verdienen. Der fünfte Beweis des obigen Satzes endlich, den ich beiläufig (392 Note) angezogen habe, geht zu Gleichungen des dritten Grades, die blofs durch Symbole bezeichnet werden, zurück, und ist als der unmittelbarste Beweis anzusehen.

Der vorliegende erste Band meiner Arbeit bildet gewissermafsen ein Ganzes für sich. Jedoch konnten Resultate, die der Geometrie der Ebene angehören, namentlich Sätze und Constructionen, die sich auf Linien zweiter Ordnung beziehen, hier noch keine Stelle finden. Durch diesen ersten Band, und besonders durch den letzten Abschnitt desselben, sind neue Entwicklungen fast unmittelbar gegeben, wenn wir, statt zwei Coordinaten-Axen, deren fortan drei nehmen. Hier erscheint die Leichtigkeit der Behandlungsweise um so gröfser, als, bei der Auffassung der Constructionen im Raume, die Einbildungskraft in höherm Maafse in Anspruch genommen wird.

Die nächste Veranlassung zu den „analytisch-geometrischen Entwicklungen" waren meine Vorlesungen über die höheren Zweige der Mathematik an

der hiesigen Universität, und ebenso gedenk' ich dieselben, in Verbindung mit meinen Vorlesungen, zunächst auf Flächen zweiter Ordnung, und dann bis auf die allgemeinsten geometrischen Untersuchungen, mit Benutzung derjenigen Vortheile, welche hier die sogenannte höhere Rechnung gewährt, fortzuführen.

Ich bemerke noch schliefslich, dafs von den beiden ersten, einleitenden, Abschnitten des ersten Bandes, bereits vor einiger Zeit schon, mehrere Exemplare abgesondert worden sind.

Bonn, im September 1827.

Inhaltsanzeige.

Seite

Erster Abschnitt. Zur Theorie der geraden Linie. 1

Zweiter Abschnitt. Zur Theorie des Kreises. 47

Dritter Abschnitt. Zur Theorie der Linien zweiter Ordnung. 127

§. 1. Verlegung des Anfangs-Punctes der Coordinaten. Discussion aller einzelnen Fälle, welche die allgemeine Gleichung umfafst. 128

§. 2. Veränderung der Richtung der Coordinaten-Axen. Beziehung der constanten Gröfsen ein und derselben Curve zu einander für verschiedene Systeme. 134

§. 3. Geometrische Bedeutung der einzelnen Constanten in der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen zweien veränderlichen Gröfsen. 147

§. 4. Ueber Berührung zwischen einer Linie zweiter Ordnung und geraden Linien. . . 156

§. 5. Zusammenstellung ähnlicher Linien zweiter Ordnung. 166

§. 6. Verbindung der Gleichungen einer Linie zweiter Ordnung und eines Systems zweier geraden Linien zu der Gleichung eines neuen solchen Systems. 177

§. 7. Winkel-Beziehungen. Brennpuncte. 207

§. 8. Linien zweiter Ordnung, welche sich in denselben beiden Puncten schneiden oder sich in demselben Puncte berühren. Einfache Osculation. Höhere Osculation. Zwiefache Berührung. 222

§. 9. Verbindung der Gleichungen zweier gegebenen Linien zweiter Ordnung zu der Gleichung einer Linie derselben Ordnung. Chordal-System. Chordal-Punct. . . 241

§. 10. Allgemeine Schemata. 256

Erster Abschnitt.

Zur Theorie der geraden Linie.

1. Wenn in einer Ebene zwei feste, sich schneidende, gerade Linien OX und OY, die wir, so wie die Ebene selbst, uns als unbegränzt denken, der Lage nach gegeben sind: so können wir den Ort jedes Punctes der Ebene durch die Abstände desselben von diesen beiden geraden Linien so bestimmen, dafs er mit keinem andern Puncte verwechselt werden kann. In den nächsten Entwicklungen, die wir als Vorbereitung für die spätern Abschnitte betrachten, nehmen wir diese Abstände, wie gewöhnlich geschieht, auf geraden Linien, die den der Lage nach bekannten parallel sind, und nennen sie Coordinaten. Die Coordinaten des Punctes M sind also MQ und MP. Statt dieser Linien können wir die ihnen gleichen OP und OQ nehmen, und auch diese Coordinaten nennen. Die beiden festen geraden Linien heifsen Coordinaten-Axen, oder auch blofs, wo keine Verwechslung Statt finden kann, Axen; der Punct, in welchem beide sich schneiden, heifst Anfangs-Punct der Coordinaten, wir bezeichnen ihn überall durch O, so wie die Axen durch OX und OY. Die Coordinaten, welche in die eine dieser Axen fallen, heissen Abscissen; die, welche in die andere Axe fallen, Ordinaten. Jene bezeichnen wir durchgehends mit x, diese mit y; und nennen die eine Axe auch Axe der x oder erste Axe, die andere Axe der y oder zwete Axe. In Beziehung auf verschiedene Puncte sind x und y als veränderliche Gröfsen zu betrachten. Fig. 1.

2. Wenn wir irgend zwei sich schneidende gerade Linien als Coordinaten-Axen nehmen, und wir wollen Puncte bezeichnen, die nicht in demselben der an ihrem Durchschnitte entstehenden vier Winkel sich befinden, so treten verschiedene Vorzeichen der veränderlichen Gröfsen ein. Es ist hier keinesweges meine Absicht, in ein ausführliches Detail über die Theorie der entgegengesetzten Zeichen einzugehen; ich bekenne mich aber entschieden für die Ansicht, welche Herr von Münchow vor Kurzem auf eine eigenthümliche Art aufgestellt, und für den Fall der beiden Trigonometrien durchgeführt hat. *) Da nemlich die verschiedenen Vorzeichen ihrer Natur nach sich nur auf die Art beziehen,

*) Grundlehren der ebenen und sphärischen Trigonometrie von K. D. v. Münchow. Bonn 1826.

wie wir Gröfsen, und namentlich in der analytischen Geometrie Linien-Längen bezeichnen, so müssen wir natürlich die Rechtfertigung ihrer Einführung in eben dieser Bezeichnungs-Art suchen. Verschiedene Zeichen treten da ein, wo eine einzige Formel mehrere besondere Fälle umfassen soll. Dafs eine entgegengesetzte Lage der bezeichneten Linien (wohl zu verstehen zunächst nur in den Formeln, die wir für unsere Rechnung aufbauen) den entgegengesetzten Zeichen entspricht, ist eine Folge hiervon, kann und darf aber nicht als Axiom angesehen werden.

Fig. 1. 3. Wenn wir z. B. den Abstand der Fufspuncte der Abscissen MQ, M′Q′ zweier Puncte M und M′ auf der zweiten Axe, oder die Entfernung der Puncte selbst, wenn dieselben auf dieser Axe liegen, durch δ bezeichnen: so haben wir in dem Falle, dafs die beiden Puncte auf derselben Seite der ersten Axe liegen:

$$\delta = b - y, \tag{1}$$

im andern Falle aber:

$$\delta = b + y, \tag{2}$$

wenn wir die Abstände der beiden Puncte von der ersten Axe, (Abstände, die auf geraden Linien, die der zweiten Axe parallel sind, genommen werden) durch b und y ausdrücken. Den einen Punct mögen wir als fest, den andern als beweglich, mithin dessen Ordinate y als eine veränderliche Gröfse betrachten.

Wenn wir nun den auf die angezeigte Weise genommenen Abstand je zweier Puncte, die in Beziehung auf die erste Axe irgend eine beliebige Lage haben, algebraisch auf dieselbe Weise ausdrücken, also die beiden Gleichungen (1) und (2) in eine einzige Gleichung, für welche wir die erste derselben nehmen mögen, zusammenfassen wollen, so müssen wir die zweite folgender Gestalt schreiben:

$$\delta = b - (-y),$$

d. h. wir müssen dem y ein — Zeichen als inhärirend, y als negative Gröfse, betrachten. Das Zeichen der Ordinaten ändert sich also, wenn wir von Puncten auf einer Seite der ersten Axe zu Puncten auf der andern Seite derselben übergehen. Es ist hierbei durchaus gleichgültig, wo wir die positiven Ordinaten nehmen, wie es gleichgültig ist, ob wir die beiden Gleichungen (1) und (2) in die erste derselben, oder in die zweite zusammenziehen.

Auf ähnliche Weise verhält es sich mit den Zeichen der Abscissen; für Puncte, die auf verschiedenen Seiten der zweiten Axe liegen, müssen wir dieselben mit entgegengesetzten Zeichen einführen.

Die Zeichen der Ordinaten wie der Abscissen ändern sich, indem sie durch Null gehen.

Die Bestimmung der positiven Seite der x ist beliebig, wie die Bestimmung der positiven y; und beide Bestimmungen sind sich von einander unabhängig.

4. Wenn wir nun ferner mehrere Gleichungen, die sich auf verschiedene Fälle beziehen, auf die angezeigte Weise in eine einzige Gleichung zusammengezogen haben, so können wir diese Gleichung mit andern Gleichungen verbinden; und wenn wir alsdann im Resultate der Rechnung die verschiedenen Zeichen der bezüglichen Gröfsen restituiren, so kommt diefs auf Einerlei damit hinaus, als wenn wir für jede der Gleichungen, welche auf die besondern Fälle sich beziehen, besonders die jedesmalige Rechnung angelegt hätten.

Hierbei ist nur die Bemerkung zu machen, dafs wir, wenn wir Gleichungen zum Behuf einer einzelnen Auflösung einer geometrischen Aufgabe anlegen, gewöhnlich gezwungen sind, mehrere Fälle zusammenzufassen.

Wir wollen hier nicht länger bei der Theorie der entgegengesetzten Gröfsen verweilen und verweisen auf die oben angezogene Schrift. In dem Folgenden werden wir jedesmal,

wo wir verschiedenen Vorzeichen begegnen, Rechenschaft darüber geben, woher sie kommen und was sie anzeigen.

5. Wenn wir durch y' und x' constante, positive oder negative, Werthe bezeichnen, so ist durch die Gleichungen:

$$y = y', \qquad x = x',$$

ein bestimmter Punct gegeben, und diese Gleichungen heifsen daher die Gleichungen des Punctes. Die erste Gleichung:

$$y = y'$$

enthält die Bestimmung, dafs jener Punct auf einer geraden Linie liegt, welche der ersten Axe parallel ist, und von der zweiten Axe ein Stück, das gleich ist y', abschneidet. Weil aber jedem Puncte dieser Geraden obige Gleichung zukommt, so ist

$$y = y'$$

die Gleichung einer der Abscissen-Axe parallelen geraden Linie; und wenn wir y' gehörig bestimmen, so erhalten wir die Gleichung jeder beliebigen parallelen Geraden. Auf ähnliche Weise ist:

$$x = x'$$

die Gleichung einer der Ordinaten-Axe parallelen geraden Linie, welche von der ersten Axe ein Stück, das gleich ist x', abschneidet. Indem wir die beiden Gleichungen verbinden, haben wir die Gleichungen des Punctes, der zugleich auf jenen beiden geraden Linien, d. h. im Durchschnitte derselben, liegt.

Die Gleichungen des Anfangs-Punctes der Coordinaten sind:

$$y = 0, \qquad x = 0;$$

und die erste Gleichung für sich allein ist die Gleichung der Abscissen-Axe; die zweite Gleichung stellt die Ordinaten-Axe dar.

6. *Jede Gleichung, die in Beziehung auf y und x vom ersten Grade ist, stellt eine gerade Linie dar.* Wir können, indem wir durch Division den Coefficienten des ersten Gliedes fortschaffen,

$$y + Ax + B = 0 \qquad \text{oder} \qquad y = ax + b \qquad (1)$$

als die allgemeine Gleichung dieses Grades betrachten. Wir wollen in dem Nächst-Folgenden die Gleichung unter der zweiten Form nehmen. Setzen wir in diese Gleichung für x einen bestimmten Werth x', so ergibt sich aus derselben der entsprechende Werth von y, den wir durch y' unterscheiden wollen. Indem wir aber x als constant betrachten, verbinden wir eigentlich die gegebene Gleichung mit der Gleichung $x = x'$, die eine, der Axe der y parallele, gerade Linie vertritt. Wir suchen also den Durchschnitt dieser letztgenannten Linie mit der durch obige Gleichung dargestellten. Durch diesen Durchschnitt geht auch die, der ersten Axe parallele, gerade Linie, deren Gleichung ist:

$$y = y'.$$

Da der Punct, dessen Coordinaten y' und x' sind*), ein Punct der durch (1) dargestellten geraden Linie ist, so haben wir zwischen y' und x' die Bedingungs-Gleichung:

$$y' = ax' + b. \qquad (2)$$

Zwischen den beiden Gleichungen (1) und (2), können wir eine beliebige der constan-

*) Wir werden im Folgenden statt: „der Punct, dessen Coordinaten y' und x' sind" kurz: „der Punct (y', x')" schreiben und ebenso öfters statt: „die durch die Gleichung (1) dargestellte gerade Linie" blofs: „die gerade Linie (1)".

ten Gröſsen b und a eliminiren. Um b zu eliminiren, brauchen wir bloſs abzuziehen, und erhalten auf diese Weise:

$$y - y' = a(x - x') \qquad (3)$$

für die Gleichung einer geraden Linie, die durch den festen Punct (y′, x′) geht. Die letzte Gleichung (3) spricht deutlich den Character der geraden Linie aus, denn, wie wir auch x bestimmen mögen, wir haben immer:

$$\frac{y - y'}{x - x'} = a = const.$$

Fig. 2. d. h. mit Beziehung auf die 2. Figur, wo M′ den Punct (y′, x′) bezeichnet,

$$\frac{MQ}{M'Q} = const.$$

wohin auch M fortrücken mag.

7. Wenn wir den Winkel, welchen die durch (1) dargestellte gerade Linie mit der ersten Axe bildet, von der positiven Seite der x nach der positiven Seite der y nehmen, und diesen Winkel durch α, den Coordinaten-Winkel aber durch β bezeichnen, so ist:

$$a = \frac{MQ}{M'Q} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)};$$

also, wenn der Coordinaten-Winkel ein rechter ist:

$$a = \tang \alpha.$$

8. Setzen wir x = o in der Gleichung:

$$y = ax + b,$$

so bestimmen wir den Durchschnitt der geraden Linie mit der zweiten Axe; die Ordinate dieses Punctes ist also die zweite Constante b. Auf ähnliche Wiese ergibt sich $-\frac{b}{a}$ für die Abscisse des Durchschnittes mit der ersten Axe.

9. Wir haben oben zwischen den beiden Gleichungen (1) und (2) b eliminirt, und sind so zu einer Gleichung (3) für eine gerade Linie, die durch den festen Punct (y′, x′) geht, gekommen. Wenn wir zwischen denselben Gleichungen die andere Constante a eliminiren, so kommen wir zu einer neuen Gleichung für eine gerade Linie, welche durch denselben Punct (y′, x′) geht; wir erhalten nemlich auf die angezeigte Weise:

$$b(x - x') - y'x + yx' = o. \qquad (4)$$

Fig. 3. In dieser Gleichung spricht sich nicht so deutlich, als in der Gleichung (3), der Character der geraden Linie aus. Wir wollen indeſs diese Gleichung in die Sprache der Geometrie übersetzen, und zwar vorerst annehmen, unser Coordinaten-System sey ein rechtwinkliges. Sey MM′ die gerade Linie, M′ der Punct (y′, x′), M der veränderliche Punct (y, x). Alsdann ist der Inhalt des Rechtecks Q′P gleich b (x — x′), und ebenso R′P gleich y′x und RP′ gleich yx′. Die Gleichung (4) geht also über in folgende:

$$Q'P - R'P + RP' = o;$$

und wenn wir reduciren, so kommt:

$$M'R = M'Q.$$

Fig. 4. Wäre der Coordinaten-Winkel kein rechter, sondern ein beliebiger, den wir durch β bezeichnen wollen, so finden wir in Beziehung auf die 4. Figur ebenfalls M′R = M′Q, wenn wir statt die Gleichung (4) geradezu zu behandeln, alle Glieder derselben zuvor mit $\sin\beta$ multipliciren, mithin die Gleichung

$$b(x - x')\sin\beta - y'x\sin\beta + yx'\sin\beta = o$$

geometrisch deuten und dabei gerade so wie eben verfahren.

Die Gleichung (4) ist also anders nichts, als die algebraische Aussage von folgendem bekannten Satze:

Wenn man durch einen beliebigen Punct der Diagonale eines Parallelogrammes zwei gerade Linien zieht, von denen jede zweien Seiten desselben parallel ist, so sind die beiden neuen Parallelogramme, die zu beiden Seiten der Diagonale entstehen, dem Inhalte nach, einander gleich.

10. Wenn aufser dem Puncte (y', x') noch ein zweiter Punct (y'', x'') gegeben ist, so folgt aus (3):

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'};$$

und aus (4):

$$b = \frac{y'x'' - y''x'}{x'' - x'}.$$

Die Constanten in der Gleichung (1) der geraden Linie sind also auf diese Weise bestimmt.

11. Für die Durchschnitte einer geraden Linie, die durch zwei gegebene Puncte (y', x') und (y'', x'') geht, mit der zweiten und ersten Axe, ergeben sich also folgende Bestimmungen:

$$y = b = \frac{y'x'' - y''x'}{x'' - x'},$$

$$x = -\frac{b}{a} = \frac{y''x' - y'x''}{y'' - y'}.$$

12. Die Gleichung endlich der geraden Linie, welche durch die beiden Puncte (y', x') und (y'', x'') geht, ist folgende:

$$y(x'' - x') - x(y'' - y') = y'x'' - y''x', \qquad (5)$$

eine Gleichung, zu der wir durch Elimination der beiden Constanten b und a zwischen den drei Gleichungen:

$$y = ax + b,$$
$$y' = ax' + b,$$
$$y'' = ax'' + b,$$

gekommen sind.

13. Wir können der Gleichung für die gerade Linie eine symmetrische, für manche Rechnungen sehr bequeme, Form geben, indem wir die Segmente, welche dieselbe auf den Axen bestimmt, die Stücke OP und OQ, als die beiden Constanten derselben einführen. Bezeichnen wir diese Segmente durch p und q, so erhalten wir auf der Stelle die gesuchte Gleichung aus (5), wenn wir: Fig. 5.

$$x' = 0, \quad x'' = p, \quad y' = q, \quad y'' = 0$$

setzen. Auf diese Weise kommt:

$$py + qx = pq, \qquad (6)$$

welcher Gleichung wir auch folgende Form geben können:

$$\frac{y}{q} + \frac{x}{p} = 1 \qquad (7)$$

14. Es ist offenbar, dafs, wenn wir durch n irgend eine beliebige Zahl bezeichnen, die Gleichung (7) befriedigt wird, wenn wir

$$y = nq, \quad x = (1 - n)p$$

setzen, und dafs mithin die so bestimmten Coordinaten einem Puncte der durch obige

Gleichung dargestellten geraden Linie angehören. Wenn wir $n = \frac{1}{2}$ nehmen, so bestimmen die Gleichungen:

$$y = \frac{q}{2}, \quad x = \frac{p}{2}$$

die Mitte des von den Axen interceptirten Stückes der geraden Linie.

15. Die Entfernung zweier beliebiger Puncte (y'', x'') und (y', x') von einander ist durch die Länge der dritten Seite eines Dreiecks bestimmt, dessen beide ersten Seiten gleich sind dem Unterschiede der gleichnamigen Coordinaten und einen Winkel mit einander bilden, der dem Coordinaten-Winkel oder dessen Neben-Winkel gleich ist. Wir haben daher, wenn w[illegible] diese Entfernung durch D, den Coordinaten-Winkel durch β bezeichnen:

$$D^2 = (y'' - y')^2 + 2\,(y'' - y')\,(x'' - x')\cos\beta + (x'' - x')^2$$

Das positive Zeichen des mittlern Gliedes besteht für alle möglichen verschiedenen Lagen der beiden Puncte gegen einander, denn je nachdem $(y''-y')$ und $(x''-x')$ von gleichem Zeichen sind, oder nicht, haben wir für den, der dritten Seite des Dreiecks gegenüberliegenden Winkel, den Nebenwinkel von β oder β selbst zu nehmen. Ist der Coordinaten-Winkel ein rechter, mithin $\cos\beta = 0$, so reducirt sich die letzte Gleichung auf folgende:

$$D^2 = (y'' - y')^2 + (x'' - x')^2.$$

16. Der algebraische Ausdruck für den Abstand zweier Puncte von einander, der im Allgemeinen, wie die vorige Nummer zeigt, irrational ist, hat, wenn nicht eine nähere Bestimmung hinzutritt, kein bestimmtes Zeichen, oder was dasselbe heiſst, das Zeichen hat keine geometrische Bedeutung, wenn wir nicht etwa eine solche hineinlegen wollen, welche sich alsdann auf das Entgegengesetzte der Richtung bezöge, wie wir jenen Abstand bestimmen, ob von dem ersten zum zweiten Puncte oder umgekehrt: die einzige Zweideutigkeit, die die Bestimmung des Abstandes zweier Puncte von einander zuläſst. Diese Beziehung stellt sich in gewisser Hinsicht augenfällig für den besondern Fall dar, daſs beide Puncte auf einer der Axen, etwa auf der ersten Axe liegen. Alsdann ist nemlich $y'' = y' = 0$, und wir finden für D folgende beiden Ausdrücke:

$$x'' - x' \quad \text{und} \quad -(x'' - x') \quad \text{oder} \quad x' - x''.$$

Wenn die Abstände mehrerer Puncte unter einander in gegenseitiger Verbindung vorkommen, so entscheidet die Natur der jedesmaligen Aufgabe darüber, mit welchem Zeichen wir die einzelnen Abstände einführen müssen, wo Alles dann wieder darauf hinauskommt, verschiedene Fälle in einen einzigen algebraischen Ausdruck zusammenzufassen. Die Behauptung, daſs der Abstand zweier Puncte von einander durchaus als positive Gröſse betrachtet werden müsse, ist ganz unhaltbar. Dieſs zeigt sich deutlich an den Beispielen der 31. und der folgenden Nummern.

Fig. 6. 17. Die Gleichungen zweier geraden Linien, auf ein beliebiges System bezogen, seyen:

$$y = ax + b,$$
$$y = a'x + b';$$

wir wollen die Winkel, welche dieselben mit der ersten Axe bilden, durch α und α', den Coordinaten-Winkel, wie gewöhnlich, durch β bezeichnen. Alsdann ist:

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}, \quad a' = \frac{\sin\alpha'}{\sin(\beta-\alpha')},$$

woraus wir durch eine leichte trigonometrische Umformung folgende Werthe für *tang* α und *tang* α' herleiten:

$$tang\ \alpha = \frac{a \sin\beta}{1 + a\cos\beta},\quad tang\ \alpha' = \frac{a' \sin\beta}{1 + a'\cos\beta}.$$

Wir haben ferner:

$$tang\ \omega = \frac{tang\ \alpha' - tang\ \alpha}{1 + tang\ \alpha\ tang\ \alpha'},$$

wenn wir den Winkel, welchen die beiden geraden Linien mit einander bilden, durch ω bezeichnen, und diesen Winkel von der erstern geraden Linie zur zweiten nach derselben Richtung hin nehmen, als die Winkel α und α' genommen worden sind. Vermöge der vorhergehenden Gleichungen reducirt sich der letzte Ausdruck auf:

$$tang\ \omega = \frac{(a' - a)\sin\beta}{1 + (a + a')\cos\beta + aa'}. \qquad (1)$$

Stehen die beiden gegebenen geraden Linien auf einander senkrecht, so ist *tang* $\omega = 0$, mithin:

$$1 + (a + a')\cos\beta + aa' = 0. \qquad (2)$$

18. Die letzte Gleichung gibt:

$$a = -\frac{1 + a'\cos\beta}{a' + \cos\beta}.$$

Ist also irgend eine gerade Linie durch die Gleichung

$$y = a'x + b'$$

gegeben, so erhalten wir folgende Gleichung für eine andere Linie, welche auf ihr senkrecht steht:

$$y = -\frac{1 + a'\cos\beta}{a' + \cos\beta}\,x + b, \qquad (3)$$

wenn wir durch b irgend eine Constante bezeichnen.

19. Nehmen wir für eine der beiden auf einander senkrechten geraden Linien, für diejenige z. B., welcher a' entspricht, eine der Coordinaten-Axen selbst, so ist

$$a' = 0,\quad \text{oder}\quad \frac{1}{a'} = 0,$$

je nachdem wir die erste oder zweite Axe nehmen. Im erstern Falle reducirt sich die Bedingungs-Gleichung (2) auf:

$$1 + a\cos\beta = 0,$$

oder:

$$a = -\frac{1}{\cos\beta};$$

im andern Falle reducirt sich dieselbe Gleichung, wenn wir sie zuvor auf folgende Form bringen:

$$\frac{1}{a'} + \left(\frac{a}{a'} + 1\right)\cos\beta + a = 0;$$

unmittelbar auf:

$$a = -\cos\beta.$$

20. Soll also eine gerade Linie, welche senkrecht auf der Abscissen-Axe steht, durch einen bestimmten Punct (y', x') gehen, so ist ihre Gleichung folgende:

$$(y - y')\cos\beta + (x - x') = 0. \qquad (4)$$

Liegt der gegebene Punct auf der ersten Axe, so ist $y' = 0$, und

$$y \cos\beta + (x - x') = 0 \qquad (5)$$

die Gleichung einer geraden Linie, die senkrecht auf der ersten Axe steht, und dieselbe in einer Entfernung vom Scheitel, die gleich ist x', schneidet. Setzen wir $x' = 0$, so kommt:

$$(y - y') \cos\beta + x = 0 \qquad (6)$$

für die Gleichung derjenigen geraden Linie, die vom Puncte $(y', 0)$ der zweiten Axe senkrecht auf die erste Axe gefällt wird.

Auf ähnliche Weise ist

$$y - y' + (x - x') \cos\beta = 0 \qquad (7)$$

die Gleichung einer geraden Linie, welche senkrecht auf der zweiten Axe steht, und durch den Punct (y', x') geht;

$$y + (x - x') \cos\beta = 0 \qquad (8)$$

die Gleichung des vom Puncte $(0, x')$ der ersten Axe auf die zweite gefällten Perpendikels, und

$$y - y' + x \cos\beta = 0 \qquad (9)$$

die Gleichung des im Puncte $(y'\ 0)$ der zweiten Axe errichteten Perpendikels.

21. Für den Fall rechtwinkliger Coordinaten ist:

$$\tang \omega = \frac{a' - a}{1 + aa'}, \qquad (10)$$

und die Bedingungs-Gleichung, dafs die in Rede stehenden geraden Linien sich rechtwinklig schneiden:

$$1 + aa' = 0. \qquad (11)$$

Fig. 7. 22. Wir wollen jetzt gleich schon die eben entwickelten Ausdrücke zum Beweise geometrischer Sätze anwenden, und brauchen dieselben zu diesem Behufe blofs für die Gleichungen zweier geraden Linien unter den folgenden Formen:

$$\begin{aligned} py + qx &= pq, \\ p'y + q'x &= p'q', \end{aligned} \qquad (1)$$

umzubilden. Sind die letzten Gleichungen mit denen der 17. Nummer identisch, so ist:

$$a = -\frac{q}{p}, \qquad a' = -\frac{q'}{p'}.$$

Nehmen wir nun zuvörderst an, der Coordinaten-Winkel sey ein rechter, so gibt (11):

$$\frac{q}{p} \cdot \frac{q'}{p'} + 1 = 0,$$

als Bedingungs-Gleichung, dafs die bezüglichen geraden Linien QP und Q'P' auf einander senkrecht stehen. Hieraus folgt unmittelbar:

$$qq' = -pp'; \qquad (2)$$

d. h. geometrisch ausgedrückt mit Beziehung auf die 7. Figur: das unter den Segmenten OP und OP' enthaltene Rechteck ist dem unter den Segmenten OQ und OQ' enthaltenen gleich.

23. Wenn, umgekehrt, die letzte Gleichung (2) Statt findet, so stehen die beiden durch (1) bezeichneten geraden Linien auf einander senkrecht. p, p', q, q' bezeichnen die Segmente, wodurch diese geraden Linien bestimmt werden. Wir können aber auf zwiefache Art diese Segmente zur Bestimmung von zweien geraden Linien paarweise so kombiniren, dafs jedesmal die Gleichung (2) befriedigt wird, indem wir einmal p mit q und p' mit q', zur Bestimmung von jenen beiden geraden Linien PQ und P'Q', die wir eben

betrachtet haben, zusammenstellen, das andere Mal aber p mit q' und p' mit q. Die im letztern Fall bezeichneten geraden Linien sind PQ' und P'Q, und ihre Gleichungen:

$$p y + q' x = p q',$$
$$p' y + q x = p' q. \quad (3)$$

Und auch diese geraden Linien stehen auf einander senkrecht, weil die Gleichung (2) hier, wie für die vorigen beiden Geraden, die Bedingung der Perpendicularität enthält. Die durch den Durchschnitt Q' von OQ und P'R und durch den Punct P gehende gerade Linie, steht mithin auf der in dem Dreieck P'QP dem Puncte P gegenüberliegenden Seite senkrecht. Wir erkennen also bei diesen Betrachtungen, die sich unmittelbar darbieten, in der Gleichung (2) sogleich folgenden Satz:

Wenn man in einem beliebigen Dreieck von den Winkel-Spitzen auf die gegenüberliegenden Seiten Perpendikel fällt, so schneiden sich diese Perpendikel in demselben Puncte.

24. Wir hätten mit gleicher Leichtigkeit geradezu beweisen können, daſs das von P auf P'Q gefällte Perpendikel durch den Punct Q' geht. Denn die Gleichung jeder geraden Linie, die durch P geht, hat folgende Form:

$$p y + g x = p g;$$

wo wir OP gleich p setzen, g aber irgend ein Segment der Ordinaten-Axe bezeichnet, das von einer Geraden zur andern wächst oder abnimmt. Soll diese gerade Linie senkrecht stehen auf P'Q, deren Gleichung folgende ist:

$$p' y + q x = p' q,$$

so haben wir die Bedingungs-Gleichung:

$$p p' + q g = 0.$$

Da aber auch der Voraussetzung gemäſs:

$$p p' + q q' = 0,$$

so ergiebt sich g = q', das Perpendikel PR' geht also durch den Punct Q', den Durchschnitt der beiden andern Perpendikel OQ und P'R.

25. Ich füge hier zum Vergleich der Methoden noch einen andern Beweis hinzu. Das gegebene Dreieck sey PP'Q. Als erste Axe nehmen wir die Basis des Dreiecks, PP', als zweite Axe das vom gegenüberliegenden Winkel-Puncte auf dieselbe gefällte Perpendikel QO. (Auf diese Wahl der Coordinaten hat uns die 23. Nummer aufmerksam gemacht.) Wir bezeichnen ferner die mit gehörigen Zeichen genommenen Segmente OP, OP', OQ durch p, p', und q.

Bei diesen Voraussetzungen sind:

$$y = -\frac{q}{p} x + q,$$

$$y = -\frac{q}{p'} x + q,$$

die Gleichungen von PQ und P'Q, und die Gleichungen derjenigen beiden geraden Linien, welche senkrecht auf dieselben von den gegenüberliegenden Winkel-Puncten P' und P gefällt werden:

$$y = \frac{p}{q} (x - p'),$$

$$y = \frac{p'}{q} (x - p).$$

Ziehen wir diese beiden Gleichungen von einander ab, so kommt:

$$o = \frac{p-p'}{q} x,$$

oder:

$$x = o;$$

und dieſs ist die Abscisse des Durchschnitts-Punctes der beiden letztgefällten Perpendikel, oder, analytischer gesprochen, die Gleichung der zweiten Axe, für welche wir das erste Perpendikel genommen haben. Dieses Perpendikel geht also durch den Durchschnitt der beiden andern.

26. Wenn wir diesen Beweis mit demjenigen der 23. Nummer zusammenstellen, so begegnet uns die Bemerkung, daſs wir zuletzt einen zum Beweise vorgelegten Satz (mit möglichster Kürze vielleicht) bewiesen, früher hingegen den Satz gefunden haben, so daſs die Construction desselben erst aus einer rein algebraischen Betrachtung entstanden ist. Dieser Unterschied, den ich einstweilen nur andeute, scheint mir ein wesentlicher zu seyn.

27. Der Beweis des in Rede stehenden Satzes erfordert einige leichte Entwickelungen mehr, wenn wir zwei Seiten des Dreiecks als Coordinaten-Axen nehmen und uns alsdann der Formeln der 18. — 20. Nummer bedienen.

28. Wir gehen weiter. Es sey bei einer beliebigen Annahme der Coordinaten:

$$y = ax + b \qquad (1)$$

die Gleichung irgend einer geraden Linie und (y', x') irgend ein gegebener Punct: wir suchen den kürzesten Abstand des Punctes von der geraden Linie.

Für das vom Puncte (y', x') auf die gerade Linie gefällte Perpendikel, auf welchem jener Abstand zu nehmen ist, erhalten ~~wir zunächst folgende Gleichung:~~

$$y - y' = a'(x - x'),$$

wo die constante Gröſse a' nach der 18. Nummer durch folgende Gleichung:

$$aa' + (a + a') \cos. \beta + 1 = o,$$

wenn wir hier, wir dorten, den Coordinaten-Winkel durch β bezeichnen, gegeben ist. Hiernach kommt:

$$a' = -\frac{1 + a \cos \beta}{a + \cos \beta};$$

mithin ist die Gleichung des Perpendikels:

$$y - y' = -\frac{1 + a \cos \beta}{a + \cos \beta}(x - x'). \qquad (2)$$

Bezeichnen wir ferner die Coordinaten des Fuſs-Punctes dieses Perpendikels durch y'' und x'', und die Länge desselben durch P, so ist nach (15):

$$P^2 = (y'' - y')^2 + 2(y'' - y')(x'' - x') \cos \beta + (x'' - x')^2.$$

Da der Punct (y'', x'') zugleich auf den beiden Geraden (1) und (2) liegt, so haben wir die beiden Gleichungen:

$$y'' - y' = -\frac{1 + a \cos \beta}{a + \cos \beta}(x'' - x')$$

$$y'' = ax'' + b$$

zur Bestimmung der Coordinaten desselben. Zum Behuf der Elimination können wir der letztern Gleichung folgende Form geben:

$$y'' - y' = a(x'' - x') - y' + ax' + b,$$

und erhalten alsdann sogleich folgende Ausdrücke:

$$x'' - x' = (y' - a x' - b)\, \frac{a + \cos\beta}{a^2 + 2a\cos\beta + 1},$$

$$y'' - y' = -(y' - a x' - b)\, \frac{1 + a\cos\beta}{a^2 + 2a\cos\beta + 1}.$$

Substituiren wir ferner diese Werthe von $x'' - x'$ und $y'' - y'$ in obigem Ausdruck für P^2, so kommen wir nach einigen leichten trigonometrischen Umformungen und nach Ausziehung der Quadrat-Wurzel zu folgender Gleichung:

$$P = \pm \frac{y' - a x' - b}{\sqrt{(a^2 + 2a\cos\beta + 1)}} \cdot \sin\beta. \qquad (3)$$

Wenn wir statt des Perpendikels eine andere gerade Linie nehmen, die mit der gegebenen irgend einen Winkel γ bildet, und das Stück derselben zwischen dem gegebenen Puncte und der gegebenen geraden Linie durch p bezeichnen, so ist offenbar

$$p \sin\gamma = P;$$

folglich erhalten wir:

$$p = \pm \frac{y' - a x' - b}{\sqrt{(a^2 + 2a\cos\beta + 1)}} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}. \qquad (4)$$

29. Für den Fall rechtwinkliger Coordinaten reduciren sich die Ausdrücke für P und p auf folgende:

$$P = \pm \frac{y' - a x' - b}{\sqrt{(a^2 + 1)}} = \pm (y' - a x' - b) \cos\alpha, \qquad (5)$$

$$p = \pm \frac{y' - a x' - b}{\sqrt{(a^2 + 1)}} \cdot \frac{1}{\sin\gamma} = \pm (y' - a x' - b) \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}, \qquad (6)$$

wenn wir den Winkel, welchen die gegebene Gerade mit der Axe der x bildet, wie gewöhnlich durch α bezeichnen.

30. Es ist in der analytischen Geometrie niemals zu vernachläſsigen, sich von der Form der Ausdrücke, zu welchen längere Entwicklungen uns geführt haben, Rechenschaft zu geben. Zuvörderst, was das doppelte Zeichen der in den letzten beiden Nummern entwickelten Ausdrücke betrifft, so finden wir den Grund desselben darin, daſs wir P und p als den Abstand zweier Puncte von einander bestimmt haben (16). Ueber das Zeichen, welches wir in besondern, durch die Natur der jedesmaligen Aufgabe bestimmten, Fällen gebrauchen müssen, wird uns die folgende Nummer belehren.

Es muſs uns ferner noch die Form der Zähler in den verschiedenen Ausdrücken für P und p, verglichen mit der Gleichung (1) der gegebenen geraden Linie, auffallen. Wir können diese Form leicht von vorne hinein rechtfertigen, wenn wir erwägen, daſs offenbar P und p gleich Null werden, wenn der gegebene Punct (y', x') auf der gegebenen geraden Linie liegt. In diesem Falle aber ist:

$$y' - a x' - b = 0;$$

deshalb muſs der erste Theil dieser Gleichung als Factor jener Ausdrücke erscheinen.

31. Wenn die gerade Linie (1) und der Punct (y', x') gegeben sind, so bleibt nichts mehr als das Zeichen, mit dem die in Rede stehenden Ausdrücke für fernere Rechnungen behaftet werden müssen, noch zu bestimmen übrig. Wenn aber, (immer bei der Annahme, daſs die gerade Linie gegeben ist,) irgend eine Bestimmung über die Gröſse jener Abstände gemacht wird, so ist der Punct (y', x') nicht mehr durchaus beliebig; wir erhalten

zwischen den Coordinaten desselben eine Bedingungs-Gleichung, d. h. einen geometrischen Ort für den Punct selbst.

Der Einfachheit wegen bedienen wir uns in dem Folgenden rechtwinkliger Coordinaten und sprechen zunächst nur von dem kürzesten Abstande, den wir durch P bezeichnet haben. Bei diesen Voraussetzungen wollen wir vorerst annehmen, P sey eine gegebene Gröfse, alsdann finden wir für den Ort aller Puncte, die um dieses Stück von der, durch die Gleichung:

$$y = ax + b$$

gegebenen, geraden Linie, abstehen, mit Hinweglassung der Accente, folgende Gleichung:

$$P = \pm \frac{y - ax - b}{\sqrt{1 + a^2}},$$

und hieraus ergibt sich unmittelbar

$$y = ax + (b \pm P\sqrt{1 + a^2});$$

mithin, wenn wir das doppelte Zeichen berücksichtigen, erhalten wir für den gesuchten Ort zwei, der gegebenen parallele und zu beiden Seiten derselben liegende gerade Linien.

Das Zeichen $+$ in der letzten Gleichung entspricht der Einführung des Werthes für P mit positivem Zeichen, woraus wir dann rückwärts schliefsen, dafs der Ausdruck für den Abstand jedes Punctes der bezüglichen geraden Linie:

$$y = ax + (b + P\sqrt{1 + a^2})$$

von der gegebenen positiv genommen werden mufs. Jeder Punct aber, der auf dieser Geraden sich befindet, liegt, rücksichtlich der gegebenen geraden Linie, nach der positiven Seite der y hin. Für Puncte, welche auf der Geraden:

$$y = ax + (b - P\sqrt{1 + a^2})$$

liegen, findet gerade die umgekehrte Beziehung Statt.

Wir können nicht, was die Zeichen betrifft, die Gleichung:

$$P = \pm (y - ax - b)\cos\alpha,$$

woraus folgende sich ergibt:

$$y = ax + (b \pm \frac{P}{\cos\alpha}),$$

ganz auf dieselbe Weise behandeln. Der Grund davon liegt offenbar darin, dafs das Vorzeichen von $\frac{P}{\cos\alpha}$, in welchem Ausdruck wir $\cos\alpha$ für $\sqrt{1 + a^2}$ gesetzt haben, in eine neue Beziehung zu der Richtung der gegebenen geraden Linie tritt. Machen wir indefs die Beschränkung, dafs der Winkel α nur bis π genommen werde, so entspricht der vorherigen Zeichen-Bestimmung nun für unsere neuen Gleichungen folgende Annahme, dafs nemlich für solche Puncte, die in Beziehung auf die gegebene Gerade nach der positiven Seite der y hin liegen, je nachdem α kleiner oder gröfser ist als $\frac{\pi}{2}$, einmal der algebraische Ausdruck für P mit positivem, das andere Mal mit negativem Zeichen genommen werden mufs.

Wir können hier noch eine Bemerkung machen über das Zeichen, mit welchem der Zahlen-Werth des in Rede stehenden Abstandes behaftet werden mufs. Wir haben gesehen, dafs wir in obigem algebraischen Ausdrucke für diesen Abstand P das positive

Zeichen nehmen müssen, wenn der gegebene Punct (y', x'), in Beziehung auf die gegebene Linie, nach der positiven Seite der y hin fällt; in diesem Falle ist aber (29)

$$y' > ax' + b,$$

und mithin auch der Zähler in dem Werthe von P, mithin P selbst positiv. Im andern Falle ist der Zahlen-Werth von P mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen.

32. Seyen ferner die Gleichungen zweier geraden Linien gegeben:

$$\begin{aligned} y &= ax + b, \\ y &= a'x + b', \end{aligned} \quad (1)$$

alsdann finden wir für den Abstand eines beliebigen Punctes (y', x') von jeder der beiden geraden Linien:

$$\begin{aligned} P &= \pm (y' - ax' - b) \cos \alpha, \\ P' &= \pm (y' - a'x' - b') \cos \alpha'; \end{aligned} \quad (2)$$

wenn wir jene Abstände durch P und P' bezeichnen. Soll der Punct (y', x') von beiden Geraden gleich weit abstehen, so erhalten wir eine Bedingungs-Gleichung zwischen den Coordinaten desselben, und, indem wir diese als veränderliche Gröfsen betrachten, die Gleichung für den geometrischen Ort aller Puncte, die jene Bedingung erfüllen. Berücksichtigen wir die verschiedenen Zeichen von P und P', so bekommen wir bei Hinweglassung der Accente folgende doppelte Gleichung:

$$(y - ax - b) \cos \alpha = \pm (y - a'x - b') \cos \alpha', \quad (3)$$

wodurch also eine zwiefache gerade Linie angezeigt wird. Da $a = tang\, \alpha$ und $a' = tang\, \alpha'$, so reducirt sich die letzte Gleichung auf folgende:

$$y (\cos \alpha \mp \cos \alpha') = x (\sin \alpha \mp \sin \alpha') + b \cos \alpha \mp b' \cos \alpha',$$

und diese wiederum, da

$$\frac{\sin \alpha - \sin \alpha'}{\cos \alpha - \cos \alpha'} = - cotg.\, \tfrac{1}{2} (\alpha + \alpha'), \quad \frac{\sin \alpha + \sin \alpha'}{\cos \alpha + \cos \alpha'} = tang\, \tfrac{1}{2} (\alpha + \alpha'),$$

zerfällt in folgende beide Gleichungen:

$$\begin{aligned} y &= - x\, cotg.\, \tfrac{1}{2} (\alpha + \alpha') + \frac{b \cos \alpha - b' \cos \alpha'}{\cos \alpha - \cos \alpha'}, \\ y &= x\, tang\, \tfrac{1}{2} (\alpha + \alpha') + \frac{b \cos \alpha + b' \cos \alpha'}{\cos \alpha + \cos \alpha'}. \end{aligned} \quad (4)$$

Aus der Form der Coefficienten von x ist ersichtlich, dafs beide gerade Linien auf einander senkrecht stehen, und die Winkel, welche am Durchschnitte der beiden gegebenen geraden Linien entstehen, halbiren.

33. Die erste der letztern Gleichungen (4) scheint sich auf den ersten Blick nach der Anlage der Rechnung auf die Einführung der Werthe von P und P' mit gleichem Zeichen zu beziehen, während die letzte dieser Gleichungen einem entgegengesetzten Zeichen entspricht. Jedoch ist leicht ersichtlich, dafs, wenn wir keine Beschränkung machen, diese Beziehung nur illusorisch ist. Den Winkel nämlich, den die erste der gegebenen geraden Linien (1) mit der Axe der x bildet, haben wir durch α bezeichnet, statt dieses Winkels können wir aber mit gleichem Rechte auch $(\alpha + \pi)$ nehmen. Alsdann aber, weil:

$$\begin{aligned} \cos (\alpha + \pi) &= - \cos \alpha, \\ tang\, \tfrac{1}{2} (\alpha + \alpha' + \pi) &= - cotg.\, \tfrac{1}{2} (\alpha + \alpha'), \end{aligned}$$

geht die eine der Gleichungen (4) in die andere über, und früher schon in der Gleichung (3) verwechseln sich die Zeichen. Wir sind also zu dem Schlusse berechtigt,

dafs wir nicht ohne Weiteres bestimmen können, für welche der beiden Winkel-halbirenden Linien wir P und P′ mit gleichem oder entgegengesetztem Zeichen nehmen müssen, so lange wir nicht für die Winkel, welche die gegebenen geraden Linien mit der ersten Axe bilden, also für α, α' u. s. w. stets solche Winkel nur nehmen, die kleiner sind als π. In dieser Voraussetzung aber bildet die gerade Linie, welche durch die erste der Gleichungen (4) dargestellt wird, und welche sich auf gleichnamige Zeichen der Ausdrücke für P und P′ bezieht, mit der Axe der x einen Winkel, der nicht zwischen α und α' fällt, wobei sich von selbst versteht, dafs wir diese Winkel von der positiven Seite der x an rechnen. Die durch die zweite der Gleichungen (4) bezeichnete Gerade halbirt denjenigen Winkel am Durchschnitte der gegebenen geraden Linien, der durch den Unterschied der Winkel α und α' gegeben ist.

Diese Bestimmungen sind mit denjenigen der vorigen Nummer in Uebereinstimmung und erscheinen als eine Folge derselben. Die Construction der folgenden Sätze wird hier keine Ungewifsheit mehr übrig lassen.

34. Nachdem wir über diesen Punct in ein ausführlicheres Detail eingegangen sind, können wir nun ohne alle Rechnung eine Reihe von Sätzen fast unmittelbar aus der Form der oben entwickelten Ausdrücke lesen. Wir wollen zu diesem Behufe mit den beiden geraden Linien (1), die wir in der 32. Nummer betrachtet haben, noch eine dritte gerade Linie zusammenstellen, und als deren Gleichung folgende nehmen:

$$y = a''x + b''.$$

Den Winkel, welchen dieselbe mit der ersten Axe bildet, wollen wir durch α'' bezeichnen; alsdann ist der Abstand eines Punctes (y', x') von dieser Linie, den wir entsprechend P″ nennen, durch folgende Gleichung gegeben:

$$P'' = \pm (y' - a''x' - b'')\, \cos \alpha''.$$

Bezeichnen wir ferner, der Kürze halber

$$\begin{aligned} &\pm (y - ax - b)\cos\alpha \text{ durch } \pm A, \\ &\pm (y - a'x - b')\cos\alpha' \quad ,, \quad \pm A', \\ &\pm (y - a''x - b'')\cos\alpha'' \quad ,, \quad \pm A'', \end{aligned}$$

so erhalten wir nach der 32. Nummer:

$$A = \pm A', \quad A' = \pm A'' \quad A = \pm A'', \qquad (5)$$

für die Gleichungen derjenigen sechs geraden Linien, die die Winkel halbiren, welche an den Durchschnitten der ersten und zweiten, zweiten und dritten, ersten und dritten der gegebenen geraden Linien entstehen. Es ist aber ersichtlich, dafs, welches Zeichen wir in den ersten Gleichungen auch wählen mögen, wir durch Abziehen dieser beiden Gleichungen von einander, immer zu einer Gleichung kommen, die in der dritten begriffen ist. Diefs führt zu folgendem Schema:

$$\begin{array}{lll} A = A', & A' = A'', & A = A''; \\ A = -A', & A' = -A'', & A = A''; \\ A = A', & A' = -A'', & A = -A''; \quad (6) \\ A = -A', & A' = A'', & A = -A''; \end{array}$$

wo wir in jeder Reihe die dritte Gleichung durch Subtraction der beiden ersten erhalten. Da aus diesem Grunde nun die Elimination von y und x zwischen den beiden ersten Gleichungen, dasselbe Resultat geben mufs, als die Elimination von y und x zwischen

einer derselben und der dritten Gleichung, so schneiden sich alle drei geraden Linien, deren Gleichungen wir in dieselbe Reihe zusammengestellt haben, in einem und demselben Puncte. Solcher Puncte gibt es mithin, wenn drei gerade Linien gegeben sind, vier; unter welchen sich auch derjenige Punct befindet, in welchem die drei geraden Linien, welche die Winkel des durch die gegebenen Geraden gebildeten Dreiecks halbiren, sich kreuzen. Den am Ende der vorigen Nummer wegen der Zeichen gemachten Bemerkungen gemäfs, sind, für den Fall der 8. Figur, diese vier Puncte nach der Ordnung unseres Schema's folgende: O, O′, O″, und O‴. Fig. 8.

35. Aus dem Schema der letzten Gleichungen (6) ist sogleich ersichtlich, dafs auf jeder der halbirenden geraden Linien zwei der obigen vier Durchschnitts-Puncte liegen. So liegt z. B. der erste und letzte Punct auf der durch:

$$A' = A''$$

dargestellten geraden Linie, weil diese Gleichung sowol in der ersten als in der vierten Reihe jenes Schema's vorkommt, der zweite und dritte Punct aber liegen beide auf der Geraden:

$$A' = -A''.$$

Diese beiden geraden Linien aber, von denen die erste die Puncte O und O‴, die zweite die Puncte O′ und O″ enthält, sind in der 8. Figur diejenigen, welche die am Durchschnitte C der beiden Geraden A′B′ und A″B″ entstehenden Winkel halbiren und also auch durch C gehen. Den hierin enthaltenen Satz können wir in folgende Aussage einkleiden:

Wenn wir die Basis-Winkel eines beliebigen Dreiecks und die Neben-Winkel derselben durch gerade Linien halbiren, so schneiden sich diese vier Linien noch in vier Puncten, von denen zwei und zwei mit der Spitze des Dreiecks in gerader Linie liegen.

36. Die letzten Entwicklungen sind noch einer Erweiterung fähig. Aehnlich wie wir oben den geometrischen Ort aller Puncte bestimmt haben, die von zweien gegebenen geraden Linien gleichweit abstehen, erhalten wir auch mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung, die Gleichung:

$$(y - ax - b)\cos\alpha = \pm\,\mu\,(y - a'x - b')\cos\alpha' \qquad (7)$$

für den Ort aller Puncte, deren Abstand von der ersten zum Abstand von der zweiten geraden Linie sich wie $1 : \frac{1}{\mu}$ verhält.

Die durch die letzte Gleichung (7) dargestellte gerade Linie ist leicht zu construiren; denn da sie durch den Durchschnitts-Punct der beiden gegebenen geraden Linien geht, so bedürfen wir aufserdem nur noch eines Punctes zur Construction derselben. Einen solchen Punct bestimmt aber der Durchschnitt irgend zweier der gegebenen parallelen, geraden Linien, deren Abstände von diesen das verlangte Verhältnifs haben; oder was hiermit übereinkommt, die auf den gegebenen Geraden Segmente bestimmen, die in jenem Verhältnisse $1 : \frac{1}{\mu}$ stehen. Diese Construction gibt die beiden Linien, welche dem doppelten Zeichen der letzten Gleichung entsprechen. Ist eine dieser Linien gegeben, so bestimmt sich die andere sogleich. Seyen AB und AB′ die beiden gegebenen Geraden, und Fig. 9.
AC, welche ebenfalls gegeben ist, entspreche der Gleichung:

$$(y - ax - b)\cos\alpha = \mu\,(y - a'x - b')\cos\alpha'; \qquad (8)$$

alsdann braucht man nur irgend eine gerade Linie einer der gegebenen, etwa der AB,

parallel zu ziehen, auf dieser Linie δ so zu bestimmen, daſs $Q\delta = QD$, und endlich durch δ die gerade Linie $A\gamma$ zu legen. Diese Linie ist die gesuchte, deren Gleichung ist:

$$(y - ax - b)\cos\alpha = -\mu(y - a'x - b')\cos\alpha'. \quad (9)$$

Es waltet hier dieselbe Zweideutigkeit darüber ob, welche von den beiden Gleichungen (8) und (9) wir für die eine oder andere der fraglichen Linien nehmen sollen. Ohne hier in Entwicklungen, die denen der 32. Nummer ähnlich sind, einzugehen, ist klar, daſs wir überhaupt dieselbe Annahme machen können, als in dem Falle wo μ gleich Eins ist; daſs wir also die Winkel α, α' u. s. w. nur bis π wachsen lassen und alsdann für die Gleichung (9) diejenige Linie nehmen, welche mit der ersten Axe einen Winkel bildet, der zwischen α und α' fällt; für die Gleichung (8) hingegen die andere Linie.

Wenn wir die beiden gegebenen geraden Linien AB und AB' zu Coordinaten-Axen nehmen, so ergeben sich aus der Construction für die beiden Gleichungen (8) und (9) Ausdrücke von folgender Form:

$$y = Xx, \quad y = X'x = -Xx,$$

so daſs

$$A \pm A' = 0.$$

Eine leichte analytische Betrachtung hätte zu demselben Resultate geführt.

37. Wir wollen nun wieder drei gerade Linien zusammenstellen, und uns dabei der Abkürzungen der 34. Nummer bedienen. Die beiden Gleichungen:

$$A = \pm\mu A' \qquad A = \pm\nu A''$$

bedingen folgende dritte Gleichung:

$$\mu A' = \pm\nu A''.$$

Die, durch diese Gleichungen dargestellten, leicht zu constituirenden geraden Linien schneiden sich also in demselben Puncte. Wir bekommen durch Verbindung zweier beliebiger jener Gleichungen die Coordinaten solcher Puncte, deren Abstände von den gegebenen Geraden sich verhalten, wie

$$1 : \frac{1}{\mu} : \frac{1}{\nu}.$$

Dieser Puncte erhalten wir vier, nach einem Schema, das dem der 34. Nummer durchaus ähnlich ist, indem wir bloſs A' mit $\mu A'$ und A'' mit $\nu A''$ vertauschen.

Fig 10. Wir wollen diese vier Puncte, in derselben Ordnung als früher genommen, wiederum durch O, O', O'' und O''' bezeichnen; alsdann gibt die 10. Figur, die der 8. ganz analog ist, die bezügliche Construction. Wir können bemerken, daſs durch die Annahme irgend eines der vier Puncte die Coefficienten μ und ν bestimmt sind, und mithin die drei übrigen Puncte sich durch eine leichte Construction ergeben. Auf ähnliche Weise wie in der 35. Nummer ergibt sich, daſs diese vier Puncte, paarweise genommen (was auf dreifache Art geschehen kann) jedesmal mit einem der Winkel-Puncte des durch den Durchschnitt der gegebenen geraden Linien gebildeten Dreiecks CC'C'' in gerader Linie liegen. Nehmen wir nun einen der Puncte, etwa den innerhalb liegenden beliebig an, bestimmen also zwei Gerade, deren Gleichungen von der Form der Gleichung (7) sind, so gibt die Construction der vorigen Nummer folgenden Satz:

Wenn man auf einer von zweien Parallelen zwei Puncte (C'', C') beliebig annimmt, und durch jeden derselben drei gerade Linien so zieht, daſs die mittlere derselben das beidesmalige Segment, welches die beiden äuſsern auf der andern Parallelen bestimmen, halbirt (sp = sp', rq = rq'), so schneiden sich die vier äuſsern Linien in vier Punc-

ten (O' und O'', O und O''') die, paarweise genommen, mit dem Durchschnitte (C) der beiden innern in einer geraden Linie liegen.

Durch Umkehrung erhalten wir einen Satz, dem wir folgende Aussage geben können: *Wenn man in einem vollständigen Vierecke durch den Durchschnitt zweier Diagonalen (OO''', O'O'') nach den Puncten (C', C''), welche die dritte Diagonale verbindet, gerade Linien zieht, so halbiren diese die beiden Segmente (pp', qq') jeder beliebigen der letztgenannten Diagonale parallelen geraden Linie, welche zwischen den Seiten des Vierecks liegen, die in jenen Puncten (C' C'') sich vereinigen.* *)

38. Wir haben bis jetzt nur den geometrischen Ort für solche Puncte bestimmt, zwischen deren Abständen von zweien gegebenen geraden Linien ein gegebenes Verhältnifs Statt findet. Wir können aber auch statt zweier gegebenen geraden Linien mehrere betrachten, und nach dem Orte für solche Puncte fragen, zwischen deren Abständen von diesen Linien irgend eine Beziehung Statt findet. Wir wollen zunächst drei gerade Linien betrachten, und wiederum für dieselben folgende Gleichungen nehmen:

$$y = ax + b,$$
$$y = a'x + b',$$
$$y = a''x + b''.$$

Bezeichnen wir die bezüglichen Perpendikel durch P, P' und P'', so gibt es unzählige Puncte, für welche:

$$P + P' = P''$$

d. h. für welche die Summe der Abstände von den beiden ersten geraden Linien dem Abstande von der dritten gleich ist. Bei den früher gebrauchten Abkürzungen erhalten wir für den Ort aller jener Puncte:

$$\pm A \pm A' = \pm A'',$$

welche Gleichung in folgende vier verschiedene sich auflöset:

$$\left.\begin{aligned} A + A' + A'' &= o, \\ A + A' - A'' &= o, \\ A - A' + A'' &= o, \\ -A + A' + A'' &= o; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

und jede dieser Gleichungen drückt eine besondere gerade Linie aus.

Wir wären gerade zu demselben Schema der letzten Gleichungen gekommen, wenn wir die Bestimmung gemacht hätten, dafs nicht der Abstand der Puncte von der dritten gegebenen geraden Linie, sondern von der ersten oder zweiten gleich seyn sollte der Summe der Abstände von den jedesmal übrig bleibenden beiden Geraden. Die Folge davon ist, dafs keine jener Gleichungen sich ausschliefslich auf einen der drei besondern Fälle bezieht, sondern dafs diese vielmehr sich in den analytischen Formen nicht trennen lassen. Diefs geometrisch gedeutet heifst: wenn man für verschiedene Puncte des geometrischen Ortes die drei Perpendikel construirt, so ist, nach der Bestimmung des Punctes bald das eine, bald das andere Perpendikel gleich der Summe der beiden übrigen.

*) Französische Mathematiker nennen *quadrilatère complet* (nicht ganz schicklich durch „vollständiges Viereck" übersetzt) diejenige Figur, welche entsteht, wenn man die gegenüberliegenden Seiten eines gewöhnlichen Vierecks (*quadrilatère simple*) bis zu ihrem Durchschnitte verlängert. Die gerade Linie, welche die beiden so entstehenden Winkel-Puncte verbindet, ist eine neue Diagonale.

Wir können die verschiedenen Gleichungen (1) auf eine elegante Weise construiren und diese Constructions-Art läfst uns sogleich in jenen Gleichungen selbst geometrische Sätze erkennen. Wir kommen hierauf zurück nach einigen allgemeinen Erörterungen.

39. Wenn die Gleichungen zweier geraden Linien:

$$y = a x + b,$$
$$y = a' x + b',$$

zugleich Statt finden sollen, so bezeichnen sie einen Punct, der beiden Linien gemeinschaftlich ist, mithin den Durchschnitt derselben. Wir finden also die Coordinaten dieses Punctes, wenn wir zwischen den beiden Gleichungen die Werthe von y und x eliminiren. Soll eine dritte gerade Linie durch denselben Punct gehen, so mufs offenbar ihre Gleichung zusammengestellt mit jeder der beiden erstern Gleichungen dieselben Werthe für y und x geben, oder mit andern Worten, die dritte Gleichung mufs eine Folge der beiden erstern seyn: wir müssen dieselbe erhalten können, wenn wir auf irgend eine Weise die obigen Gleichungen durch algebraische Operationen verbinden, und die Art der Verbindung ist genauer dadurch bezeichnet, dafs wir wieder zu der Gleichung einer geraden Linie, zu einer Gleichung vom ersten Grade kommen müssen. Wir erhalten die allgemeine Form der Gleichungen vom ersten Grade, die durch Verbindung der beiden gegebenen Gleichungen entstehen, wenn wir jede derselben mit einem unbestimmten Coefficienten multipliciren, und dann die Summe derselben nehmen. Diese Coefficienten, für welche sowol negative als positive Gröfsen zu nehmen sind, seyen m und m'; alsdann kommt:

$$(m + m')y = (ma + m'a')x + (mb + m'b')$$

für die allgemeine Gleichung aller geraden Linien, welche durch den Durchschnitt der beiden gegebenen gehen, so dafs sich für eine besondere Annahme von m und m' die Gleichung einer bestimmten dieser geraden Linien ergibt. Die letzte Gleichung büfst nichts von ihrer Allgemeinheit ein, wenn wir alle Glieder durch m dividiren, alsdann kommt, wenn wir μ statt $\frac{m'}{m}$ schreiben:

$$(1 + \mu)y = (a + \mu a')x + (b + \mu b'),$$

woraus dann ersichtlich ist, dafs wir für unsre Absicht, unbeschadet der Allgemeinheit, die beiden gegebenen Gleichungen (1) addiren können, nachdem wir blofs eine derselben (etwa die zweite) mit einem unbestimmten Coefficienten μ multiplicirt haben. Wir können der letzten Gleichung endlich noch folgende Form geben:

$$y = \frac{a + \mu a'}{1 + \mu} x + \frac{b + \mu b'}{1 + \mu}.$$

40. Wenn also drei gerade Linien durch einen und denselben Punct gehen, so ist aus den letzten Entwickelungen offenbar, dafs es nur von einem schicklichen Factor μ abhängt, mit dem man die Gleichung einer jener Linien multipliciren mufs, damit dieselbe unmittelbar aus den beiden übrigen Gleichungen durch Addition oder Subtraction sich ergebe. Diefs führt uns zu folgendem Schema. Wir wollen

$$Ay + Bx + C = 0 \qquad (1)$$

für die Gleichung irgend einer geraden Linie nehmen. Wir können dieser Gleichung eine andere Form geben, ohne sie selbst im mindesten zu verändern, wenn wir jedes Glied derselben, beliebig wie, in zwei Theile theilen, z. B. Ax in ax und αx und einen

dieser Theile auf die andere Seite hinüberbringen. Auf diese Weise erhalten wir statt der gegebenen Gleichung die ihr identische:

$$\alpha y + \beta x + \gamma = -(ay + bx + c), \qquad (2)$$

wo denn nach der Voraussetzung folgende Bedingungs-Gleichungen Statt finden:

$$A = a + \alpha, \quad B = b + \beta, \quad C = c + \gamma.$$

Jeder Theil der Gleichung (2), für sich allein gleich Null gesetzt, stellt aber eine neue gerade Linie dar:

$$\alpha y + \beta x + \gamma = o,$$
$$ay + bx + c = o. \qquad (3)$$

Addiren wir diese beiden Gleichungen, so werden wir zurückgeführt auf die Gleichungen (2) oder (1). Es schneiden sich also die beiden geraden Linien (3) auf der durch die Gleichung (1) gegebenen.

Wir erhalten alle möglichen Paare gerader Linien, welche sich auf einer gegebenen schneiden, wenn wir verschiedentlich die Gleichung derselben auf die oben angezeigte Weise in zwei Gleichungen zerlegen.

Wir werden fernerhin sehen, wie dasselbe Schema, das sich so natürlich und einfach darbietet, auf die allgemeine Gleichung des zweiten Grades übertragen, unmittelbar zu einer Reihe von Resultaten führt. Deshalb machen wir hier schon, wo es sich am leichtesten darstellt, darauf aufmerksam.

Aus dem Vorigen folgt ferner unmittelbar, dafs wir einen Punct der durch die Gleichung (1) dargestellten geraden Linie finden, wenn wir diese Gleichung irgendwie auf die Form der Gleichung (2) bringen, jeden Theil derselben gleich Null setzen, und den Durchschnitt der durch diese neuen Gleichungen dargestellten geraden Linien construiren. Suchen wir auf dieselbe Weise einen zweiten solchen Punct, so ist die Gerade (1) bestimmt. In gewissen Fällen wird diese Construction sehr elegant.

41. Hiermit kommt die Construction der linearen Gleichungen, die H. Gergonne mehrere Male anwendet, überein. Oft führt nehmlich die Elimination zu Gleichungen unter der Form (2); setzt man alsdann jeden Theil derselben für sich einer und derselben beliebigen Constanten gleich

$$\alpha y + \beta x + \gamma = M,$$
$$-(ay + bx + c) = M, \qquad (4)$$

und construirt die beiden durch diese Gleichungen dargestellten Geraden, so gibt der Durchschnitt derselben einen Punct der zu construirenden geraden Linie. Ein zweiter Punct ergibt sich, wenn statt M irgend eine andere Constante gewählt wird. Man sieht leicht ein, dafs die verschiedene Bestimmung der Constanten einer verschiedenen Zerlegung der Gleichung (1) entspricht, dafs aber die Verschiedenheit der Zerlegung sich blofs auf die Zerlegung von C erstreckt, und dafs mithin die bezüglichen Geraden der verschiedenen Linien-Paare alle unter sich parallel sind.

Wir können nemlich die Gleichungen (4) folgendermafsen schreiben

$$\alpha y + \beta x + (\gamma - M) = o,$$
$$ay + bx + (c + M) = o,$$

und so fällt in die Augen, dafs, wie wir auch M bestimmen mögen, die Summe der Constanten in diesen beiden Gleichungen der Constanten C gleich ist, dafs

$$(\gamma - M) + (c + M) = \gamma + c = C.$$

42. Wir können aber auch geradezu, wie H. Gergonne es thut, die angezeigte Constructions-Art der linearen Gleichung (2) rechtfertigen. Denn um die Coordinaten irgend

eines Punctes, der, durch dieselbe dargestellten, geraden Linie zu finden, genügt es, y und x so zu bestimmen, dafs durch diese Werthe jene Gleichung befriedigt wird. Setzen wir nun jeden ihrer Theile derselben Constanten gleich, so geschieht dieser Gleichung Genüge, und wir erhalten zugleich die beiden Gleichungen (4) zur vollständigen Bestimmung von y und x. Statt aber die Werthe der so bezeichneten Coordinaten durch Elimination zu bestimmen, und dann zu construiren, können wir die beiden durch (4) dargestellten Geraden construiren; der Durchschnitt dieser beiden Geraden gibt alsdann den gesuchten Punct. Wir werden im folgenden Abschnitte Gelegenheit haben, hierauf zurück zu kommen.

43. Um zuerst an einem ganz einfachen Beispiele die Anwendung des Vorigen zu zeigen, eine Anwendung, auf welche wir sehr häufig zurückkommen werden, nehmen wir die in dem Frühern vorgekommene Gleichung:

$$(y - ax - b)\cos\alpha = \pm (y - a'x - b')\cos\alpha'. \quad (1)$$

Setzen wir beide Theile dieser Gleichung für sich gleich Null, so kommt, wenn wir in dem ersten den constanten Coefficienten $\cos\alpha$, in dem zweiten $\cos\alpha'$ fortlassen:

$$\begin{aligned} y - ax - b &= o, \\ y - a'x - b' &= o. \end{aligned} \quad (2)$$

Die durch (1) dargestellte gerade Linie geht also durch den Durchschnitt der beiden durch (2) dargestellten, wie diefs sich auch a priori aus der Art, wie die erste Gleichung gebildet worden, ergibt.

44. Nun kehren wir zur Construction der Gleichungen (1) der 38. Nummer zurück und wollen zunächst die erste derselben betrachten:

$$A + A' + A'' = o. \quad (1)$$

Hat man zugleich die beiden Gleichungen:

$$A = o, \quad A' + A'' = o, \quad (2)$$

so wird offenbar die Gleichung (1) befriedigt; jede der letztern Gleichungen aber bezeichnet eine gerade Linie, die erste derselben, oder

$$y - ax - b = o$$

Fig. 11. ist die Gleichung der ersten der drei gegebenen geraden Linien ($C''C'$); die zweite der Gleichungen (2) oder

$$(y - a'x - b')\cos\alpha' + (y - a''x - b'')\cos\alpha'' = o$$

ist die Gleichung derjenigen geraden Linie CS, welche den gegenüberliegenden Winkel in dem, durch die drei gegebenen Geraden gebildeten, Dreieck $CC'C''$ halbirt. Der Durchschnitt (S) der ersten gegebenen Geraden mit dieser Linie ist mithin ein Punct, welcher der Gleichung (1) entspricht.

Auf ähnliche Weise finden wir noch zwei solcher Puncte S′ und S″, wenn wir den Durchschnitt der geraden Linien:

$$\begin{aligned} A' = o \quad &\text{und} \quad A + A'' = o, \\ A'' = o \quad &\;\;\text{„} \quad\;\; A + A' = o, \end{aligned}$$

suchen. Zwei dieser Puncte reichen zur Construction der Gleichung (1) hin.*)

Behandeln wir die Gleichung

$$A + A' - A'' = o$$

*) Zur besondern Bestimmung jeder der beiden geraden Linien, welche die, am Durchschnitte von zwei der gegebenen Geraden entstehenden, Winkel halbiren, nehmen wir hier und in dem Folgenden an, die erste Axe sey der ersten der gegebenen geraden Linien

auf dieselbe Weise als die Gleichung (1), so finden wir drei Puncte der bezüglichen Linie $\sigma\sigma'S''$, wenn wir die Durchschnitte der durch die drei Paare von Gleichungen:

$$A = o \quad A' - A'' = o,$$
$$A' = o \quad A - A'' = o,$$
$$A'' = o \quad A + A' = o,$$

dargestellten geraden Linien construiren.

Der dritten Gleichung:

$$A - A' + A'' = o$$

entsprechen die Puncte σ, S', σ''; und der vierten Gleichung:

$$- A + A' + A'' = o$$

die Puncte S, σ', σ''.

Wenn wir diese einzelnen Fälle zusammenfassen, so haben wir also folgenden Satz:

Wenn man in einem beliebigen Dreiecke irgend zwei Winkel und den gegenüberliegenden Aussen-Winkel, oder wenn man alle Aussen-Winkel desselben durch gerade Linien halbirt, so liegen die Durchschnitts-Puncte dieser Halbirungs-Linien mit den, den bezüglichen halbirten Winkeln gegenüberliegenden, Seiten des Dreiecks jedesmal in gerader Linie. Auf diese Weise erhält man vier gerade Linien. Fällt man von irgend einem Puncte derselben Perpendikel auf die drei Seiten des Dreiecks, oder ihre Verlängerungen, so ist jedesmal die Summe zweier solcher Perpendikel dem dritten gleich.

Bei unserer Annahme der Coordinaten beziehen sich die Gleichungen:

$$A + A' + A'' = o,$$
$$A + A' - A'' = o,$$
$$- A + A' + A'' = o,$$

auf den ersten Fall des ersten Theiles dieses Satzes, und die Gleichung:

$$A - A' + A'' = o$$

auf den zweiten Fall. Dieser letztere Fall ist in den Annalen von Gergonne*) synthetisch bewiesen; nur werden die, die Aussen-Winkel halbirenden, geraden Linien in der Aussage als solche bezeichnet, die auf den andern geraden Linien, welche die Innen-Winkel des Dreiecks halbiren, senkrecht stehen.

45. Wir gehen zur Verallgemeinerung des, in der vorigen Nummer bewiesenen, Satzes über, und behandeln, wie wir dort die Gleichung

$$\pm A \pm A' \pm A'' = o$$

behandelt haben, nun gerade auf dieselbe Weise folgende Gleichung:

$$\pm A \pm \mu A' \pm \nu A'' = o, \qquad (1)$$

wo wir durch μ und ν beliebige constante Coefficienten bezeichnen. Diese Gleichung stellt, wenn wir, wie früher, die Vorzeichen berücksichtigen, vier verschiedene gerade Linien

parallel, behalten aber, der Symmetrie wegen, die allgemeine Form der Gleichung dieser Linie bei. Uebrigens unterscheiden wir die beiden Halbirungs-Linien nach der 33. Nummer. In der Figur haben wir die Puncte, welche auf Halbirungs-Linien liegen, deren Gleichung von der Form $A + A' = o$ ist, durch lateinische Buchstaben S, S', S'' bezeichnet, die Puncte aber, welche auf denjenigen Halbirungs-Linien liegen, deren Gleichung die Form $A - A' = o$ hat, durch griechische Buchstaben $\sigma, \sigma', \sigma''$.

*) Annales de mathématiques pures et appliquées par Gergonne. Tome X. p. 202.

dar. Wenn wir von irgend einem Puncte, der auf einer derselben liegt, Perpendikel auf die drei gegebenen geraden Linien fällen, und aus jedem derselben und den durch m, μm und νm (wo wir für m, wie in obiger Gleichung, die Linien-Einheit nehmen können) dargestellten Linien Rechtecke bilden, so ist die Summe zweier derselben immer dem dritten gleich; wo auch der Punct angenommen werden mag.

Nehmen wir $m = \frac{1}{\sin \gamma}$, $\mu m = \frac{1}{\sin \gamma'}$, und $\nu m = \frac{1}{\sin \gamma''}$, so geht die Gleichung (1) über in folgende:

$$\pm \frac{A}{\sin \gamma} \pm \frac{A'}{\sin \gamma'} \pm \frac{A''}{\sin \gamma''} = 0,$$

in eine Gleichung, die wir nach der 28. Nummer zu deuten wissen.

Alle Puncte also, von denen man an jede von drei gegebenen geraden Linien unter einem beliebigen aber constanten Winkel (γ, γ' und γ'') gerade Linien ziehen kann, so daſs die Summen irgend zweier derselben der dritten gleich sind, liegen auf vier neuen geraden Linien vertheilt.

46. Wir können die Gleichung

$$A + \mu A' + \nu A'' = 0, \qquad (2)$$

die wir, um ein bestimmtes Beispiel zu haben, von der Gleichung (1) absondern, ähnlich wie früher construiren. Wir finden sogleich drei Puncte derselben durch den Durchschnitt folgender, paarweise zusammengestellter, gerader Linien:

$$A = 0, \quad \mu A' + \nu A'' = 0;$$
$$A' = 0, \quad A + \nu A'' = 0;$$
$$A'' = 0, \quad A + \mu A' = 0;$$

Fig. 12. Die ersten Linien jedes Paares sind wieder keine andere als die gegebenen geraden Linien selbst, die andern drei Linien aber sind, wenn μ und ν gegeben sind, leicht zu construiren, und überdieſs bestimmen zwei derselben die dritte. Für die erste und dritte derselben z. B., durch deren beliebige Annahme μ und ν als gegeben zu betrachten sind, wollen wir, den frühern Bemerkungen rücksichtlich der Zeichen gemäſs, in unserer Figur CO′ und C″O′ nehmen; alsdann ist C′O′ durch die Gleichung:

$$A - \nu A'' = 0$$

gegeben, mithin (36) die, durch die obige Gleichung des zweiten Paares:

$$A + \nu A'' = 0$$

gegebene, gerade Linie leicht zu bestimmen. Hiermit ist also die Construction dreier Puncte S, S″ und S′ der in Rede stehenden geraden Linien (2) gegeben.

Fig. 13. Aehnlich ergeben sich für jede der drei andern in der Gleichung (1) begriffenen Gleichungen, drei Puncte. Die Zahl der verschiedenen Puncte, die wir im Ganzen erhalten, beläuft sich auf sechs, und diese sechs Puncte S, S′, S″, σ, σ', σ'' bilden ein vollständiges Viereck.

47. Um dem eben bewiesenen Satze eine bequemere Aussage zu geben, wollen wir dieselbe, wie wir es am Ende der 37. Nummer gethan haben, auf das vollständige Viereck C″OO″O‴C′O′ beziehen. Wir können alsdann die beiden Diagonalen des einfachen Vierecks OO‴ und O′O″, welche sich in C schneiden, und die beiden Paare gegenüberliegender Seiten desselben, als die durch obige Gleichungen:

$$\mu A' \pm \nu A'' = 0, \quad A \pm \mu A' = 0, \quad A \pm \nu A'' = 0,$$

dargestellte sechs gerade Linien nehmen, wobei wir C″C′, C″C und C′C als die drei gegebenen Geraden betrachten. Hieraus ergibt sich denn folgender Satz:

Wenn man in einer vollständigen vierseitigen Figur durch den Durchschnitt zweier Diagonalen und die beiden Puncte, welche die dritte Diagonale verbindet, zwei gerade Linien zieht, so bestimmt jede von diesen Linien noch zwei Durchschnitts-Puncte auf den Seiten des Vierecks, welche vier Puncte nebst den Durchschnitts-Puncten der beiden ersten Diagonalen mit der dritten, die sechs Winkel-Puncte einer neuen vollständigen vierseitigen Figur sind: so dafs man also viermal drei derselben zusammenstellen kann, die in gerader Linie liegen.

Der Anblick der Figur zeigt, dafs die Beziehung der beiden vollständigen Vierecke zu einander eine durchaus gegenseitige ist.

48. Wenn wir die drei, das Dreieck $CC'C''$ bildenden, geraden Linien wieder als ursprünglich gegeben betrachten, so gehören zur Construction unseres Satzes (zur Bestimmung von μ und ν) nur zwei obiger sechs Puncte S, S', S'', σ, σ' und σ'', die nicht auf derselben Dreiecksseite liegen. Wenn wir von jenen Puncten drei nehmen ($\sigma, \sigma', \sigma''$; S, σ', S''; S, S', σ'' oder σ, S', S'';), von denen einer auf jeder Seite des gegebenen Dreiecks oder deren Verlängerung liegt, so folgt unmittelbar aus der Construction, dafs, wenn man von diesen Puncten nach den gegenüberliegenden Spitzen des Dreiecks (C, C', C'') gerade Linien zieht, diese drei Linien sich in demselben Puncte (O, O', O'', O''',) durchsetzen. Hiernach haben wir denn folgenden Satz:

Wenn die Winkel-Puncte eines Dreiecks in die Seiten (oder deren Verlängerungen) eines andern Dreiecks fallen, und überdiefs diejenigen drei geraden Linien, welche die gegenüberliegenden Spitzen der beiden Dreiecke verbinden, sich in demselben Puncte kreuzen, so schneiden sich die, diesen Spitzen in beiden Dreiecken gegenüberliegenden, Seiten in dreien Puncten, welche in gerader Linie liegen.

49. Die nächstfolgenden Bemerkungen gestatten, die in Rede stehenden Constructionen noch auf eine andere Weise zu bezeichnen. Seyen $C''C'$ und $C''C$ die beiden ersten der gegebenen geraden Linien, und $C''S''$ und $C''\sigma''$ zwei andere, welche durch die beiden Gleichungen:

$$A = \mu A', \quad A = -\mu A',$$

wo wir für μ irgend eine beliebige Zahl nehmen, gegeben sind. Aus der Natur der beiden letzten Linien ergibt sich, wo wir auch S'' und σ'' nehmen mögen, zwischen den von S'' und σ'' auf die beiden ersten Geraden gefällten Perpendikeln folgende Beziehung: Fig. 14.

$$\frac{S''K}{S''L} = \frac{\sigma''\varkappa}{\sigma''\lambda},$$

also haben wir folgende Proportion:

$$\sigma''\lambda : S''L = \sigma''\varkappa : S''K,$$

woraus sich denn ferner ergibt, wenn wir die Figur ansehen:

$$\sigma''C : CS'' = \sigma''C' : S''C'.$$

Die als beliebig zu betrachtende gerade Linie $\sigma''C'$ ist also durch die vier geraden Linien, welche von C'' ausgehen, harmonisch getheilt; d. h. der eine äufsere Abschnitt verhält sich zum mittlern Stücke, wie die ganze Linie zum andern äufsern Abschnitte.

In Fig. 13 ist hiernach jede der drei gegebenen geraden Linien harmonisch getheilt, nemlich $C''C'$ in S und σ; $C''C$ in S' und σ', endlich CC' in S'' und σ''. Fig. 13.

50. An die 47. Nummer schliefst sich also folgender bekannte Satz: Fig. 15.

Zwei Diagonalen eines vollständigen Vierecks (OO''', $O'O''$) theilen die dritte Diagonale ($C''C'$) harmonisch.

51. In der Construction der 13. Figur schneiden sich sowol die beiden geraden Linien $\sigma''S'$ und $\sigma'S''$, als die beiden andern $\sigma''\sigma'$ und $S''S'$ auf der geraden Linie $C''C'$. Diefs wird dadurch bedingt, dafs $C''C$ und $C'C$ harmonisch getheilt sind, und in einem entsprechenden Theilungs-Puncte sich schneiden.

Wir verweilen nicht länger bei diesem Satze, noch bei andern Sätzen, die mit denselben verwandt sind; es genügt uns darauf aufmerksam gemacht zu haben, wie die Theorie der harmonischen Theilung, die in der neuern Behandlung der Geometrie von so grofser Bedeutung ist, sich an die analytischen Formen, mit denen wir uns in den letzten Nummern beschäftigt haben, unmittelbar anschliefst. Wir können dieselbe als eine synthetische Umschreibung jener Formen betrachten und wir durchblicken hierin einigermafsen den Grund, warum sie so leichte Beweise liefert.

52. Wir wollen um diese Gruppe von Sätzen — die ganz unmittelbare Folgerungen aus der Form des Ausdruckes für den Abstand eines gegebenen Punctes von einer gegebenen geraden Linie sind — zu schliefsen, noch ein letztes Beispiel nehmen; wir wollen nemlich zu den drei gegebenen geraden Linien, die wir bisher genommen haben, noch eine vierte hinzufügen. Es sey

$$y = a'''x + b'''$$

die Gleichung derselben, und der Kürze wegen setzen wir wiederum

$$(y - a'''x - b''') \cos\alpha''' = A''',$$

wo α''' den Winkel bezeichnet, den die Gerade mit der ersten Axe bildet. Alsdann erhalten wir für den Ort solcher Puncte, für welche die Summe der Abstände von den beiden ersten gegebenen Geraden gleich ist der Summe der Abstände von den beiden übrigen, folgende Gleichung:

$$\pm A \pm A' = \pm A'' \pm A''',$$

welche in acht einzelne von einander verschiedene Gleichungen zerfällt:

$$\begin{aligned}
A + A' + A'' + A''' &= 0,\\
A + A' + A'' - A''' &= 0,\\
A + A' - A'' + A''' &= 0,\\
A - A' + A'' + A''' &= 0,\\
-A + A' + A'' + A''' &= 0,\\
A + A' - A'' - A''' &= 0,\\
A - A' - A'' + A''' &= 0,\\
A - A' + A'' - A''' &= 0.
\end{aligned}$$

Zu denselben acht Gleichungen wären wir gekommen, wenn wir von der Bedingung ausgegangen wären, dafs z. B. die Summen des zweiten und dritten Abstandes der Summe des ersten und vierten Abstandes, oder auch, dafs die Summe dreier beliebiger Abstände dem übrigen Abstande gleich seyn solle. Auf jeder der durch die letzten Gleichungen dargestellten acht geraden Linien liegen also diejenigen Puncte vertheilt, die zu den vier gegebenen Geraden die Beziehung haben, dafs entweder die Summe zweier Abstände gleich ist der Summe der beiden übrigen, wo wir auf drei verschiedene Weisen combiniren können, oder dafs die Summe von dreien Abständen dem vierten gleich ist, wo wir wiederum vier verschiedene Fälle erhalten, so dafs im Ganzen siebenerlei Bestimmungen Statt finden können.

Wir können diese Gleichungen nach der nun schon öfter angewandten Methode construiren, indem wir die Glieder jeder Gleichung in zwei Theile absondern, jeden dersel-

ben für sich gleich Null setzen, und die neuen so erhaltenen beiden Gleichungen construiren. Auf diese Weise gibt der Durchschnitt zweier Linien einen Punct derjenigen Linie, die wir bestimmen wollen. Es kommt hierbei Alles darauf an, dafs die Zerlegung uns zu Formen führe, in welchen wir bekannte Constructionen wiedererkennen. Wir erreichen dieses Ziel, indem wir immer zwei und zwei Glieder der zu construirenden Gleichung zusammennehmen. Als Beispiel mag die zweite obiger Gleichungen dienen:

$$A + A' + A'' - A''' = 0.$$

Wir erhalten drei Puncte der bezüglichen geraden Linie durch den Durchschnitt der einzelnen Linien, der durch die folgenden Gleichungen dargestellten drei Linien-Paare:

$$A + A' = 0, \quad A'' - A''' = 0;$$
$$A + A'' = 0, \quad A' - A''' = 0;$$
$$A - A''' = 0, \quad A' + A'' = 0.$$

Auf diese Weise sind also drei Puncte O, O', und O'' gegeben, welche in gerader Linie liegen. Jede der letztern Linien halbirt einen der durch den Durchschnitt der gegebenen Geraden gebildeten Winkel. Fig. 16.

Die ähnliche Construction der übrigen sieben Gleichungen gibt uns noch siebenmal drei Puncte, die in gerader Linie liegen.

Es ist jedoch hierbei zu bemerken, dafs die Zahl der verschiedenen Puncte, die wir auf diese Weise erhalten, nur zwölf beträgt, was sich leicht aus der Art, wie wir zur Bestimmung jener Puncte durch Combination der verschieden accentuirten A gekommen sind, ergibt.

Die geraden Linien, deren Construction wir eben angezeigt haben, sind also die gesuchten geometrischen Oerter für Puncte, zwischen deren Abständen von den vier gegebenen geraden Linien eine der angezeigten sieben Bestimmungen Statt findet. Wir sehen leicht *a priori* ein, dafs sich diese sieben einzelnen Fälle auf die Puncte der acht Segmente beziehen, die auf jedem jener Oerter durch die drei Constructions-Puncte, und die Durchschnitts-Puncte mit den gegebenen vier geraden Linien bestimmt werden. Es würde uns von unserm Zwecke zu weit abführen, wenn wir hier in eine detaillirte Discussion eingehen wollten. Die in Rede stehenden acht Segmente sind für den Fall des in der 16. Figur construirten Ortes: AB, BC, CO'', O''D, DE, EO, OO' und O'F. Die beiden äufsersten Segmente beziehen sich auf denselben Fall.

53. Diese Erörterungen sind noch einer gröfsern Ausdehnung fähig, besonders wenn man, wie wir es an frühern Beispielen gezeigt haben, die Construction aus verschiedenen Gesichts-Puncten betrachtet. Wir ziehen aber blofs aus den bisherigen Entwickelungen die nachstehenden allgemeinen Folgerungen:

Wenn n gerade Linien gegeben sind, so erhalten wir für den geometrischen Ort solcher Puncte, für welche die Summe der Abstände von (n — m) geraden Linien, welche wir beliebig unter den gegebenen nehmen, gleich ist der Summe der Abstände von den übrigen m Geraden, immer gerade Linien, oder bestimmter ausgedrückt, Segmente derselben. (Wir bezeichnen hierbei durch m eine beliebige ganze Zahl unter n.) Die Zahl dieser geraden Linien ist leicht zu bestimmen; man erhält dieselbe, indem man die Zahl der verschiedenen Gleichungen sucht, die in derjenigen enthalten sind, die man bekommt, wenn man das Aggregat aller Ausdrücke für die Abstände von den einzelnen geraden Linien, Ausdrücke, die wir oben durch die verschieden accentuirten A bezeichnet haben, nimmt und dabei jeden derselben mit dem doppelten Vorzeichen verbindet.

Bezeichnet n eine ungerade Zahl, so ist die Zahl der verschiedenen Gleichungen:

$$1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ \ 3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{1.\ 2.\ \ 3\ \ldots\ r}$$

wo r gleich zu nehmen ist $\frac{n-1}{2}$; bezeichnet aber n eine gerade Zahl, so ist r gleich $\frac{n}{2}$, alsdann müssen wir aber nur die Hälfte des letzten Gliedes der vorstehenden Reihe nehmen. Für die Summe dieser Reihe erhalten wir, n mag eine gerade oder ungerade Zahl seyn, immer 2^{n-1}. Es steigt also die Zahl der in Rede stehenden einzelnen geometrischen Oerter in geometrischer Progression.

54. Auch wenn n eine gröſsere Zahl bedeutet, können wir jeden der einzelnen linearen Oerter nach der frühern Methode construiren. Wir theilen nemlich die Gleichung desselben beliebig in zwei Theile und construiren die durch die beiden einzelnen Theile dargestellten Linien; der Durchschnitt derselben ist ein Punct der gesuchten. Um die beiden Theile zu construiren, theilen wir jeden derselben von Neuem in zwei Theile, und fahren so lange damit fort, bis wir zu zweitheiligen oder eintheiligen Gleichungen kommen, von welchen wir die erstern durch Winkel-Halbirung construiren können, und von welcher die letztern den gegebenen geraden Linien entsprechen.

Es ist offenbar, daſs wir jede beliebige der oben bestimmten Gleichungen, deren Gesammt-Zahl 2^{n-1} beträgt, z. B. diejenige, in welcher alle Glieder mit dem Zeichen + erscheinen, auf $2^{n-1}-1$ verschiedene Arten in zwei Theile zerlegen können. Wir erhalten also eben so viele Constructions-Puncte, unter denen sich auch die Durchschnitts-Puncte der zu construirenden Oerter mit der gegebenen geraden Linie befinden. Diese Puncte bestimmen auf der bezüglichen geraden Linie 2^{n-1} Segmente, von denen die beiden äuſsern nach einer Seite hin unbegränzt sind.

Den einzelnen Segmenten entsprechen die $2^{n-1}-1$ einzelnen Bestimmungen, welche die oben gemachte Bestimmung, daſs nemlich die Summe der Abstände von $(n-m)$ geraden Linien der Summe der Abstände von den übrigen m Geraden gleich ist, in sich begreift, wenn wir einmal jene $(n-m)$ geraden Linien auf verschiedene Weise unter den n gegebenen auswählen, und dann für m nach einander alle Werthe von 1 bis $(n-1)$ nehmen. Den beiden äuſsern und unbegränzten Segmenten wird immer dieselbe Bestimmung entsprechen.

Wir verweilen nicht bei den Modificationen, welche die letzten allgemeinen Erörterungen erleiden, wenn wir zuvor jeden der verschiedenen Abstände mit einem beliebigen Coefficienten multipliciren und dann Bestimmungen treffen, die den vorigen ähnlich sind.

55. In den folgenden Nummern, die noch für die Theorie der geraden Linie bestimmt sind, wollen wir die analytische Geometrie besonders zum Beweise solcher Sätze anwenden, die sich auf den gemeinsamen Durchschnitt dreier oder mehrerer gerader Linien in demselben Puncte und auf das Liegen dreier Puncte auf derselben geraden Linie, beziehen. In diesen Beweisen ist die Coordinaten-Methode einer groſsen Biegsamkeit fähig und namentlich ist die Wahl der Axen hier von Bedeutung. So sind wir bereits schon auf Beispiele gestoſsen, wie darin, daſs eine Gleichung durch Abziehen zweier andern von einander erhalten wird, der Beweis davon liegt, daſs die bezüglichen Geraden sich in demselben Puncte schneiden; andere Beispiele zeigten, wie aus der Construction einer linearen Gleichung, die unmittelbar durch die Form derselben angedeutet wurde, der Beweis sich führt, daſs drei, geometrisch bestimmte, Puncte in gerader Linie

liegen. Wir wollen nun zunächst allgemeine Schemata dieser Beweise entwickeln und dann Beispiele folgen lassen, bei deren Auswahl unser Haupt-Augenmerk auf den Vergleich der Methode gerichtet ist.

56. Seyen:

$$\begin{aligned} y &= \alpha x + \beta, \\ y &= a x + b, \qquad\qquad (1) \\ y &= A x + B, \end{aligned}$$

die Gleichungen dreier gerader Linien, die durch denselben Punct gehen. Wir haben (39) gesehen, daſs die allgemeine Form aller Gleichungen für solche gerade Linien, die durch den Durchschnitt der beiden ersten jener Linien gehen, folgende ist:

$$y = \frac{a + \mu\alpha}{1 + \mu} x + \frac{b + \mu\beta}{1 + \mu}. \qquad (2)$$

Da nun die dritte gegebene Gerade, der Voraussetzung gemäſs, durch den Durchschnitt der beiden erstern geht, so muſs μ in der letzten Gleichung so gewählt werden können, daſs

$$\frac{a + \mu\alpha}{1 + \mu} = A,$$

$$\frac{b + \mu\beta}{1 + \mu} = B.$$

Durch jede dieser Gleichungen können wir den ursprünglich als beliebig angenommenen Coefficienten μ bestimmen; sollen beide Gleichungen zugleich Statt finden, so gibt uns die Elimination von μ:

$$Ba - Ab + \beta A - B\alpha - \beta a + b\alpha = 0, \qquad (3)$$

oder wenn wir in Beziehung auf die Constanten der dritten gegebenen Geraden ordnen:

$$A(\beta - b) - B(\alpha - a) + b\alpha - \beta a = 0. \qquad (4)$$

Dieſs ist mithin die gesuchte Bedingungs-Gleichung zwischen den Constanten der drei Gleichungen (1), damit die bezüglichen Geraden sich in demselben Puncte schneiden. Diese Gleichung ist, wie zu erwarten stand, in Beziehung auf die entsprechenden Constanten der drei Gleichungen symmetrisch.

57. Wenn die Gleichungen der gegebenen Geraden unter folgenden Formen erscheinen:

$$\begin{aligned} p y + q x &= p q, \\ p' y + q' x &= p' q', \\ p'' y + q'' x &= p'' q'', \end{aligned}$$

so formen wir durch die gehörigen Substitutionen die Bedingungs-Gleichung (3) leicht in folgende um:

$$q' q'' p (p' - p'') + q q'' p' (p'' - p) + q q' p'' (p - p') = 0. \qquad (5)$$

58. Es seyen ferner:

$$\begin{aligned} y &= \alpha x + \beta, \\ y &= a x + b; \\ y &= \gamma x + \delta, \\ y &= c x + d; \\ y &= \varkappa x + \lambda, \\ y &= k x + l; \end{aligned}$$

die Gleichungen von sechs geraden Linien: wir wollen die Bedingung bestimmen, daſs die Durchschnitte der ersten und zweiten, der dritten und vierten, der fünften und sechs-

ten in gerader Linie liegen. Wir können die Sache auf folgende Weise angreifen. Bezeichnen wir durch μ wieder einen unbestimmten Coefficienten, so ist die allgemeine Form der Gleichung, die eine gerade Linie bedeutet, welche durch den Durchschnitt der beiden ersten Linien geht:

$$(1+\mu)y = (a+\mu\alpha)x + b+\mu\beta.$$

Ebenso ergibt sich, wenn μ' und μ'' zwei neue unbestimmte Factoren bedeuten:

$$(1+\mu')y = (c+\mu'\gamma)x + d+\mu'\delta,$$
$$(1+\mu'')y = (k+\mu''\varkappa)x + l+\mu''\lambda,$$

für die allgemeine Form der Gleichungen solcher gerader Linien, die durch den Durchschnitt der dritten und vierten und der fünften und sechsten obiger Linien gehen. Durch gehörig genommene Werthe für μ, μ' und μ'', positive sowol als negative, erhalten wir jede einzelne gerade Linie, welche obigen Bedingungen Genüge thut. Sollen die drei Durchschnitts-Puncte in gerader Linie liegen, so müssen sich jene Coefficienten so bestimmen lassen, daſs die drei letzten Gleichungen identisch werden und dieselbe gerade Linie bezeichnen. Dieſs erfordert aber:

$$\frac{a+\mu\alpha}{1+\mu} = \frac{c+\mu'\gamma}{1+\mu'} = \frac{k+\mu''\varkappa}{1+\mu''},$$
$$\frac{b+\mu\beta}{1+\mu} = \frac{d+\mu'\delta}{+1\ \mu'} = \frac{l+\mu''\lambda}{1+\mu''}; \qquad (6)$$

und somit haben wir vier von einander unabhängige Gleichungen zwischen μ, μ', μ'' und den Constanten der sechs Geraden. Wenn wir μ, μ' und μ'' eliminiren, so erhalten wir die gesuchte Bedingungs-Gleichung. Die Elimination hat keine Schwierigkeit. In einzelnen Fällen lassen jene Gleichungen sich geradezu verificiren, alsdann ist jene zur Beweisführung nicht mehr nöthig.

59. Wir kommen aber noch schneller und zugleich auf eine noch elegantere Weise zum Ziele, wenn wir die Gleichung der geraden Linie, welche die drei Durchschnitte enthält, in die Rechnung einführen. Für diese Gleichung wollen wir folgende nehmen:

$$y = Ax + B. \qquad (7)$$

Da nun die beiden geraden Linien jedes der drei Paare sich auf dieser letzten Linie, den Voraussetzungen gemäſs, schneiden, so gibt uns die 56. Nummer sogleich folgende drei Gleichungen:

$$A(\beta-b) - B(\alpha-a) + b\alpha - \beta a = 0,$$
$$A(\delta-d) - B(\gamma-c) + d\gamma - \delta c = 0, \qquad (8)$$
$$A(\lambda-l) - B(\varkappa-k) + l\varkappa - \lambda k = 0.$$

Auf diese drei Bedingungs-Gleichungen werden wir geführt, wenn wir die gerade Linie, welche die Durchschnitts-Puncte enthält, als gegeben betrachten, mithin A und B als bekannt. Eliminiren wir eine dieser Gröſsen, so reducirt sich die Zahl der Bedingungs-Gleichungen auf zwei. Durch Elimination von B z. B. ergibt sich:

$$A\{(\beta-b)(\gamma-c)-(\delta-d)(\alpha-a)\} + (b\alpha-\beta a)(\gamma-c)-(d\gamma-\delta c)(\alpha-a) = 0,$$
$$A\{(\beta-b)(\varkappa-k)-(\lambda-l)(\alpha-a)\} + (b\alpha-\beta a)(\varkappa-k)-(l\varkappa-\lambda k)(\alpha-a) = 0. \qquad (9)$$

Diesen beiden Gleichungen muſs Genüge geschehen, wenn die Durchschnitts-Puncte auf einer geraden Linie liegen sollen, deren Richtung durch A bestimmt ist. Eliminiren wir auch A, so kommt:

$$\frac{(b\alpha-\beta a)(\gamma-c)-(d\gamma-\delta c)(\alpha-a)}{(\beta-b)(\gamma-c)-(\delta-d)(\alpha-a)} = \frac{(b\alpha-\beta a)(\varkappa-k)-(l\varkappa-\lambda k)(\alpha-a)}{(\beta-b)(\varkappa-k)-(\lambda-l)(\alpha-a)}, \qquad (10)$$

und diese Bedingungs-Gleichung, welche weder A noch B enthält, ist die gesuchte. Wir sehen also, daſs es bei den letzten Entwickelungen nur auf die Form der eingeführten Hülfs-Gleichung (7) ankommt, und hierin zeigt sich die Methode in ihrer ganzen Reinheit.

60. Die Gleichung (10) erleidet durch Fortschaffung der Nenner noch eine kleine Reduction. Unser Zweck war aber mehr zu zeigen, wie man leicht zu dieser Gleichung gelangen kann, als dieselbe zu entwickeln. Denn für besondere Fälle würde es mühsam seyn zu untersuchen, ob die Coefficienten von sechs verschiedenen Gleichungen der eben entwickelten Genüge thun, um zu beweisen, daſs die geraden Linien, welche sie darstellen, paarweise genommen sich in drei Puncten schneiden, die in gerader Linie liegen. Für jeden einzelnen Fall gibt es eine leichteste Art, die Sache anzugreifen und selten nur brauchen wir die End-Gleichung selbst zu entwickeln. Besonders einfach wird der Beweis, wenn der Anfangs-Punct der Coordinaten sich füglich in einen der Durchschnitts-Puncte legen läſst. Ueberhaupt müssen wir jedesmal eh wir zum Beweise selbst übergehen, uns ein Schema desselben entwerfen. Wir wollen einige Beispiele geben.

61. Sey YOX irgend ein beliebiger Winkel, dessen Schenkel wir zu Coordinaten-Axen nehmen; alsdann sind Fig. 17.

$$\begin{aligned} py + qx &= pq, \\ p'y + q'x &= p'q', \end{aligned} \qquad (1)$$

die Gleichungen zweier gerader Linien PQ und P′Q′, welche von der ersten Axe die Segmente p und p′, von der zweiten die Segmente q und q′, abschneiden. Wir wollen die Gleichung derjenigen geraden Linie bestimmen, welche durch den Durchschnitt der beiden gegebenen und den Anfangs-Punct der Coordinaten geht. Um diese zu erhalten, müssen wir die beiden Gleichungen (1) so mit einander verbinden, daſs wir zu einer Gleichung von der Form:

$$y = Ax$$

kommen. Multipliciren wir zu diesem Ende die erste Gleichung mit p′q′, die zweite mit pq, und ziehen ab, so kommt:

$$pp'(q'-q)y + qq'(p'-p)x = 0, \qquad (2)$$

mithin:

$$A = -\frac{qq'(p'-p)}{pp'(q'-q)}.$$

62. Wir schalten hier einige Entwicklungen ein, worauf uns die Form des Ausdrucks von A führt. Nehmen wir nemlich für einen Augenblick an, der Coordinaten-Winkel sey ein rechter, und machen überdies die Voraussetzung, daſs die beiden durch (1) bezeichneten Geraden auf einander senkrecht stehen, daſs mithin: Fig. 18.

$$\frac{qq'}{pp'} = -1,$$

so reducirt sich die letzte Gleichung auf:

$$A = \frac{p'-p}{q'-q}.$$

Das Verhältniſs der auf den beiden Axen bestimmten Segmente (p′—p) und (q′—q) ist also gleich der trigonometrischen Tangente desjenigen Winkels, welchen die Gerade (2) mit der ersten Axe bildet. So lange sich also die beiden auf einander senkrechten Geraden (1) in demselben Puncte, oder allgemeiner in einem beliebigen Puncte einer festen durch O gehenden geraden Linie (2) schneiden, ist jenes Verhältniſs constant. Es ist

$$\frac{PP'}{QQ'} = \frac{\pi\pi'}{\varkappa\varkappa'} = tang$$

Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

Wenn die Schenkel zweier rechter Winkel, von denen wir einen als fest und unveränderlich betrachten, bis zum gegenseitigen Durchschnitt verlängert werden, so bleibt das Verhältnifs der Segmente, die auf den Schenkeln des ersten Winkels bestimmt werden, immer dasselbe, wie man auch den zweiten rechten Winkel um seinen Scheitel drehen, und wie man auch diesen Scheitel auf derjenigen geraden Linie, welche die Scheitel der beiden ursprünglich angenommenen Winkel verbindet, fortrücken läfst.

Wenn die oben durch (2) bezeichnete Gerade den ersten rechten Winkel halbirt, so ist:

$$A = 1,$$

mithin sind die Segmente $(p'-p)$ und $(q'-q)$ einander gleich. Es ist also:

$$QQ' = PP'.$$

Fig. 19. *Wenn man in irgend einem rechtwinkligen Dreiecke den rechten Winkel durch eine gerade Linie halbirt, und im Durchschnitts-Puncte dieser Linie mit der Hypotenuse des Dreiecks ein Perpendikel errichtet, so bestimmt dasselbe auf den Katheden, (die eine derselben verlängert), gleiche Segmente.*

Fig. 17. 63. Nach diesen Abschweifungen nehmen wir den abgebrochenen Faden wieder auf und wollen nun die Gleichung einer geraden Linie suchen, welche durch den Anfangs-Punct der Coordinaten und den Durchschnitt der beiden geraden Linien PQ' und $P'Q$ geht. Die Gleichungen der letztgenannten Linien sind, den Bezeichnungen der 61. Nummer gemäfs, folgende:

$$\begin{aligned} py + q'x &= pq', \\ p'y + qx &= p'q. \end{aligned} \qquad (3)$$

Wenn wir diese beiden Gleichungen zu einer Gleichung von der Form:

$$y = A'x,$$

verbinden, so erhalten wir die verlangte. Multipliciren wir zu diesem Ende die erste der Gleichungen (3) mit $p'q$, die zweite mit pq', und ziehen ab, so kommt:

$$pp'(q'-q)y - qq'(p'-p)x = o, \qquad (4)$$

mithin

$$A' = \frac{qq'(p'-p)}{pp'(q'-q)},$$

und da wir in der 61. Nummer für A folgenden Werth gefunden haben:

$$A = -\frac{qq'(p'-p)}{pp'(q'-q)},$$

so folgt:

$$A + A' = o.$$

64. Aus diesen Entwicklungen können wir mehrere Resultate ziehen. Wird nemlich eine der geraden Linien

$$y = Ax, \quad y = A'x,$$

willkürlich angenommen, so bestimmt sich die andere vermittelst der Gleichung (5). Rückt also der Punct S auf der ersten dieser Geraden fort, so bleibt der Constructions-Punct σ immer auf der zweiten, die Richtung der durch S gezogenen beiden Linien SP und SP′ ist hierbei durchaus beliebig. Die Beziehung der Linien OS und Oσ zu einander ist reciprok. *)

*) Man sieht leicht ein, dafs dieser und der folgende Satz sich gleich schon an die Constructionen und das einfache Schema der 37. Nummer hätten anknüpfen lassen. Diefs zeigt die

Nehmen wir irgend zwei der vier Durchschnitts-Puncte, die nicht auf derselben Axe liegen, z. B. P und Q als fest, so können wir noch auf unendlich viele Art P' und Q' so bestimmen, dafs PQ' und P'Q sich auf ein und derselben geraden Linie Oσ schneiden, die durch den Anfangs-Punct der Coordinaten geht; alsdann aber laufen alle gerade Linien P'Q' in demselben Puncte S zusammen. Fig. 20.

65. Die letzten Sätze bestehen auch dann noch, wenn S unendlich weit liegt, wenn PQ und P'Q' parallel sind. In diesem Falle ist:

$$\frac{q}{p} = \frac{q'}{p'} = \frac{q'-q}{p'-p},$$

wodurch die Werthe von A und A' sich folgendermafsen bestimmen:

$$A = -\frac{q}{p} = -\frac{q'}{p'},\quad A' = \frac{q}{p} = \frac{q'}{p'};$$

die Gleichungen von OS und Oσ werden hiernach folgende:

$$py + qx = o \text{ oder } p'x + q'x = o,$$
$$py - qx = o \quad „ \quad p'y - q'x = o.$$

Die erstere der bezüglichen Geraden ist also parallel mit PQ und P'Q'; die letztere halbirt diese beiden Linien, weil die Coordinaten der Mitten derselben, nemlich $\frac{q}{2}$, $\frac{p}{2}$ und $\frac{q'}{2}$, $\frac{p'}{2}$ für y und x substituirt, die letzten Gleichungen verificiren.

Setzen wir

$$q' = 2q,\quad p' = 2p,$$

so ist der bekannte Satz bewiesen, dafs *die drei geraden Linien, welche in einem Dreieck von den Winkel-Puncten nach den Mitten der gegenüberliegenden Seiten gezogen werden können, sich in demselben Puncte schneiden.*

66. *Die drei in den Mitten der Seiten eines Dreiecks errichteten Perpendikel schneiden sich in ein und demselben Puncte.* Um Abwechselung in die Beweise zu bringen, wollen wir hier zwei Seiten des Dreiecks zu Coordinaten-Axen nehmen; die dritte Seite ist alsdann durch die Gleichung:

$$py + qx = 2pq$$

gegeben, wenn wir die Stücke, welche dieselbe auf den Axen bestimmt, durch 2q und 2p bezeichnen. Die Coordinaten der Mitte dieser dritten Seite sind alsdann q und p, und die Gleichung des in diesem Puncte errichteten Perpendikels ist:

$$y - q = \frac{q\cos\beta - p}{p\cos\beta - q}(x - p),^{*)}$$

wo wir, wie gewöhnlich, den Coordinaten-Winkel durch β bezeichnen. Wenn wir entwickeln, so kommt:

$$q(y - q + x\cos\beta) - p(x - p + y\cos\beta) = o. \qquad (1)$$

Uebereinstimmung der Gleichung (5) mit der letzten Gleichung der 36. Nummer. Hiernach ergibt sich dann auch ferner, nach Nummer 51, dafs jede gerade Linie von OX, Oσ, OY und OS harmonisch geschnitten wird.

*) Setzt man nemlich in die Gleichung (2) der 17. Nummer $a' = -\frac{q}{p}$, so kommt:

$$a = \frac{q\cos\beta - p}{p\cos\beta - q}.$$

Wir haben ferner für die beiden in den Mitten der beiden ersten Seiten errichteten Perpendikel:

$$y - q + x \cos\beta = 0, \qquad 20 \ (9)$$
$$x - p + y \cos\beta = 0. \qquad 20 \ (5)$$

Nehmen wir den Unterschied dieser beiden letzten Gleichungen, nachdem wir die erste derselben mit q, die zweite mit p multiplicirt haben, so erhalten wir eine Gleichung, die identisch ist mit (1). Es schneiden sich also die bezüglichen Geraden in demselben Puncte.

Einen bemerkenswerthen Beweis desselben Satzes werden wir in dem folgenden Abschnitte, welcher der Theorie des Kreises bestimmt ist, finden.

Fig. 21, 67. Seyen OY und OX zwei sich unter einem beliebigen Winkel schneidende gerade Linien, die wir als Coordinaten-Axen nehmen, und PQ und $P_n Q_n$ irgend zwei Parallele, alsdann ist, wenn wir $OQ = q$, $OP = p$ setzen:

$$OQ_n = nq, \quad OP_n = np,$$

wo n irgend einen beliebigen Coefficienten bezeichnet, für den wir eine negative Gröſse nehmen müssen, wenn, wie in dem Falle der Figur, die zwei Parallelen zu beiden Seiten des Anfangs-Punctes liegen. Ferner sind die Gleichungen zweier beliebiger Geraden, von denen die eine durch Q_n, die andere durch P_n geht, folgende:

$$\left.\begin{aligned} y - nq + ax &= 0, \\ y + a'(x - np) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Multipliciren wir die erste dieser Gleichungen mit $a'p$, die zweite mit q, und ziehen ab, so kommt

$$(a'p - q)y + a'(ap - q)x = 0: \qquad (2)$$

die Gleichung derjenigen geraden Linie, die durch den Durchschnitt der beiden ersten und durch den Anfangs-Punct der Coordinaten geht. Diese Gleichung ist unabhängig von n, und wir kommen also immer zu derselben Gleichung, wie wir auch die Gerade $P_n Q_n$ parallel mit sich selbst verrücken mögen, wenn wir nur a und a' auf dieselbe Weise bestimmen, d. h. die bezüglichen Geraden parallel nehmen. Wir können also auch durch Q und P zwei gerade Linien ziehen, die erste parallel mit $Q_n S_n$, die zweite mit $P_n S_n$; alsdann wird der Durchschnitt S dieser Linien in die gerade Linie (2) fallen. Es liegen also S und S_n in gerader Linie mit dem Anfangs-Puncte der Coordinaten. Hierin ist folgender Satz enthalten:

Wenn man um ein Parallel-Trapez irgend ein Parallelogramm beschreibt, so gehen die beiden Diagonalen des erstern und eine leicht zu bezeichnende Diagonale des letztern durch ein und denselben Punct.

Es ist zu bemerken, daſs wir den Begriff des Umschreibens ganz allgemein nehmen, und von einem Parallelogramm sagen, es sey um ein Trapez beschrieben, wenn die Win-
Fig. 21. kel-Puncte des letztern auf den Seiten des erstern (Fig. 21.) oder auf den Verlängerun-
Fig. 22. gen derselben liegen (Fig. 22).

Es folgt unmittelbar aus dem Nächst-Vorhergehenden, daſs die vier Diagonalen zweier Parallelogramme, von denen das eine dem andern umschrieben ist, sich in einem und demselben Puncte kreuzen.

68. Eliminiren wir die Werthe der Coordinaten zwischen den beiden Gleichungen (1), so kommt:

$$x = \frac{n(a'p - q)}{a' - a}, \quad y = -\frac{na'(ap - q)}{a' - a},$$

Der Quotient dieser Ausdrücke ist unabhängig von n, worin ein anderer Beweis für die letzten Sätze liegt. Jeder dieser Ausdrücke ferner ändert sich in demselben Verhältnisse als n sich ändert, die Entfernungen verschiedener Durchschnitts-Puncte S_n vom Anfangs-Puncte der Coordinaten verhalten sich also wie die bezüglichen n.

Die Segmente der beiden Diagonalen obigen Parallel-Trapezes und der Diagonale des umschriebenen Parallelogrammes, welche durch den Durchschnitt derselben geht, stehen in demselben Verhältniss.

69. Um die Coordinaten des Punctes C zu bekommen, müssen wir die beiden Gleichungen von PQ_n und P_nQ: Fig. 21.

$$py + nqx = npq,$$
$$npy + qx = npq,$$

mit einander verbinden und erhalten auf diese Weise:

$$y = \frac{nq}{n+1},\ x = \frac{np}{n+1}.$$

Aus diesen Ausdrücken folgt:

$$y : nq = x : np = 1 : n+1,$$

woraus ferner sich ergibt:

$$y : nq - y = x : np - x = 1 : n,$$

und endlich mit Beziehung auf die Figur (wo die Werthe von y und x negativ sind):

$$CP : CQ_n = CQ : CP_n = 1 : n.$$

Wir können nun das eben Bewiesene auch in Beziehung auf das Dreieck $CQ_n P_n$ aussagen. Setzen wir $n = -2$, und nehmen überdiefs an, $Q_n S_n$ und mithin auch QS stehen senkrecht auf QQ_n, so wie $P_n S_n$ und PS auf PP_n, so haben wir folgenden zuerst von Euler in den Petersburger Commentarien*) synthetisch bewiesenen Satz:

Die Durchschnitts-Puncte erstens der von den Winkel-Puncten irgend eines Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Perpendikel, zweitens der von jenen nach den Mitten von diesen gezogenen geraden Linien, und drittens der in diesen Mitten errichteten Perpendikel liegen in gerader Linie, und zwar liegt der zweite Punct zwischen den beiden andern, so dafs er vom ersten doppelt so weit absteht als vom dritten.

70. Um eine andere Art der Beweis-Führung noch anzuwenden, wollen wir folgenden Satz nehmen:

Wenn zwei Puncte Q und P gegeben sind, und wir legen durch jeden dieser Puncte drei beliebige, unbestimmt verlängerte, gerade Linien, die wir durch I, II, III und 1, 2, 3 bezeichnen wollen, so schneiden sich I und 2, II und 1 in zweien Puncten M'' und $M_{''}$; ferner schneiden sich I und 3, III und 1 in M' und $M_{'}$, und endlich II und 3, III und 2 in M^0 und M_0. Ziehen wir nun die geraden Linien $M''M_{''}$, $M'M_{'}$, und M_0M^0: so vereinigen alle drei sich in demselben Puncte, in R. Fig. 23.

Um diesen Satz zu beweisen, legen wir die beiden Axen durch die beiden gegebenen Puncte Q und P, machen aber noch keine Bestimmung über den Anfangs-Punct, den wir also einstweilen beliebig annehmen. Legen wir nun die zweite Axe durch Q, so haben wir

*) Novi Comm. Petrop. T. XI.

für die Gleichungen der drei geraden Linien, die durch diesen Punct gehen, Gleichungen von folgender Form:

$$y-y'+ax=o \quad \text{für I,}$$
$$y-y'+a'x=o \quad \text{„ II,}$$
$$y-y'+a''x=o \quad \text{„ III;}$$

und ebenso haben wir für die drei übrigen geraden Linien, welche durch den, auf der ersten Axe liegenden, Punct P gehen, Gleichungen, die unter folgender Gestalt erscheinen:

$$y+\alpha(x-x')=o \quad \text{für 1,}$$
$$y+\alpha'(x-x')=o \quad \text{„ 2,}$$
$$y+\alpha''(x-x')=o \quad \text{„ 3.}$$

Wenn wir die Gleichungen für I und 2 verbinden, so gibt uns die Elimination von y und x die Coordinaten des Durchschnitts-Punctes M''. Für diese Coordinaten, die wir durch Y'' und X'' bezeichnen wollen, ergibt sich sogleich:

$$X''=\frac{\alpha'x'-y'}{\alpha'-a}, \qquad Y''=-\frac{\alpha'(ax'-y')}{\alpha'-a}.$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir die Coordinaten des Punctes $M_{''}$, die wir durch $Y_{''}$ und $X_{''}$ unterscheiden wollen, durch Verbindung der beiden Gleichungen für II und 1. Wir kommen aber auf der Stelle zum gewünschten Resultate, wenn wir in den Werthen für X'' und Y'' bloſs α' mit α und a mit a' vertauschen, und finden auf diese Weise:

$$X_{''}=\frac{\alpha x'-y'}{\alpha-a'}, \qquad Y_{''}=-\frac{\alpha(a'x'-y')}{\alpha-a'}.$$

Wir haben ferner für die gerade Linie, welche durch M'' und $M_{''}$ geht, folgende Gleichung:

$$(X''-X_{''})y-(Y''-Y_{''})x+Y''X_{''}-Y_{''}X''=o.$$

und wenn wir die oben für X'', Y'', $X_{''}$ und $Y_{''}$ gefundenen Werthe in das von y und x unabhängige Glied der letzten Gleichung substituiren, und dieses Glied durch C'' bezeichnen, so finden wir nach einer einfachen Reduction:

$$C''=-\frac{(\alpha'-\alpha)y'^2-(\alpha'a-\alpha a')y'x'+\alpha\alpha'(a-a')x'^2}{(\alpha'-a)(\alpha-a')}.$$

Setzen wir endlich, ohne weiter zu entwickeln:

$$X''-X_{''}=A'', \qquad -(Y''-Y_{''})=B'',$$

so erhalten wir für die Gleichung der geraden Linie $M''M_{''}$:

$$A''y+B''x+C''=o$$

Bilden wir auf dieselbe Weise die Gleichungen der beiden andern Linien, von denen die eine durch M' und $M_{'}$, die andere durch M^o und M_o geht, so bekommen wir Gleichungen von derselben Form:

$$A'y+B'x+C'=o,$$
$$Ay+Bx+C=o,$$

deren Constante wir durch bloſse Accent-Vertauschung erhalten. Für unsern Zweck brauchen wir bloſs die Ausdrücke für C' und C zu kennen. Wir erhalten den erstern derselben C', wenn wir in dem Ausdrucke für C'' die einmal accentuirten Buchstaben zweimal accentuiren; wir erhalten C, wenn wir in dem Ausdrucke für C' die nicht accentuirten Buchstaben einmal accentuiren. Wir bekommen auf diese Weise:

$$C'=-\frac{(\alpha''-\alpha)y'^2-(\alpha''a-\alpha a'')y'x'+\alpha a\alpha''(a-a'')x'^2}{(\alpha''-a)(\alpha-a'')},$$

$$C=-\frac{(\alpha''-\alpha')y'^2-(\alpha''a'-\alpha'a'')y'x'+\alpha'\alpha''(a'-a'')x'^2}{(\alpha''-a')(\alpha'-a'')}.$$

Da wir über den Anfangs-Punct der Coordinaten durchaus keine Bestimmung gemacht haben, so können wir nun annehmen, wir hätten ursprünglich unsere Rechnung in der Voraussetzung angelegt, dafs jener Punct sich im Durchschnitte der beiden geraden Linien $M''M_{\prime\prime}$ und $M'M_{\prime}$ befinde, dafs mithin $C'' = C' = o$. Diefs gibt uns aber zwischen den Constanten der gegebenen sechs Geraden folgende beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$(\alpha' - \alpha)y'^2 - (\alpha' a - \alpha a')y'x' + \alpha\alpha'(a - a')x'^2 = o,$$
$$(\alpha'' - \alpha)y'^2 - (\alpha'' a - \alpha a'')y'x' + \alpha\alpha''(a - a'')x'^2 = o.$$

Multipliciren wir die erste dieser Gleichungen mit α'', die zweite mit α', und ziehen alsdann jene von dieser ab, so kommt:

$$\alpha\ \{(\alpha'' - \alpha')y'^2 - (\alpha'' a' - \alpha' a'')y'x' + \alpha'\alpha''(a' - a'')x'^2\} = o.$$

Diese Gleichung zeigt, dafs auch C gleich Null ist; dafs also auch die dritte gerade Linie M^oM_o durch den Anfangs-Punct der Coordinaten, d. h. durch den Durchschnitt der beiden ersten Geraden $M''M_{\prime\prime}$ und $M'M_{\prime}$ geht; — und eben diefs wollten wir beweisen.

71. Da wir nun aber die drei geraden Linien, welche durch jeden der beiden Puncte Q und P gehen, in beliebiger Ordnung nehmen können, so finden wir durch entsprechende Constructionen sechs verschiedene solcher Puncte, in welchen drei gerade Linien sich schneiden, von denen jede durch zwei der neun Puncte geht, die durch den Durchschnitt der drei erstern Geraden mit den drei letztern entstehen. Zur bequemern Bezeichnung stellen wir, wie oben schon geschehen, die drei Geraden, welche durch Q gehen, durch I, II, III; diejenigen, welche durch P gehen, durch 1, 2, 3 dar; den Durchschnitt von I und 1 bezeichnen wir durch (I, 1) den Durchschnitt von II und 2 durch (II, 2), und so fort; endlich die gerade Linie, welche durch (I, 1) und (II, 2) sich legen läfst, durch (I, 1)(II, 2), und dem entsprechend die übrigen in Rede stehenden Linien. Diefs vorausgesetzt, haben wir folgendes Schema: Es schneiden sich

(I, 2)(II, 1),	(I, 3)(III, 1),	(II, 3)(III, 2)	in	R,
(I, 2)(II, 3),	(I, 1)(III, 3),	(II, 1)(III, 2)	„	S,
(I, 1)(II, 2),	(I, 3)(III, 2),	(II, 3)(III, 1)	„	T,
(I, 1)(II, 3),	(I, 2)(III, 3),	(II, 2)(III, 1)	„	U,
(I, 3)(II, 1),	(I, 2)(III, 1),	(II, 2)(III, 3)	„	V,
(I, 3)(II, 2),	(I, 1)(III, 2),	(II, 1)(III, 3)	„	W.

Es ist zugleich ersichtlich, dafs, anstatt die beiden Puncte Q und P und die durch jeden dieser Puncte gezogenen drei geraden Linien als ursprünglich gegeben anzunehmen, wir ebenfalls von zweien beliebigen der sechs Constructions-Puncte R, S, T, U, V und W, und den in jedem derselben zusammenlaufenden drei geraden Linien hätten ausgehen können, und dafs alsdann die bisher als gegeben betrachteten Puncte Q und P sich in die Reihe der Constructions-Puncte gestellt hätten.

72. Wir können als in dem Vorigen bewiesen ansehen, dafs, wenn irgend zwei der in dem letzten Schema zusammengestellten Linien parallel sind, auch die dritte zu ihnen gehörige, mit ihnen parallel ist. Wollen wir aber diesen besondern Fall geradezu beweisen, so müssen wir den oben gegebenen Beweis, der hier nicht Statt finden kann, einigermafsen modificiren. Wir müssen nemlich beweisen, dafs wenn zwei der Fig. 24.

drei geraden Linien, $M''M_{''}$, $M'M_{'}$ und $M^{\circ}M_{\circ}$, für welche wir oben folgende Gleichungen gefunden haben:

$$A''x + B''y + C'' = o,$$
$$A'x + B'y + C' = o,$$
$$Ax + By + C = o,$$

parallel sind, alle drei Linien parallel laufen; daſs also wenn die Gleichung:

$$\frac{A''}{B''} = \frac{A'}{B'}$$

Statt findet, daraus folgt:

$$\frac{A''}{B''} = \frac{A'}{B'} = \frac{A}{B}.$$

Da wir über die Coordinaten-Axen weiter keine Annahme gemacht haben, als daſs jede derselben durch einen gegebenen Punct gehe, so können wir hier wieder die Rechnung abkürzen, indem wir voraussetzen, eine der Axen sey mit $M''M_{''}$ und $M'M_{'}$ parallel. Wenn wir die zweite Axe, unbekümmert um die Richtung der ersten, mit jenen Linien parallel nehmen, so ist:

$$A'' = o, \quad A' = o;$$

und diese Gleichungen müssen nach dem zu beweisenden Satze eine dritte Gleichung:

$$A = o,$$

bedingen. Hiervon überzeugen wir uns leicht, denn wir haben,

$$A'' = X'' - X_{''} = \frac{\alpha' x' - y'}{\alpha' - a} - \frac{\alpha x' - y'}{\alpha - a'},$$
$$= \frac{((\alpha' - \alpha) + (a' - a))\, y' - (\alpha' a' - \alpha a)x'}{(\alpha' - a)(\alpha - a')};$$

und da dieser Ausdruch verschwindet, ist:

$$((\alpha' - \alpha) + (a' - a))\, y' - (\alpha' a' - \alpha a)\, x' = o.$$

Die Voraussetzung, daſs A′ gleich Null ist, gibt folgende Bedingungs-Gleichung:

$$((\alpha'' - \alpha) + (a'' - a))\, y' - (\alpha'' a'' - \alpha a)\, x = o,$$

die wir sogleich aus der letzten Gleichung erhalten, indem wir zweimal statt einmal accentuiren. Ziehen wir von der letzten Gleichung die vorhergehende ab, so kommt:

$$((\alpha'' - \alpha') + (a'' - a'))\, y' - (\alpha'' a'' - \alpha' a')\, x' = o,$$

und diese Gleichung zeigt, daſs der Werth von A:

$$A = \frac{((\alpha'' - \alpha') + (a'' - a'))\, y' - (\alpha'' a'' - \alpha' a')x'}{(\alpha'' - a')(\alpha' - a'')},$$

den wir durch Accent-Vertauschung aus dem Werthe von A″ herleiten, bei obiger Voraussetzungen ebenfalls verschwindet.

73. Es ist leicht zu übersehen, daſs der allgemeine Satz auch dann noch Statt finden muſs, wenn anstatt daſs drei gegebene gerade Linien in P zusammenlaufen, diese Geraden parallel sind und von dreien andern geraden Linien geschnitten werden, die entweder von demselben Puncte, von Q ausgehen, oder auch wiederum parallel sind. Dieser letzte besondere Fall (und nur in Beziehung auf einen Durchschnitts-Punct) wurde in einem der ersten Bände der Annalen von Gergonne zum Beweise vorgelegt. Der erfolgte Beweis schlieſst sich an die oben gebrauchte Beweis-Art an. Nehmen wir nemlich den Anfangs-Punct der Coordinaten beliebig, die Richtungen der Axen aber parallel mit den gegebenen parallelen Geraden, so erhalten wir für die

Fig. 25.

Linien, welche wir oben durch I, II, III und 1, 2, 3 bezeichnet haben, folgende Gleichungen:

$$x = c,\ \ x = c',\ \ x = c'';$$
$$y = b,\ \ y = b',\ \ y = b'';$$

mithin entspricht die Bezeichnung (b′, c) und (b, c′) den Puncten M'' und $M_{''}$. Die Gleichung der geraden Linie, welche durch diese beiden Puncte geht, ist:

$$(c-c')y+(b-b')x+(b'c'-bc) = o.$$

Durch Accent-Vertauschung ergeben sich sogleich die Gleichungen für $M'M_{,}$ und $M^{o}M_{o}$:

$$(c-c'')y+(b-b'')x+(b''c''-bc) = o,$$
$$(c'-c'')y+(b'-b'')x+(b''c''-b'c') = o.$$

Zwei der letzten drei Gleichungen bedingen die dritte, denn wir erhalten jede beliebige derselben, indem wir die beiden übrigen von einander abziehen. Es schneiden sich also die drei bezüglichen Geraden in demselben Puncte, in R.

Der Beweis ist so einfach, dafs wir nicht nöthig haben, wie am angeführten Orte geschieht, irgend eine Supposition über den Anfangs-Punct der Coordinaten zu machen.

Hier gibt es, wie im allgemeinen Satze, aufser R noch fünf Puncte, in denen drei gerade Linien sich vereinigen.

74. Wir können die in den letzten Nummern bewiesenen Sätze in folgender Aussage zusammenfassen:

Wenn drei gerade Linien, die entweder unter einander parallel sind, oder von demselben Puncte ausgehen, drei andern geraden Linien, die dieselbe Bedingung erfüllen, begegnen, so entstehen neun Durchschnitts-Puncte; verbinden wir je zwei derselben, die nicht auf einer der sechs gegebenen Geraden liegen, durch gerade Linien, so erhalten wir achtzehn solcher Linien, die sich zu drei in sechs verschiedenen Puncten vereinigen. Mehrere dieser Puncte können unendlich weit liegen, d. h. die bezüglichen Geraden können parallel seyn.

75. Wenn wir nur einen der sechs in Rede stehenden Puncte, in denen drei gerade Linien sich vereinigen, betrachten, so können wir den Satz in Beziehung auf ein Sechseck aussprechen, wo denn die Aussage desselben unter verschiedenen Modificationen erscheinen kann. So haben wir, um nur ein Beispiel zu geben, folgenden Satz:

Wenn, bei gehörigen Verlängerungen, eine Diagonale eines Sechsecks mit zweien Seiten desselben durch denselben Punct geht, oder mit ihnen parallel ist: und eine andere Diagonale mit zweien andern Seiten in gleicher Beziehung steht: so durchsetzen sich auch die dritte Diagonale und die beiden übrigen Seiten des Sechsecks in ein und demselben Puncte, oder sind alle drei parallel.

76. Der allgemeine Satz der 74. Nummer enthält noch die besondern Fälle, dafs die geraden Linien, welche durch Q gehen, denjenigen, welche durch P gehen, alle oder zum Theil parallel sind: Fälle auf die wir leicht in den frühern Entwicklungen hätten Rücksicht nehmen können. Wir kommen auf diese Weise zu einer Reihe von einzelnen Sätzen, bei denen zu verweilen unsere Absicht nicht ist. Nur ein Beispiel wollen wir anführen. Seyen QA, QB, QE die oben durch I, II, III bezeichneten geraden Linien, Fig. 26.
und PA, PB, PD die Linien 1, 2, 3, und sey QA mit PB und QB mit PA parallel; alsdann liegt von den drei in der ersten Reihe des Schemas der 71. Nummer zusammen-

gestellten geraden Linien, die erste unendlich weit entfernt und die beiden andern, (I, 3)(III, 1) und (II, 3)(III, 2), oder DC und TE, sind daher parallel. Also:

Wenn man durch jeden zweier gegenüberliegenden Winkel-Puncte eines Parallelogrammes eine gerade Linie in beliebiger Richtung zieht, so bestimmen die Durchschnitte dieser geraden Linien mit den Seiten des Parallelogrammes die Winkelpuncte eines Parallel-Trapezes.

77. Wir wollen als letztes Beispiel eine neue Gruppe von Sätzen betrachten. Wenn
Fig. 27. drei parallele gerade Linien AB, A'B' und A''B'' gegeben sind und auf jeder derselben zwei Puncte A und B, A' und B', A'' und B'' beliebig angenommen werden, so schneiden sich die geraden Linien AA' und BB', AA'' und BB'', A'A'' und B'B'' in dreien Puncten, welche in gerader Linie liegen. Dieser Satz ist in einem der ersten Bände der Annalen von Gergonne analytisch bewiesen. In der Anlage des Beweises wollen wir auf dieselbe Weise verfahren, wie dort geschehen ist. Wir legen nemlich die erste Axe parallel den gegebenen Linien, während wir über die zweite Axe keine Bestimmung machen. Dieser Annahme gemäfs ist die Coordinaten-Bezeichnung für die verschiedenen Puncte folgende:

$$A\begin{cases}x = a,\\ y = b;\end{cases}\qquad A'\begin{cases}x = a',\\ y = b';\end{cases}\qquad A''\begin{cases}x = a'',\\ y = b'';\end{cases}$$

$$B\begin{cases}x = a + l,\\ y = b\quad ;\end{cases}\qquad B'\begin{cases}x = a' + l',\\ y = b'\quad ;\end{cases}\qquad B''\begin{cases}x = a'' + l'',\\ y = b''\quad .\end{cases}$$

Wir erhalten also für AA' und BB' folgende Gleichungen:

$$y - b = \frac{b-b'}{a-a'}\,(x-a),$$

$$y - b = \frac{b-b'}{(a-a')+(l-l')}\,(x-a-l).$$

Hieraus ergeben sich ferner folgende Werthe für die Coordinaten des Punctes S'', des Durchschnittes von AA' und BB', die wir durch y'' und x'' bezeichnen wollen:

$$x'' = \frac{al'-a'l}{l'-l},\qquad y'' = \frac{bl'-b'l}{l'-l}.$$

Für die beiden andern in Rede stehenden Puncte S' und S gibt eine blofse Accent-Vertauschung sogleich:

$$x' = \frac{al''-a''l}{l''-l},\qquad y'' = \frac{bl''-b''l}{l''-l};$$

$$x = \frac{a'l''-a''l'}{l''-l'},\qquad y = \frac{b'l''-b''l'}{l''-l'}.$$

Wir können nun auf verschiedene Art beweisen, dafs die drei Puncte S'', S' und S in gerader Linie liegen. Entwickeln wir z. B. den Werth für $\frac{y''-y'}{x''-x'}$, so finden wir für denselben:

$$\frac{b''l'-b'l''-b''l+bl''+b'l-bl'}{a''l'-a'l''-a''l+al''+a'l-al'},$$

und da dieser Ausdruck in Beziehung auf die gleichnamigen, verschieden accentuirten Buchstaben symmetrisch ist (d. h. derselbe bleibt, wenn wir z. B. alle einmal accentuirten Buchstaben mit den nicht accentuirten; und, umgekehrt, diese mit jenen vertauschen), so folgt unmittelbar:

$$\frac{y''-y'}{x''-x'} = \frac{y''-y}{x''-x} = \frac{y'-y}{x'-x};$$

mithin liegen die obigen drei Puncte in gerader Linie.

78. Dasselbe Resultat können wir aber auch unmittelbar in der Form der Ausdrücke für die Coordinaten dieser Puncte lesen. Wenn wir nemlich die zweite Axe, über welche durchaus keine Bestimmung getroffen ist, parallel nehmen derjenigen geraden Linie, welche durch die beiden Puncte (y'', x'') und (y', x') geht, so ist

$$x'' = x'. \qquad (1)$$

In dem besondern Falle, wo die zuletzt bezeichnete Gerade der gegebenen parallel ist, kann jene Bestimmung über die zweite Axe nicht Statt finden, alsdann ist aber, welche Richtung diese Axe auch haben mag, immer:

$$y'' = y'. \qquad (2)$$

Nun bedingt aber die Gleichung (1):

$$x'' = x' = x;$$

und die Gleichung (2) bringt mit sich:

$$y'' = y' = y,$$

so dafs also immer die drei Puncte S″, S′, und S in gerader Linie liegen. Um das eben Ausgesprochene auf der Stelle einzusehen, dienen folgende Bemerkungen. Da die Form der Werthe für die Ordinaten und Abscissen durchaus dieselbe ist, so liegt in der Beweis-Führung des einen Theiles zugleich diejenige des andern. Wir wollen den letzten Fall nehmen. Betrachten wir nur für einen Augenblick (b, l), (b', l'), (b'', l'') als die Coordinaten dreier Puncte, so bemerken wir sogleich, dafs

$$y'' = \frac{bl' - b'l}{l' - l}$$

die Ordinate des Durchschnittes der zweiten Axe mit einer geraden Linie, die durch den ersten und zweiten obiger drei Puncte geht, bezeichnet. Ebenso bezeichnen y' und y die Ordinaten des Durchschnittes der zweiten Axe und zweier gerader Linien, von denen die eine durch den ersten und dritten, die andern durch den zweiten und dritten obiger Puncte geht. Setzen wir nur $y'' = y'$, so ergibt sich unmittelbar, dafs alle drei Puncte auf einer geraden Linie liegen, die von der zweiten Axe ein Segment:

$$y'' = y' = y$$

abschneidet. Auf diese Weise haben wir alle Elimination erspart.

79. Abstrahiren wir davon, (wie a. a. O. geschieht) dafs die gerade Linie, welche durch die Puncte S″ und S′ geht, den gegebenen parallel seyn kann, so können wir die Elimination abkürzen, indem wir die zweite Axe selbst durch jene Puncte legen. Alsdann ist $x'' = x' = 0$ und es kommt:

$$\frac{a}{l'} = \frac{a'}{l}, \quad \frac{a''}{l''} = \frac{a}{l},$$

mithin ist auch:

$$\frac{a''}{l''} = \frac{a'}{l'},$$

woraus denn folgt, dafs auch x verschwindet.

80. Indem wir nach einander die beiden Puncte auf jeder der drei gegebenen geraden Linien, AB, A′B′ und A″B″ unter einander vertauschen, gibt uns eine ähnliche Construction wie früher noch dreimal drei Puncte, die in gerader Linie liegen nemlich S″, σ und σ′; S′, σ und σ″; S, σ′ und σ″. Fig. 27.

81. Der in der 77. Nummer für y″ gefundene Werth ist unabhängig von a und a′, so wie der Werth für x″ unabhängig ist von b und b′. Diese Resultate sind leicht geo-

metrisch zu deuten. Das letzte derselben ist als besonderer Fall eines Satzes anzusehen, den wir nun zunächst entwickeln wollen.

32. Es seyen OAB und OA'B' zwei beliebige sich in O schneidende gerade Linien, deren Durchschnitt wir zum Anfangs-Puncte der Coordinaten nehmen; den Axen geben wir eine beliebige Richtung. Die Gleichungen der beiden Geraden sind bei diesen Voraussetzungen von folgender Form:

$$y = tx, \quad y = t'x.$$

Nehmen wir daher auf jeder derselben zwei Puncte beliebig an, auf der einen A und B, auf der andern A' und B', so können wir die Coordinaten dieser vier Puncte auf folgende Weise bezeichnen:

$$A\begin{cases}x = a\\ y = ta,\end{cases} \qquad A'\begin{cases}x = a'\\ y = t'a',\end{cases}$$

$$B\begin{cases}x = \alpha\\ y = t\alpha,\end{cases} \qquad B'\begin{cases}x = \alpha'\\ y = t'\alpha'\end{cases}$$

Fig. 28. Die Gleichungen zweier gerader Linien, von welchen die eine durch A und A', die andern durch B und B', geht, sind hiernach folgende:

$$y - ta = \frac{t'a' - ta}{a' - a}(x - a),$$

$$y - t\alpha = \frac{t\alpha' - t\alpha}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha).$$

Ziehen wir, um y zu eliminiren, diese beiden Gleichungen von einander ab, so kommt nach einigen Reductionen:

$$x = \frac{aa'(\alpha' - \alpha) - \alpha\alpha'(a' - a)}{a\alpha' - a'\alpha}.$$

Dieser Ausdruck für die Abscisse des Durchschnittes der beiden geraden Linien AA' und BB' ist unabhängig von t und t'. Wenn wir daher jede der beiden gegeben Geraden um den gemeinsamen Durchschnitt beliebig drehen, und dabei die Puncte A, B, A' und B' auf den bezüglichen Linien sich so verrücken lassen, daſs ihre Abscissen sich nicht ändern, so bleibt auch der Werth von x derselbe. Wir bestimmen aber gleiche Abscissen durch gerade Linien, die der zweiten Axe parallel sind, die also für unsern Fall, da wir keine Bestimmung über die Richtung der Axen gemacht haben, eine durchaus beliebige Richtung haben. Also:

Wenn vier Parallel-Linien gegeben sind, und man zieht durch irgend einen festen Punct in beliebiger Richtung verechiedene Paare gerader Linien, und verbindet die Puncte, in welchen eine Linie jedes Paares zwei jener Parallelen schneidet, mit den Puncten, welche die andere auf den beiden übrigen bestimmt, durch zwei gerade Linien (was auf doppelte Weise geschehen kann): so ist der geometrische Ort für die Durchschnitte derselben eine fünfte und sechste Parallele.

In der 28 Figur ist bloſs auf die Drehung der zweiten Geraden um den festen Punct O Rücksicht genommen, die beiden Lagen dieser Linie sind OT' und Ot'. SS und σσ sind die beiden Parallelen, welche alle die in Rede stehenden Durchschnitte enthalten.

33. Bei den eben gemachten Beschränkungen erhalten wir durch Umkehrung folgenden Satz:

Wenn irgend drei parallele gerade Linien gegeben sind (Aa', $B'b'$ und SS) und man zieht von einem Puncte (S) der letztern zwei gerade Linien nach zweien festen Puncten (A und B), so schneidet eine dieser Linien die erste, die andere die zweite Parallele so, daſs die gerade Linie, welche die beiden Durchschnitte (A' und B', oder a' und b') verbindet, immer, wie wir auch S auf der Parallelen SS fortrücken lassen, durch einen constanten Punct O geht, der mit den beiden angenommenen, festen, Puncten (A, B) in gerader Linie liegt.

84. Wir wollen zu den beiden geraden Linien OAB und OA'B', die wir in der 82. Nummer betrachtet haben, noch eine dritte OA″B″ hinzufügen, die durch den Durchschnitt der beiden ersten geht. Ihre Gleichung sey: Fig. 29.

$$y = t''x.$$

Auf dieser Linie bestimmen wir irgendwo zwei Puncte A″ und B″, die wir, dem Frühern analog, folgendermaaſsen bezeichnen:

$$A''\begin{cases} x = a'' \\ y = t''a'', \end{cases} \qquad B''\begin{cases} x = \alpha'' \\ y = t''\alpha''. \end{cases}$$

Ziehen wir nun, ähnlich wie wir es in der 77. Nummer gethan haben, AA′ und BB′, AA″ und BB″, A′A″ und B′B″, welche sich in S″, S′ und S schneiden, so liegen diese drei Durchschnitte in gerader Linie.

Den Beweis dieses Satzes können wir folgendermaaſsen angreifen. Wir haben oben für die Abscisse des Punctes S″, die wir nun durch x″ unterscheiden wollen, folgenden Ausdruck gefunden:

$$x'' = \frac{aa'(\alpha'-\alpha)-\alpha\alpha'(a'-a)}{a\alpha'-a'\alpha},$$

und durch Accent-Vertauschung erhalten wir:

$$x' = \frac{aa''(\alpha''-\alpha)-\alpha\alpha''(a''-a)}{a'\alpha''-a''\alpha'},$$

$$x = \frac{a'a''(\alpha''-\alpha')-\alpha'\alpha''(a''-a')}{a'\alpha''-a''\alpha'},$$

für die Abscissen der Puncte S′ und S. Wenn wir nun die Richtung der zweiten Axe mit derjenigen geraden Linie, die durch die beiden Puncte S″ und S′ geht, parallel nehmen, so ist

$$x'' = x',$$

und wir brauchen bloſs zu zeigen, daſs bei dieser Voraussetzung:

$$x'' = x' = x.$$

Zu diesem Ende wollen wir die Bedingungs-Gleichung suchen, daſs x″ gleich werde x′. Bringen wir den Werth von $x''-x'$ auf gemeinschaftlichen Nenner, setzen den Zähler des so erhaltenen Ausdrucks gleich Null, reduciren und dividiren alsdann durch $(a-\alpha)$, so kommt:

$$aa'(\alpha''\alpha-\alpha''\alpha') - aa''(\alpha'\alpha-\alpha'\alpha'') + a'a''(\alpha\alpha'-\alpha\alpha'') = 0 \qquad (1)$$

Da diese Gleichung in Beziehung auf die verschieden accentuirten Buchstaben symmetrisch ist: so folgt unmittelbar:

$$x'' = x' = x,$$

d. h. die entsprechenden Puncte: S″, S′ und S liegen in gerader Linie.

85. An die Stelle des eben gegebenen Beweises, können wir eine leichte Construction setzen, worauf uns die vorhergehenden Nummern hinführen. Wir nehmen die zweite

Axe, wie vorher, der geraden Linie, die durch S″ und S′ geht, parallel, bestimmen ferner auf AA′ einen Punct α'', der mit A″, und auf BB″ einen Punct β'', der mit B″ dieselbe Abscisse hat. Alsdann geht (83) $\alpha''\beta''$ durch O. Ferner schneiden sich (82) die Linien A′A″ und B′B″ in einem Puncte S, der mit dem Durchschnitte von Aα'' und Bβ'', der kein anderer ist als der Punct S″, dieselbe Abscisse hat. Es liegen also S″ S′ und S in gerader Linie.

86. Für dieselben sechs Puncte können wir, indem wir nach einander die beiden Puncte auf jeder der in O sich schneidenden geraden Linien in umgekehrter Ordnung nehmen, noch dreimal drei Puncte construiren, die in gerader Linie liegen (80). Der allgemeine Satz ist demnach folgender:

Wenn sechs Puncte gegeben sind, die, paarweise genommen, auf drei geraden Linien liegen, welche entweder in demselben Puncte sich durchsetzen oder parallel sind, und wir verbinden die Puncte, welche auf je zwei dieser Geraden liegen, durch zwei neue gerade Linien mit einander (was auf doppelte Weise geschehen kann): so erhalten wir sechs Durchschnitte, von denen wir viermal drei zusammennehmen können, die in gerader Linie liegen.

87. Denselben Satz können wir auch in folgende Aussage einkleiden:

Fig. 30. *Wenn sich die drei Diagonalen eines Sechsecks in demselben Puncte schneiden, so liegen die beiden Durchschnitte zweier an einander stoſsender Seiten mit den bezüglich gegenüberliegenden Seiten und der Durchschnitt derjenigen Geraden, welche die äuſsersten Puncte jedes der beiden Paare an einander stoſsender Seiten verbindet, in ein und derselben geraden Linie. (Fig. 30.) Wenn wir ferner je zwei Winkel-Puncte des Sechsecks, zwischen welchen jedesmal noch ein Winkel-Punct liegt, durch gerade Linien verbinden, so schneiden sich die gegenüberstehenden dieser sechs Linien in drei Puncten, die ebenfalls in gerader Linie liegen.*

Es ist offenbar, daſs dieser Satz auch in der Umkehrung wahr bleibt.

88. Wir hätten aus den letzten Entwicklungen noch andere Resultate ziehen können. Wenn wir z. B. die Gleichung (1) der 84. Nummer nehmen und in derselben die Buchstaben α, α', α'' mit p, p′, p″ und a, a′, a″ mit q, q′, q″ vertauschen, so erhalten wir die Gleichung (5) der 57. Nummer, welche anzeigt, daſs diejenigen drei geraden Linien, die auf einer der Coordinaten-Axen die Segmente p, p′, p″, auf der andern die Segmente q, q′, q″ abschneiden, durch ein und denselben Punct gehen. Hierdurch sind also Constructionen von drei, in demselben Puncte sich schneidenden, geraden Linien gegeben: Constructionen, die sich durch eine bequeme Axen-Annahme und durch sonstige Bestimmungen noch vereinfachen lassen.

Fast jede symmetrisch angelegte analytische Rechnung wird uns, wenn wir auf die Form der verschiedenen Gleichungen, durch welche wir schrittweise vorwärts gehen, aufmerksam sind, zu neuen Folgerungen führen. Was diejenigen Sätze insbesondere betrifft, die sich auf den Durchschnitt dreier gerader Linien in demselben Puncte beziehen, so erscheinen dieselben meistens erst in ihrer natürlichen Verbindung, wenn wir sie auf solche zurückführen, welche darauf sich beziehen, daſs beliebig viele gewissen geometrischen Bedingungen Genüge leistende, gerade Linien durch ein und denselben Punct gehen. Eben so lassen sich Sätze über drei, in gerader Linie liegen-

de Puncte auf Sätze über lineare Oerter zurückführen, und nur indem wir diese discutiren, scheinen wir eine gewisse Vollständigkeit, mit der immer die gröfste Leichtigkeit verbunden ist, erreichen zu können. Hier mag die Construction der Gleichung:

$$A + A' + A'' = 0$$

in einer der frühern Nummer als Beleg dienen.

89. Die vorstehenden Entwicklungen knüpfen sich alle an Gleichungen an, die rücksichtlich der veränderlichen Gröfsen nur vom ersten Grade sind. Wenn wir Verbindungen von geraden Linien zu betrachten haben, so ist es jedoch öfters von Vortheil, ein System mehrerer gerader Linien durch eine einzige Gleichung von höherm Grade darzustellen, statt jede besondere gerade Linie durch eine besondere Gleichung vom ersten Grade zu bezeichnen.

Um zwei gerade Linien durch eine einzige Gleichung auszudrücken, brauchen wir blofs die lineare Gleichung jeder derselben auf Null zu bringen und dann die beiden Gleichungen mit einander zu multipliciren. Die Gleichung:

$$(y+ax+b)(y+\alpha x+\beta) = 0 \qquad (1)$$

bezeichnet das System zweier gerader Linien, die, einzeln genommen, durch die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y+ax+b &= 0, \\ y+\alpha x+\beta &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

gegeben sind, denn jede dieser letztern Gleichungen gibt eine Beziehung zwischen y und x, welche auch der Gleichung (1) Genüge thut, und dieser Gleichung geschieht auch nur in dem Falle Genüge, wenn einer der beiden Factoren ihres ersten Theiles verschwindet d. h. wenn eine der beiden Gleichungen (2) besteht. Die Gleichung (1) bestimmt also, wenn wir y und x alle möglichen Werthe beilegen, solche Puncte und nur solche Puncte, die auf einer der beiden durch (2) dargestellten geraden Linien liegen, sie ist die Gleichung des Systems dieser Linien. Die Gleichung (1) dürfen wir also durchaus nicht mit einer der beiden Gleichungen (2) als identisch nehmen. Dieselbe Bemerkung gilt auch dann noch, wenn die Gleichung einer dieser Linien sich auf

$$y = 0 \quad \text{oder} \quad x = 0$$

reducirt. Es bezeichnet folgende Gleichung z. B.:

$$y(y+\alpha x+\beta) = 0,$$

ein System zweier gerader Linien, von denen die eine mit der ersten Axe zusammenfällt, und wenn wir den Factor y fortlassen wollten, würden wir keine Rücksicht nehmen auf alle Puncte dieser letzten Linie. Auf entsprechende Weise ist:

$$xy = 0 \qquad (3)$$

die Gleichung des Systems der beiden Coordinaten-Axen. Dafs hierin mehr als eine blofse Bezeichnung liegt, werden wir an manigfachen Beispielen des dritten Abschnittes sehen, denn so wie wir die Gleichung (1) mit andern Gleichungen verbinden können, eben so gut können wir auch die letzte Gleichung (3) in die Rechnung einführen.

Die Gleichungen zweier gerader Linien, die beide durch einen festen Punct (y', x') gehen, haben folgende Formen:

$$\begin{aligned} (y-y')+a(x-x') &= 0, \\ (y-y')+\alpha(x-x') &= 0; \end{aligned}$$

und hiernach stellt folgende Gleichung:

$$(y-y')^2+(a+\alpha)(y'-y')(x-x')+a\alpha(x-x')^2 = 0, \qquad (4)$$

ein System zweier, sich im Puncte (y', x') schneidender, gerader Linien dar.

Aus den letzten Erörterungen ist klar, dafs wir im Allgemeinen ein System von n geraden Linien durch eine einzige Gleichung vom n. Grade darstellen können.

90. *Verwandlung der Coordinaten.*

Wenn wir die Coordinaten irgend eines Punctes für ein beliebiges geradliniges Coordinaten-System kennen, so können wir die, auf ein anderes System sich beziehenden, Coordinaten desselben Punctes vermittelst der ursprünglichen Coordinaten und derjenigen constanten Gröfsen ausdrücken, durch welche die Lage des zweiten Systems, rücksichtlich des erstern, bestimmt wird. Wenn wir daher in der Gleichung eines geometrischen Ortes auf die veränderlichen Gröfsen die eben bezeichneten Verwandlungs-Formeln anwenden, so erhalten wir die Gleichung desselben Ortes für das andere System. Da nun die gerade Linie immer durch eine lineare Gleichung dargestellt wird, so ist offenbar, dafs auch die gegenseitige Beziehung der Coordinaten desselben Punctes in zwei verschiedenen Systemen nothwendig eine lineare ist. Bezeichnen wir daher durch y, x die Coordinaten des ersten, durch y, x die Coordinaten des zweiten Systems, so ist die allgemeine Form der Ausdrücke, durch welche y und x in y und x gegeben sind, folgende:

$$\begin{aligned} \mathrm{y} &= \mathrm{y}' + \mathrm{m}y + \mathrm{n}x, \\ \mathrm{x} &= \mathrm{x}' + \mathrm{p}y + \mathrm{q}x; \end{aligned} \qquad (1)$$

wo y′, x′ und m, n, p, q noch zu bestimmende Constanten sind, die sich auf die gegenseitige Lage der beiden Coordinaten-Systeme beziehen.

Zuerst ist leicht ersichtlich, dafs die beiden Gleichungen (1) in folgende übergehen:

$$\begin{aligned} \mathrm{y} &= \mathrm{y}' + y, \\ \mathrm{x} &= \mathrm{x}' + x, \end{aligned}$$

wenn wir die Axen parallel, mit sich selbst verrücken, und durch y′ und x′ die, auf das erste System sich beziehenden, Coordinaten des neuen Anfangs-Punctes bezeichnen. Denn da offenbar für das zweite System (—y′) und (—x′) die Coordinaten des ursprünglichen Anfangs-Punctes sind, so müssen die Gleichungen (1), indem wir y und x verschwinden lassen:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{y}' + \mathrm{m}y + \mathrm{n}x, \\ 0 &= \mathrm{x}' + \mathrm{p}y + \mathrm{q}x, \end{aligned}$$

identisch seyn mit den Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{y}' + y, \\ 0 &= \mathrm{x}' + x; \end{aligned}$$

und hiernach erhalten wir:

$$\mathrm{m} = 1, \quad \mathrm{n} = 0, \quad \mathrm{p} = 0, \quad \mathrm{q} = 0.$$

Wenn wir den Anfangs-Punct der Coordinaten beibehalten, so reduciren sich die Gleichungen (1) auf folgende:

$$\begin{aligned} \mathrm{y} &= \mathrm{m}y + \mathrm{n}x, \\ \mathrm{x} &= \mathrm{p}y + \mathrm{q}x; \end{aligned} \qquad (2)$$

was auch schon sogleich daraus folgt, dafs y sowol als x verschwinden mufs, wenn wir zur Bestimmung des Anfangs-Punctes zugleich $y = 0$ und $x = 0$ setzen. Die Constanten m, n, p und q beziehen sich auf die Veränderung der Axen-Richtung. Um die Richtung der neuen Axen zu bezeichnen, wollen wir diejenigen Winkel, welche die erste und zweite neue Axe mit der ersten ursprünglichen Axe bilden φ und φ', diejenigen Winkel, welche dieselben Axen mit der zweiten ursprünglichen bilden, ψ und ψ' nennen,

wobei wir alle Winkel von den ursprünglichen Axen an nach der, ein für alle Mal angenommenen, Richtung bestimmen. Hiernach ist der Coordinaten-Winkel des ersten Systems, den wir durch ϑ bezeichnen:

$$\varphi - \psi = \varphi' - \psi' = \vartheta,$$

und der Coordinaten-Winkel des zweiten Systems, den wir durch ξ bezeichnen:

$$\varphi' - \varphi = \psi' - \psi = \xi.$$

Wenn wir in den Gleichungen (2) $x = 0$ setzen, so erhalten wir für Puncte, die auf der zweiten neuen Axe liegen:

$$\mathrm{y} = \mathrm{m}y,$$
$$\mathrm{x} = \mathrm{p}y;$$

und wenn wir $y = 0$ setzen für Puncte, die auf der ersten neuen Axe liegen:

$$\mathrm{y} = \mathrm{n}x,$$
$$\mathrm{x} = \mathrm{q}x.$$

Nehmen wir nun auf jeder dieser beiden Axen irgend einen beliebigen Punct, so gibt eine leichte Construction:

$$\mathrm{m} = \frac{\mathrm{y}}{y} = \frac{\sin\varphi'}{\sin\vartheta}, \quad \mathrm{n} = \frac{\mathrm{y}}{x} = \frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta},$$

$$\mathrm{p} = \frac{\mathrm{x}}{y} = -\frac{\sin\psi'}{\sin\vartheta}, \quad \mathrm{q} = \frac{\mathrm{x}}{x} = -\frac{\sin\psi}{\sin\vartheta}.$$

und hiernach gehen die Gleichungen (2) in folgende über:

$$\frac{y\sin\varphi' + x\sin\varphi}{\sin\vartheta},$$
$$\mathrm{x} = -\frac{y\sin\psi' + x\sin\psi}{\sin\vartheta}. \qquad (3)$$

Wenn das Coordinaten-System, zu dem wir übergehen, ein rechtwinkliges ist, so haben wir $\varphi' = (\varphi + \frac{\pi}{2})$ und $\psi' = (\psi + \frac{\pi}{2})$, mithin:

$$\sin\varphi' = \cos\varphi, \quad \sin\psi' = \cos\psi,$$

wonach die Gleichungen (3) folgende Formen annehmen:

$$\mathrm{y} = \frac{y\cos\varphi + x\sin\varphi}{\sin\vartheta},$$
$$\mathrm{x} = -\frac{y\cos\psi + x\sin\psi}{\sin\vartheta}. \qquad (4)$$

Wenn das ursprüngliche Coordinaten-System ein rechtwinkliges ist, so haben wir $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = (\psi + \frac{\pi}{2})\,\varphi' = (\psi' + \text{und}\,\frac{\pi}{2})$, mithin:

$$\sin\vartheta = 1, \quad \sin\psi = -\cos\varphi, \quad \sin\psi' = -\cos\varphi',$$

wonach wir aus (3) folgende Gleichungen erhalten:

$$\mathrm{y} = y\sin\varphi' + x\sin\varphi,$$
$$\mathrm{y} = y\cos\varphi' + x\cos\varphi. \qquad (5)$$

Wenn wir endlich von einem rechtwinkligen System zu einem neuen rechtwinkligen System übergehen, so verwandeln sich die letzten Gleichungen (5), weil alsdann:

$$\sin\varphi' = \cos\varphi, \quad \cos\varphi' = -\sin\varphi,$$

in folgende:

$$\mathrm{y} = \quad y\cos\varphi + x\sin\varphi,$$
$$\mathrm{x} = -y\sin\varphi + x\cos\varphi. \qquad (6)$$

Bei der vorstehenden, bekannten, Entwicklungs-Weise der Verwandlungs-Formeln, kommt alles auf die Form der beiden Gleichungen (1) an. Wollen wir diese Form nicht geradezu annehmen, so können wir auch auf folgende Art verfahren. Wir nehmen nemlich für das ursprüngliche System zunächst ein rechtwinkliges und gehen, mit Beibehaltung des Anfangs-Punctes, zu einem, aufserdem beliebigen, zweiten Systeme über. Alsdann erhalten wir, der obigen Winkel-Bezeichnung gemäfs, für die Gleichung einer geraden Linie, die mit der ersten ursprünglichen Axe irgend einen Winkel ε, also mit der ersten Axe des zweiten Systems, dessen Coordinaten-Winkel $(\varphi'-\varphi)$ ist, einen Winkel $(\varepsilon-\varphi)$ bildet, folgende beiden Gleichungen:

$$\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = tang\ \varepsilon$$

$$\frac{y}{x} = \frac{sin(\varepsilon-\varphi)}{sin(\varphi'-\varepsilon)}.$$

von denen die erste sich auf das ursprüngliche, 'die zweite sich auf dasjenige System bezieht, zu dem wir übergehen wollen. Entwickeln wir aus der zweiten Gleichung den Werth von *tang* ε und substituiren ihn in die erste, so kommt:

$$\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = \frac{y\sin\varphi' + x\sin\varphi}{y\cos\varphi' + x\sin\varphi}.$$

Wir haben also:

$$\mathrm{y} = \mu(y\sin\varphi' + x\sin\varphi),$$
$$\mathrm{y} = \mu(y\cos\varphi' + x\cos\varphi), \qquad (7)$$

indem wir in beiden Gleichungen durch μ denselben, noch zu bestimmenden Factor, bezeichnen, welcher, der linearen Beziehung der Coordinaten beider Systeme zu einander wegen, unabhängig von diesen Coordinaten seyn mufs. Dieser Factor ist also leicht zu bestimmen, und wir sehen sogleich, dafs er gleich Eins ist, denn für Puncte der ersten neuen Axe haben wir $\mathrm{y} = y\ sin\ \varphi$, und wir müssen offenbar zu derselben Gleichung kommen, wenn wir in der ersten der Gleichungen (7): $y = 0$ setzen. Hiernach werden die Gleichungen (7) identisch mit den Gleichungen (5), und aus diesen können wir leicht die übrigen Verwandlungs-Formeln herleiten:

Zweiter Abschnitt.

Zur Theorie des Kreises.

91. Wenn wir durch R den Abstand irgend zweier Puncte (y'', x'') und (y', x') von einander bezeichnen, so haben wir:

$$(y''-y')^2+2(y''-y')(x''-x')\cos\beta+(x''-x')^2=R^2,$$

wo β jedes beliebige seyn kann und den Coordinaten-Winkel bedeutet. Betrachten wir einen dieser beiden Puncte, etwa (y', x'), als fest und lassen um diesen festen Punct sich den andern Punct (y'', x'') so bewegen, daſs der Abstand beider Puncte von einander immer derselbe bleibt, so beschreibt der zweite Punct einen Kreis. Dieſs heiſst, buchstäblich in die Sprache der analytischen Geometrie übertragen: wenn wir die Coordinaten y'' und x'' als veränderliche Gröſsen betrachten (und deshalb die Accente fortlassen) so ist obige Gleichung:

$$(y-y')^2+2(y-y')(x-x')\cos\beta+(x-x')^2=R^2, \qquad (1)$$

die allgemeinste Gleichung eines Kreises, dessen Radius gleich R ist, und dessen Mittelpunct durch die Coordinaten y' und x' bestimmt wird. Nehmen wir den Mittelpunct des Kreises zum Anfangs-Puncte der Coordinaten, so ist:

$$y'=0, \quad x'=0,$$

und die Gleichung des Kreises wird folgende:

$$y^2+2yx\cos\beta+x^2=R^2 \qquad (2)$$

Ist $\beta=\frac{\pi}{2}$ mithin $\cos\beta=0$, so gehen die beiden Gleichungen (1) und (2) in folgende über:

$$(y-y')^2+(x-x')^2=R^2,$$

$$y^2+x^2=R^2.$$

In diesem Abschnitte werden wir uns vorzugsweise rechtwinkliger Coordinaten, mithin der beiden letzten Gleichungen bedienen; in dem folgenden Abschnitte aber umfassen wir die allgemeinste Gleichung des Kreises in der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades.

92. Seyen:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\varrho^2, \qquad (1)$$

$$(y-b)^2+(x-a)^2=r^2, \qquad (2)$$

die Gleichungen zweier sich schneidender Kreise. Verbinden wir diese Gleichungen auf irgend eine beliebige Weise, so kommen wir zu der Gleichung eines geometrischen Ortes, der durch die Durchschnitts-Puncte der beiden Kreise geht. Wenn wir z. B. abziehen, kommt:

$$2(b-\beta)y+2(a-\alpha)x = \varrho^2-(\alpha^2+\beta^2) - r^2+(a^2+b^2). \qquad (3)$$

Weil diese Gleichung nun eine Folge der beiden erstern Gleichungen ist, so bekommen wir dieselben Werthe für y und x, gleichviel ob wir diese Werthe zwischen den beiden Gleichungen (1) und (2), oder zwischen einer beliebigen derselben und der dritten Gleichung eliminiren. Zwischen zweien Gleichungen die veränderlichen Gröſsen eliminiren heiſst aber die Coordinaten der Durchschnitts-Puncte der beiden durch jene Gleichungen dargestellten Oerter suchen. Wir müssen indeſs hierbei aufmerksam seyn auf den Grad der verschiedenen Gleichungen; *) hier haben wir den Fall, daſs dieser sich reducirt, wir kommen zu einer Gleichung vom ersten Grade, mithin zu der Gleichung einer geraden Linie. Diese gerade Linie geht also durch die Durchschnitte der beiden Kreise, sie ist die gemeinschaftliche Chorde derselben. Hierin liegt zugleich der Beweis, daſs zwei Kreise sich in nicht mehr als zwei Puncten schneiden können.

Wenn die beiden gegebenen Kreise (1) und (2) einander berühren, so bezeichnet die dritte Gleichung die gemeinschaftliche Tangente derselben. Die Durchschnitte der Kreise vereinigen sich nemlich in einem einzigen Punct: wir finden durch Verbindung ihrer Glei-

*) Wenn wir zwei Gleichungen so verbinden, daſs der Grad der resultirenden Gleichung den Grad der gegebenen Gleichungen übersteigt, so erhalten wir zwar noch immer die Durchschnitts-Puncte der beiden gegebenen Oerter durch den Durchschnitt des dritten Ortes mit einem derselben, aber im Allgemeinen gibt diese Construction zugleich noch fremde Puncte. Nehmen wir z. B. die Gleichungen zweier gerader Linien:

$$\left.\begin{array}{l} y = ax + b, \\ y = \alpha x + \beta, \end{array}\right\} \quad (a)$$

quadriren beide Theile ihrer Gleichungen, so ergibt sich:

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = (ax+b)^2, \\ y^2 = (\alpha x+\beta)^2, \end{array}\right\} \quad (b)$$

und wenn wir addiren, so kommt:

$$2y^2 = (ax+b)^2+(\alpha x+\beta)^2. \qquad (c)$$

Die Curve, welche durch diese Gleichung dargestellt wird, geht durch den Durchschnitt der geraden Linien, denn die Gleichung (c) wird befriedigt, wenn die beiden Gleichungen (a) zugleich Statt finden; sie schneidet aber im Allgemeinen jede der beiden geraden Linien noch in einem zweiten Puncte. Hiervon können wir uns sogleich durch Elimination der veränderlichen Gröſsen zwischen den bezüglichen Gleichungen überzeugen. Um die zweiten Durchschnitts-Puncte auf der Stelle näher zu bezeichnen, bemerken wir, daſs die Gleichungen (b) unter folgende Formen:

$$(y-(ax+b))(y+(ax+b)) = o,$$
$$(y-(\alpha x+\beta))(y+(\alpha x+\beta)) = o,$$

gebracht werden können, und also jede das System zweier geraden Linien bezeichnet. Da nun die Gleichung (c) eine unmittelbare Folge der beiden letzten Gleichungen ist, so ist offenbar, daſs der durch (c) dargestellte geometrische Ort durch die Durchschnitts-Puncte des ersten Systems gerader Linien mit dem zweiten Systeme, also durch vier schon bestimmte Puncte geht.

chungen im Allgemeinen zwei gleiche Werthe für jede der gleichnamigen Coordinaten; und also finden wir dieselben gleichen Werthe, wenn wir die Gleichung (3) mit einer der Kreis-Gleichungen zusammenstellen. Daher berührt die durch (3) dargestellte gerade Linie beide Kreise, und zwar in dem gemeinschaftlichen Berührungs-Puncte.

Wenn die beiden gegebenen Kreise keinen Punct gemeinschaftlich haben, so können ihre Gleichungen, analytisch-geometrisch genommen, nicht zugleich Statt finden; durch Elimination kommen wir zu imaginären Werthen für y und x. Jede der beiden Gleichungen (1) und (2) für sich bezeichnet aber einen bestimmten Kreis und wenn wir dieselben algebraisch verbinden, so kommen wir zu neuen Gleichungen, die im Allgemeinen wieder reelle Linien bezeichnen. Wenn die Gleichungen dieser Linien wiederum vom zweiten Grade seyn sollen, so können wir nur zu neuen Kreis-Gleichungen kommen. Keiner dieser Kreise schneidet einen der beiden gegebenen, und ihre Gleichung kann, analytisch genommen, nicht zugleich mit einer der beiden Kreis-Gleichungen bestehen, d.h. durch Verbindung derselben würden wir zu imaginären Werthen von y und x kommen. Verbinden wir die Gleichungen der beiden gegebenen Kreise, wie wir es oben gethan haben, indem wir ihre Gleichungen von einander abziehen, so finden wir die Gleichung (3) einer immer construirbaren geraden Linie, und diese Gleichung steht in derselben algebraischen Beziehung zu den Gleichungen der sich nicht schneidenden Kreise, wie die Gleichung der gemeinschaftlichen Chorde oder Tangente zu den Gleichungen zweier sich schneidenden oder sich berührenden Kreise. Die in Rede stehende gerade Linie schneidet keinen der beiden gegebenen Kreise.

93. Wir werden in dem Folgenden die durch die Gleichung (3) dargestellte gerade Linie, die beiden Kreise (1) und (2) mögen sich schneiden, berühren oder keinen Punct gemein haben, (was von der Bestimmung der Constanten abhängt), allgemein mit dem Namen: „Chordale der beiden Kreise“ bezeichnen. Der Durchschnitt dieser geraden Linie mit derjenigen, welche die Mittelpuncte der Kreise verbindet, wollen wir den „Chordal-Punct der beiden Kreise“ nennen. *)

94. Wir wollen nun gleich schon die Gleichungen dreier gegebenen Kreise zusammenstellen:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\varrho^2,$$
$$(y-b)^2+(x-a)^2=r^2,$$
$$(y-B)^2+(x-A)^2=R^2,$$

und diese der Kürze halber durch:

$$A=o, \quad B=o, \quad C=o, \qquad (4)$$

bezeichnen. Ziehen wir diese Gleichungen, paarweise genommen, von einander ab, so kommt:

$$A-B=o, \quad A-C=o, \quad B-C=o, \qquad (5)$$

für die Gleichungen der Chordalen je zweier dieser Kreise. Zwei dieser Gleichungen bedingen die dritte, was uns eine blofse Subtraction zeigt. Es schneiden sich also die drei Chordalen in demselben Puncte.

*) Herr *Poncelet* hat die Linie, welche wir Chordale nennen, im Falle, dafs die bezüglichen Kreise sich nicht schneiden, „*corde idéale*“ genannt; gebräuchlicher ist der von H. *Gaultier* eingeführte Ausdruck: „*axe radical*“. Unser Chordal-Punct zweier Kreise heifst: „*point radical de deux cercles*“

Es gibt für je drei beliebige Kreise einen solchen Punct, wir nennen ihn kurz: „Chordal-Punct der drei Kreise."*) Wir werden im Laufe dieses Abschnittes diesem Puncte eine besondere Aufmerksamkeit schenken.

Je nachdem wir drei Kreise zusammenstellen, die sich schneiden, berühren (gleichviel ob innerhalb oder aufserhalb) oder keinen Punct gemein haben, erhalten wir $\frac{3.4.5}{1.2.3} = 10$ verchiedene Fälle, bei deren Aufzählung wir hier nicht verweilen. Wenn — um einige Beispiele anzuführen — die drei gegebenen Kreise sich alle drei schneiden, so gehen die gemeinschaftlichen Chorden je zweier derselben durch ein und denselben Punct
Fig. 1. (Fig. 1); berühren sich die Kreise zu je zwei, so laufen die gemeinschaftlichen Tan-
Fig. 2. genten in demselben Puncte zusammen (Fig. 2); wenn zwei sich nicht schneidende Kreise und ein dritter Kreis, der einen derselben berührt und den andern schneidet, gegeben sind, so vereinigen sich die Chordale der beiden ersten Kreise, (die keinen derselben schneidet) und die dem dritten Kreise mit diesen gemeinsame Tangente und Chorde in
Fig. 3. demselben Puncte. (Fig. 3)

95. In der Gleichung jeder der drei Chordalen kommen nur die Constanten aus den Gleichungen derjenigen beiden Kreise vor, zu denen sie gehört. Nehmen wir z. B. die dritte der Gleichungen (5), so kommen in derselben weder der Radius noch die Mittelpuncts-Coordinaten des ersten der durch (4) bezeichneten Kreise vor, und diese Gleichung bleibt daher dieselbe, mit welchem Radius wir diesen Kreis beschreiben, und wo wir auch den Mittelpunct desselben annehmen mögen. Die Gleichungen der beiden andern Chordalen aber verändern sich, jedoch so dafs sie immer die dritte:

$$B - C = 0 \qquad (6)$$

bedingen. Sind also zwei Kreise gegeben, für deren Gleichungen wir folgende nehmen:

$$B = 0, \quad C = 0,$$

und stellen wir mit diesen beiden Kreisen irgend einen dritten Kreis zusammen, dessen Gleichung

$$A = 0$$

ist, so schneiden sich die Chordalen des letztern und jedes der erstern Kreise in einem Puncte, der, wie wir auch den dritten Kreis bestimmen mögen, immer auf der Chordalen (6) der beiden festen und unveränderlichen Kreise liegt.

Fig. 4. 96. Dieser Satz dient dazu, um auf die leichteste Art die Chordale zweier gegebener, sich nicht schneidender, Kreise zu bestimmen. Denn, beschreibt man irgend einen Kreis, der die beiden gegebenen Kreise (c und C) schneidet, so bestimmt der Durchschnitt der beiden gemeinschaftliche Chorden (mn und MN) einen Punct (S) der gesuchten Linie. Durch Wiederholung derselben Construction bestimmen wir einen zweiten Punct dieser Linie.

Auf dieselbe Weise bestimmt sich der Chordal-Punct dreier gegebener Kreise im Falle, dafs sich dieselben nicht schneiden. Die Construction wird am einfachsten, wenn man den beliebigen schneidenden Kreis beidesmal so wählt, dafs er alle drei gegebene Kreise schneidet. In der 4. Figur haben wir den Chordal-Punct der drei Kreise γ, c und C, wie durchgehends geschehen soll, durch P bezeichnet.

*) Im Französischen: *„point radical des trois cercles"* oder blofs *„point radical"*.

97. Wenn wir die allgemeine Gleichung der Chordalen:

$$2(b-\beta)y+2(a-\alpha)x=\varrho^2-(\alpha^2+\beta^2)-r^2+(a^2+b^2),$$

mit der Gleichung der Central-Linie der bezüglichen beiden Kreise, für welche wir auf der Stelle folgende Gleichung finden:

$$(a-\alpha)y-(b-\beta)x=m,$$

wo m eine Constante bezeichnet, vergleichen, so ergibt sich, daſs die beiden in Rede stehenden geraden Linien auf einander senkrecht sind. Auch diesen Umstand können wir bei der Construction der Chordalen zweier sich nicht schneidender Kreise benutzen.

98. Seyen wie vorher: Fig. 5.

$$\begin{aligned}(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2&=\varrho^2,\\(y-b)^2+(x-a)^2&=r^2,\end{aligned}\qquad(1)$$

wo wir jeden beliebigen Punct zum Anfangs-Puncte der Coordinaten nehmen können, die Gleichungen irgend zweier Kreise (γ und c); wie früher erhalten wir alsdann:

$$2(b-\beta)y+2(a-\alpha)x=\varrho^2-(\alpha^2+\beta^2)-r^2+(a^2+b^2),\qquad(2)$$

für die Gleichung der Chordalen. Wenn wir nun irgend einen Punct derselben, O, als Anfangs-Punct der Coordinaten betrachten, so muſs die Form der letzten Gleichung folgende seyn:

$$2(b-\beta)y+2(a-\alpha)x=0,$$

und dieſs führt zu folgender Bedingungs-Gleichung:

$$\varrho^2-(\alpha^2+\beta^2)=r^2-(a^2+b^2).\qquad(3)$$

Um diese Gleichung geometrisch zu deuten, müssen wir zwei Fälle unterscheiden; es kann erstens der Punct der Chordalen, den wir zum Anfangs-Puncte genommen haben, auſserhalb beider Kreise liegen, und zweitens, wenn nemlich die beiden Kreise sich schneiden, innerhalb. Zuvörderst wollen wir den ersten Fall betrachten. Da die Tangente auf dem Radius, der durch den Berührungs-Punct geht, senkrecht steht, und $(\alpha^2+\beta^2)$ und (a^2+b^2) die Quadrate der Abstände der Mittelpuncte der beiden gegebenen Kreise vom Anfangs-Puncte der Coordinaten bedeuten, so folgt aus der Gleichung (2) mit Beziehung auf die 5. Figur:

$$O\mu'=Om'.$$

Ziehen wir also von einem Puncte, den wir beliebig auf der Chordalen zweier Kreise annehmen, Tangenten an diese Kreise, so sind diese Tangenten, bis zum Berührungs-Puncte genommen, einander gleich.

Im zweiten Falle, der dadurch angezeigt wird, daſs ϱ^2 und r^2 gröſser sind als $(\alpha^2+\beta^2)$ und (a^2+b^2) gibt die Construction der beiden Theile der Gleichung (3) die Quadrate derjenigen halben Chorden der beiden Kreise, welche in dem Puncte O senkrecht stehen, auf den durch eben diesen Punct gehenden Radien; oder mit andern Worten die Quadrate derjenigen halben Chorden beider Kreise, die in O halbirt werden. Und hieraus folgt denn mit Beziehung auf die 6. Figur: Fig. 6.

$$\mu\mu'=mm'.$$

Wenn also zwei Chorden zweier Kreise sich gegenseitig in einem Puncte der gemeinschaftlichen Chorde der beiden Kreise halbiren, so sind dieselben einander gleich.

99. An den ersten Fall der vorigen Nummer schlieſst sich unmittelbar folgender Satz an:

Die Chordale zweier Kreise halbirt die gemeinschaftlichen Tangenten derselben, wenn überhaupt gemeinschaftliche Tangenten möglich sind.

100. Wenn wir zu obigen beiden Kreise noch einen dritten Kreis hinzufügen, für dessen Gleichung wir folgende nehmen:

$$(y-B)^2+(x-A)^2 = R^2,$$

so kommt für die Chordale dieses und des ersten der Kreise (1):

$$2(B-\beta)y+2(A-\alpha)x = \varrho^2-(\alpha^2+\beta^2)-r^2+(a^2+b^2). \qquad (4)$$

Nehmen wir nun den Anfangs-Punct der Coordinaten in dem Durchschnitte von (2) und (4), also im Chordal-Puncte der drei gegebenen Kreise, so erhalten wir, ähnlich wie oben:

$$\varrho^2-(\alpha^2+\beta^2) = r^2-(a^2+b^2) = R^2-(A^2+B^2);$$

Fig. 5. d. h., wenn wir den Fall der 5. Figur nehmen:

$$P\mu = Pm = PM.$$

Ziehen wir also vom Chordal-Puncte, im Falle daſs derselbe auſserhalb liegt, Tangenten an die drei Kreise, so sind diese Tangenten einander gleich.

Was den andern Fall betrifft, so hat man folgenden Satz:

Wenn man durch den Durchschnitt der gemeinschaftlichen Chorden dreier sich schneidenden Kreise, in jeden dieser Kreise eine neue Chorde legt, die auf dem, durch denselben Punct gehenden Radius desselben senkrecht steht, so sind die so bestimmten drei Chorden einander gleich.

101. Aus den vorigen beiden Nummern ergeben sich noch folgende Sätze:

Beschreibt man aus einem beliebigen Puncte der Chordalen zweier Kreise mit einem Radius, der gleich den, von diesem Puncte an die gegebenen Kreise gezogenen Tangenten ist, einen neuen Kreis, so schneidet derselbe die gegebenen unter rechten Winkeln; oder, der Ort der Mittelpuncte aller Kreise, die zwei gegebene unter rechten Winkeln schneiden, ist die Chordale derselben.

Sind drei Kreise gegeben, so existirt ein einziger Kreis, der alle drei unter rechten Winkeln schneidet, derjenige Kreis nemlich, der aus dem Chordal-Puncte, mit einem Radius der den aus diesem Puncte an die gegebenen Kreise gezogenen Tangenten gleich ist, beschrieben wird. Diesen Kreis können wir den Orthogonal-Kreis nennen. Es existirt kein solcher Kreis, wenn der Chordal-Punct innerhalb der gegebenen drei Kreise fällt.

102. Wie wir in dem Vorigen den Begriff der Chordalen zweier beliebiger Kreise aufgestellt haben, so können wir auch in demselben Sinne von der Chordalen eines Kreises und eines Punctes sprechen. Hierzu berechtigt uns nemlich die Verbindung der beiden Gleichungen:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = \varrho^2, \qquad (1)$$

$$(y-b)^2+(x-a)^2 = 0, \qquad (2)$$

wo wir durch die zweite Gleichung einen Punct bezeichnen, dessen Coordinaten b und a sind, denn nur wenn wir zugleich:

$$y = b, \quad x = a,$$

setzen, geschieht dieser Gleichung Genüge. Ziehen wir die beiden Gleichungen (1) und (2) von einander ab, ohne dabei weiter an den Durchschnitt der durch dieselben dargestellten Oerter zu denken, so kommt, ähnlich wie früher:

$$2(b-\beta)y+2(a-\alpha)x = \varrho^2-(\alpha^2+\beta^2)+(a^2+b^2), \qquad (3)$$

die Gleichung einer immer construirbaren geraden Linie, die sich uns in Beziehung auf die Art, wie wir dieselbe erhalten haben, gewissermaaſsen als eine gemeinschaftliche (ideale)

Chorde von Punct und Kreis darstellt, und die wir eben aus diesem Grunde die Chordale von Punct und Kreis genannt haben.

103. Wenn wir den gegebenen Punct zum Anfangs-Puncte der Coordinaten wählen, und die erste Axe durch den Mittelpunct des Kreises legen, so ist:

$$b = 0, \quad a = 0, \quad \beta = 0;$$

und die letzte Gleichung geht in folgende, leicht zu construirende, über:

$$2\alpha x = \alpha^2 - \varrho^2 = (\alpha - \varrho)(\alpha + \varrho). \qquad (4)$$

Die Chordale von Punct und Kreis fällt immer aufserhalb des Kreises; diefs ist sogleich ersichtlich aus der letzten Gleichung, wenn wir dieselbe unter folgende Form bringen:

$$x = (\alpha - \varrho)\,\frac{\alpha + \varrho}{2\alpha};$$

denn, liegt der gegebene Punct aufserhalb, so ist α gröfser als ϱ, mithin $\frac{\alpha+\varrho}{2\alpha}$ gröfser als Eins und folglich:

$$x < \alpha - \varrho,$$

also mit Beziehung auf die 7. Figur: Fig. 7.

$$OP < OK.$$

Liegt hingegen der gegebene Punct innerhalb, so ist α kleiner als ϱ, mithin $\frac{\alpha+\varrho}{2\alpha}$ kleiner als Eins und folglich

$$-x > \varrho - \alpha;$$

und wenn wir diesen Ausdruck auf die 8. Figur übertragen: Fig. 8.

$$OP > OK.$$

Nehmen wir endlich den gegebenen Punct auf dem Umfange des Kreises an, setzen wir also $\alpha = \varrho$, so geht die Gleichung (4) in folgende über:

$$x = 0$$

also, wie zu erwarten stand, in die Gleichung der Tangente in dem gegebenen Puncte.

104. Nehmen wir den Anfangs-Punct der Coordinaten in irgend einem Puncte der Chordalen von Kreis und Punct an, so ergibt sich aus der Form der allgemeinen Gleichung dieser Linie (3):

$$\varrho^2 - (\alpha^2 + \beta^2) = a^2 + b^2,$$

als Bedingungs-Gleichung zwischen den Constanten der Gleichungen (1) und (2). Auf die 7. und 8. Figur, wo PS die Chordale ist, übertragen, heifst diefs: Fig. 7, 8.

$$SO = S\mu.$$

Zieht man also von irgend einem Puncte der Chordalen von Punct und Kreis eine Tangente an letztern, so ist dieselbe gleich der Entfernung des auf der Chordalen beliebig angenommenen von dem gegebenen Puncte.

Hieraus folgt ferner, im Falle der gegebene Punct aufserhalb liegt, dafs die Chordale die beiden von dem Puncte an den Kreis gezogenen und bis zu den Berührungs-Puncten genommenen Tangenten halbirt. Für den angezeigten Fall können wir hierauf die Construction der in Rede stehenden Chordalen gründen. Es ist $S'O = S'\mu'$.

105. Wir können endlich auch noch, der Uebereinstimmung mit dem Vorigen wegen, von der Chordalen zweier Puncte sprechen. Denn, setzen wir in der Gleichung (4) $\varrho = 0$, so reducirt sich auch der Kreis (1) auf einen Punct und diese Gleichung gibt alsdann folgende: Fig. 7.

$$x = \frac{\alpha}{2}.$$

Diese Gleichung zeigt, wenn wir auf die Bestimmung der Coordinaten-Axen Rücksicht nehmen, daſs die Chordale zweier Puncte diejenige gerade Linie ist, welche in der Mitte der Geraden, die die beiden Puncte verbindet, auf derselben senkrecht steht. Die allgemeinste Gleichung dieser Linie hätten wir bekommen, wenn wir die beiden Gleichungen:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = o,$$

$$(y-b)^2+(x-a)^2 = o,$$

von einander abgezogen hätten. Jeder Punct dieser Chordalen steht gleichweit von den gegebenen Puncten ab.

106. Aus den letzten Erörterungen ist ersichtlich, daſs, wenn auch unter den Gleichungen, die wir früher (94) durch:

$$A = o, \quad B = o, \quad C = o, \qquad (5)$$

bezeichnet haben, Gleichungen von folgender Form:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = o,$$

sich befinden, dennoch immer die Gleichungen

$$A-B=o, \quad A-C=o, \quad B-C=o,$$

sich leicht construiren lassen, und drei gerade Linien bedeuten, die durch ein und denselben Punct gehen, nemlich durch den Chordal-Punct der drei gegebenen Oerter (5). Und ferner, wie wir auch die Constanten in einer der Gleichungen (5), etwa in der ersten, (A = o), bestimmen mögen: der Durchschnitt der beiden Chordalen:

$$A-B=o, \quad A-C=o,$$

die mit jeder andern Constanten-Bestimmung ihre Lage ändern, erfolgt immer auf ein und derselben geraden Linie, auf der Chordalen der beiden festen und unveränderlichen Oerter (B = o) und (C = o).

Hiernach kommen wir zu einer Reihe von mannigfaltigen Sätzen, oder vielmehr zu besondern Fällen eines allgemeinen Satzes, wenn wir Puncte und Kreise auf verschiedene Weise zu drei combiniren. Wir haben in dem Obigen drei Kreise zusammengestellt; wir können nun auch zwei Kreise und einen Punct zusammenstellen, und einmal den Punct, das andere Mal einen der beiden Kreise sich verändern lassen, ferner zwei Puncte und einen Kreis zusammenstellen und auch hier wiederum einmal den Kreis, das andere Mal einen der beiden Puncte als veränderlich betrachten; endlich können wir auch drei Puncte nehmen. Je nachdem nun die drei zusammengestellten Oerter bestimmte Lagen in Beziehung auf einander haben, können wir die Aussage der besondern Fälle verschiedentlich einkleiden. Ich hebe die folgenden Beispiele hervor.

107. Wir wollen zuerst einen Kreis und zwei Puncte zusammenstellen und überdieſs annehmen, einer der Puncte befinde sich auf dem Umfange des Kreises. Für eine der Chordalen bekommen wir also die Tangente, welche in dem letztgenannten Puncte den Kreis berührt; für eine andere die gerade Linie, die auf derjenigen, welche die gegebenen Puncte verbindet, in der Mitte derselben senkrecht steht. Diese beiden Linien ändern ihre Lage, wenn wir denjenigen Punct, der auf dem Kreise sich befindet, auf demselben fortrücken lassen; sie schneiden sich aber immer in einem Puncte der Chordalen, die zu dem andern Puncte und dem Kreise gehört. Das allgemeine Schema der 106. Nummer enthält also folgenden speciellen Satz:

Fig. 9. *Wenn wir von irgend einem festen Puncte (R), innerhalb oder auſserhalb eines gegebenen Kreises, nach einem beliebigen Puncte desselben (r,(ρ)) eine gerade Linie*

(Rr, (Rρ)) ziehen, so schneiden sich das Perpendikel in der Mitte derselben (MS, (μσ)) und die Tangente in letzterm Puncte (r, (ρ)) in irgend einem Puncte (S, (σ)) der, wie auch jeder auf dem Umfange des Kreises fortrücken mag, immer auf derselben geraden Linie bleibt.

108. Wenn wir, übrigens bei derselben Zusammenstellung als vorhin, annehmen, der feste Punct R liege auf dem Kreise, der andere aber r liege aufserhalb, übrigens aber durchaus beliebig, so erhalten wir folgenden Satz: Fig. 10.

Wenn wir von einem beliebigen Puncte (r) nach einem festen Puncte (R) auf dem Umfange eines gegebenen Kreises eine gerade Linie (Rr) ziehen, und in der Mitte derselben ein Perpendikel errichten, so schneidet dieses Perpendikel (MS) die gerade Linie (tt), welche die beiden von demselben Puncte (r) an den Kreis gezogenen Tangenten halbirt, in irgend einem Puncte (S), der, wo wir auch immer jenen beliebigen Punct annehmen mögen, stets auf der Tangente im festen Puncte (R) liegt.

109. Wir haben den allgemeinern Satz, der beiden vorigen in sich fast, wenn wir durchaus keine Bestimmung über die Lage der beiden Puncte R und r machen. Wir verweilen indefs hierbei nicht länger, und nehmen gleich, indem wir nach wie vor, zwei Puncte und einen Kreis betrachten, nun nicht mehr einen der Puncte, sondern den Kreis als veränderlich. So ergibt sich folgender Satz:

Wenn irgend zwei Puncte gegeben sind, und man beschreibt einen beliebigen Kreis, so schneiden sich die Chordalen für diesen Kreis und jeden der beiden Puncte, auf dem in der Mitte der geraden Linie, welche jene Puncte verbindet, errichteten Perpendikel. Nehmen wir also an, dafs der beliebige Kreis die beiden gegebenen Puncte R und r nicht umschliefst, so schneiden sich auf der eben bezeichneten geraden Linie SS die beiden geraden Linien TT und tt, welche die von R und r an den beliebigen Kreis gezogenen Tangenten-Paare halbiren, wie wir auch immer diesen Kreis bestimmen mögen. (*Fig.* 11.) *Geht der beliebige Kreis immer durch einen der beiden festen Puncte, durch r, so schneidet die Tangente in diesem Puncte die Gerade TT, welche die von dem andern Puncte R an den Kreis gezogenen Tangenten halbirt, immer in einem Puncte S der besagten geraden Linie.* (Fig. 12.) Fig. 11. 12

110. Wir wollen ferner zwei Kreise mit einem Puncte zusammenstellen und diesen Punct als beliebig betrachten. Der entsprechende Satz ist folgender: Fig. 13.

Wenn man von irgend einem Puncte (R) zwei Tangenten-Paare an zwei feste und unveränderliche Kreise zieht, so schneiden sich die beiden geraden Linien (TT, tt), von denen jede die Tangenten eines Paares halbirt, in einem Puncte (S), der immer, wo wir auch den beliebigen Punct (R) annehmen mögen, auf einer geraden Linie, der Chordalen beider Kreise, bleibt. Wenn insbesondere jener Punct (R) auf dem Umfange eines der beiden Kreise angenommen wird, so schneidet die Tangente in diesem Puncte (RS) die gerade Linie TT, welche die von demselben Puncte an den andern Kreis gezogenen Tangenten halbirt, immer auf der besagten geraden Linie.

111. Wir können endlich auch, bei gleicher Zusammenstellung, nicht den Punct, sondern einen der beiden Kreise sich ändern lassen. Wir heben hier nur folgenden speciellen Fall hervor:

Fig. 14. *Wenn ein Kreis (C) und ein Punct (R) gegeben ist, und wir beschreiben irgend einen neuen Kreis (γ), der durch den gegebenen Punct (R) geht und den gegebenen Kreis schneidet, so schneiden sich die Tangente des beliebigen Kreises im gegebenen Puncte und die gemeinschaftliche Chorde desselben mit dem gegebenen Kreise immer auf derselben geraden Linie (SS) der Chordalen der beiden gegebenen Oerter.*

112. Wenn wir zuletzt, um auch diesen Fall zu erwähnen, drei Puncte zusammenstellen, so gibt unser allgemeines Schema den bekannten und auch im vorigen Abschnitte bewiesenen Satz, dafs *die drei, in den Mitten der drei Seiten eines beliebigen Dreiecks errichteten, Perpendikel sich in demselben Puncte schneiden.* Wir haben also diesen Satz bewiesen, und der Beweis läfst an Strenge durchaus nichts zu wünschen übrig, indem wir die Gleichungen der Winkel-Puncte des Dreiecks, Gleichungen unter folgender Form:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = o,$$
$$(y-b)^2+(x-a)^2 = o,$$
$$(y-B)^2+(x-A)^2 = o,$$

mit einander verbunden haben. Und zugleich (105) ist erwiesen, dafs der Durchschnitts-Punct der drei Perpendikel von den Winkel-Puncten des Dreiecks gleichweit absteht, mithin der Mittelpunct des umschriebenen Kreises ist.

113. Die vorstehenden Entwicklungen sind für unsere Absicht mehr als genügend. Wir erwähnen nur noch folgende Sätze, deren Beweis in den frühern Nummern liegt:

Zieht man aus dem Chordal-Punct eines Kreises und zweier Puncte gerade Linien nach diesen und Tangenten an jenen, so sind diese Linien einander gleich. Beschreibt man nun ferner aus jenem Chordal-Puncte einen Kreis, dessen Radius jenen Linien gleich ist, so schneidet dieser den gegebenen Kreis unter rechten Winkeln. Ebenso schneidet ein Kreis, dessen Mittelpunct der Chordal-Punct zweier Kreise und eines Punctes ist, und durch diesen Punct geht, jene Kreise unter rechten Winkeln.

114. Wir kommen zu einer neuen Reihe von Sätzen, wenn wir denjenigen der bisher zusammengestellten Oerter, welchen wir durchaus als beliebig angenommen haben, nun zwar noch immer als veränderlich betrachten, ihn jedoch dadurch näher bestimmen dafs die Chordale dieses und eines der gegebenen unveränderlichen Oerter dieselbe bleibt. Alsdann ist der Chordal-Punct ein fester und unveränderlicher. Um diefs an unser früheres Schema zu knüpfen, wollen wir die ersten beiden der drei durch:

$$A = o, \quad B = o, \quad C = o,$$

dargestellten Oerter als gegeben betrachten; alsdann ist zunächst

$$A - B = o$$

eine constante gerade Linie; ferner nehmen wir den dritten Ort veränderlich, jedoch so, dafs:

$$A - C = o$$

ein und dieselbe gerade Linie bezeichnet. Bei diesen Voraussetzungen ist der Chordal-Punct, der im Durchschnitt der eben bestimmten Linien liegt, ein fester Punct. Durch diesen festen Punct geht immer, wie wir auch, unter den angezeigten Beschränkungen, den dritten Ort nehmen mögen, die durch

$$B - C = o$$

gegebene Chordale.

115. Hierhin gehört nun zunächst folgender Satz:
Wenn zwei Kreise gegeben sind und wir construiren irgend einen dritten Kreis, der einen der beiden gegebenen entweder in demselben Puncte berührt, oder in denselben beiden Puncten schneidet, so bleibt der Chordal-Punct der drei Kreise derselbe, wie wir auch unter diesen Bedingungen den dritten Kreis bestimmen mögen.

116. Hierauf gründet sich eine leichte Construction der beiden Kreise, die einen gegebenen Kreis berühren und zugleich, entweder durch zwei gegebene Puncte gehen, oder einen zweiten gegebenem Kreis (oder gerade Linie) in einem gegebenem Puncte berühren. Für den ersten Fall blofs wollen wir die Construction anzeigen. Sey TKT′K′ der gegebene, zu berührende Kreis, M und M′ die beiden gegebenen Puncte. Durch diese Puncte lege man einen beliebigen Kreis, der den gegebenen schneidet, was nach der Figur in K und K′ geschieht; ziehe MM′ und KK′, die sich genugsam verlängert in P schneiden, und lege endlich von P aus Tangenten an den gegebenen Kreis. Die Berührungs-Puncte T und T′ *) sind alsdann diejenigen Puncte, in welchen die beiden möglichen Kreise, die den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten, den gegebenen Kreis berühren. Hiernach sind diese Kreise selbst, die in der bezüglichen Figur stärker ausgedrückt sind, leicht zu construiren. Fällt der Punct P, der Chordal-Punct des gegebenen und jeder zwei beliebiger Kreise, die durch M und M′ gehen, (unter die letzgenannten gehören die gesuchten Berührungs-Kreise) innerhalb des gegebenen Kreises, so ist die Aufgabe unmöglich. Dieser Umstand findet dann Statt, wenn einer der gegebenen Puncte innerhalb, der andere aufserhalb liegt. Fig. 15.

117. Da die Mittelpuncte aller Kreise, die durch dieselben beiden Puncte gehen, in gerader Linie liegen, so können wir den Satz der 115. Nummer auch in folgende Aussage einkleiden.
Die gemeinschaftlichen Chorden eines gegebenen Kreises mit allen Kreisen, deren Mittelpuncte in gerader Linie liegen, und die überdiefs durch einen festen Punct gehen, schneiden sich in ein und demselben Puncte, und umgekehrt, der Ort der Mittelpuncte aller Kreise, die sich in demselben Puncte schneiden, und deren gemeinschaftliche Chorden mit einem gegebenem Kreise durch einen festen Punct gehen, ist eine gerade Linie.

Der Beweis dieses Satzes ist durch das einfache Schema der 114. Nummer vollkommen strenge geführt, wir wollen indefs noch einen andern Beweis desselben Satzes hier anzeigen. Seyen:

$$(y-b)^2+(x-a)^2 = r^2,$$
$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = \varrho^2,$$

die Gleichungen zweier Kreise, deren Chordale:

$$2(\beta-b)y+2(\alpha-a)x = r^2-(a^2+b^2)-\varrho^2+(a^2+\beta^2),$$

durch irgend einen festen Punct geht. Denken wir uns die Kreise auf-diesen Punct als Anfangs-Punct der Coordinaten bezogen, so kommt:

$$r^2-(a^2+b^2) = \varrho^2+\alpha^2+\beta.$$

*) Nach einer allgemeinen Eigenschaft der Linien zweiter Ordnung können wir auf sehr leichte Weise die Berührungen bestimmen, ohne die Tangenten selbst zu ziehen. Hierüber umständliche Erörterungen in dem folgenden Abschnitte.

Diese Gleichung mufs immer zwischen den Constanten bestehen, wenn wir den zweiten Kreis so sich ändern lassen, dafs die gemeinschaftliche Chorde durch den Anfangs-Punct geht. Machen wir zugleich noch die Bestimmung, dafs der zweite Kreis durch irgend einen festen Punct (y′, x′) gehen soll, so ist:

$$(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2 = \varrho^2,$$

und wenn wir vermittelst dieser Gleichung aus der vorigen ϱ^2 fortschaffen, so kommt:

$$r^2-(a^2+b^2) = y'^2+x'^2-2\beta y'-2\alpha x'.$$

In dieser Gleichung sind β und α die einzigen nicht bestimmten Gröfsen, betrachten wir sie daher als veränderliche Gröfsen und setzen y und x an ihre Stelle, so erhalten wir, indem wir blofs ordnen:

$$2y'y+2x'x = y'^2+x'^2+a^2+b^2-r^2:$$

die Gleichung einer geraden Linie, des Ortes aller Mittelpuncte der veränderlichen Kreise.

118. Der Beziehung auf das folgende wegen, führen wir noch einschaltungsweise an, dafs wir vermittelst des Satzes der letzten Nummer auch die Aufgabe auflösen können: einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Kreise berührt, und dessen Fig. 16. Mittelpunct auf einer gegebenen geraden Linie liegt. Verkürzen wir nemlich den Radius des gröfsern der gegebenen Kreise CM um den Radius des kleinern Kreises C′M′, so ist der Mittelpunct, γ, des Kreises $\gamma\mu'$, der durch den Mittelpunct C′ des zweiten Kreises geht und den verkleinerten ersten Kreis berührt, zugleich auch der Mittelpunct des verlangten Kreises $\gamma\mu$, der die gegebenen beiden Kreise berührt, und zwar so berührt, dafs der kleinere nicht umhüllt wird. Dieser Kreise gibt es zwei. Wir finden auf ähnliche Weise diejenigen beiden Berührungs-Kreise, welche den kleinern Kreis umhüllen, so dafs wir im Ganzen vier Kreise bekommen, die den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten. (Das in dieser Nummer gebrauchte Verfahren ist ein bekanntes.)

Fig. 17. 119. Mit dem Satze der 115. Nummer gehört der folgende zusammen:

Wenn zwei Kreise gegeben sind und wir nehmen irgend einen dritten Kreis, der, mit einem der beiden ersten, den er auch nicht schneidet, zusammengestellt, eine constante Chordale hat, so ist der Chordal-Punct der drei Kreise ein unveränderlicher Punct, wie wir auch immer den dritten Kreis bei den eben gemachten Beschränkungen verändern mögen.

Dieser Satz liefert uns eine Construction der Aufgabe einen Kreis zu beschreiben, der mit einem gegebenen Kreise eine gegebene Linie zur Chordalen hat und zugleich einen zweiten gegebenen Kreis berührt, eine Aufgabe, die derjenigen der 116. Nummer entspricht.

Sey C der erste Kreis, PQ die gegebene gerade Linie, C′ der zweite Kreis, der berührt werden soll. Zieht man die Chordale der beiden gegebenen Kreise, welche der gegebenen Chordalen nach der Figur in P begegnet, so ist dieser Punct der Chordal-Punct der beiden gegebenen und jedes dritten Kreises, der, mit dem ersten zusammengestellt, PQ zur Chordalen hat. Durch diesen Punct geht also auch die gemeinschaftliche Tangente des zweiten und desjenigen Kreises, der den Forderungen der Aufgabe entspricht, woraus dann umgekehrt folgt, dafs, um den Berührungs-Punct dieser beiden Kreise zu bestimmen, wir blofs von P an den zweiten Kreis eine Tangente zu ziehen brauchen. Da es zwei Tangenten gibt, so gestattet die Aufgabe, ähnlich wie die der 116. Nummer,

eine doppelte Auflösung. Die beiden verlangten Kreise selbst (γ,γ') sind hiernach leicht zu construiren; denn einerseits liegt der Mittelpunct jedes derselben auf einer der zwei geraden Linien, welche den Mittelpunct des zweiten Kreises mit den beiden eben bestimmten Berührungs-Puncten verbindet, andrerseits liegen die Mittelpuncte beider Kreise auf derjenigen geraden Linie, welche durch den Mittelpunct des ersten Kreises geht, und senkrecht auf der gegebenen Chordalen steht.

120. Auf ganz analoge Weise können wir denjenigen Kreis construiren, der mit einem gegebenen Kreise eine gegebene gerade Linie zur Chordalen hat und aufserdem noch durch einen gegebenen Punct geht. Fig. 18.

Sey C der gegebene Kreis, PQ die gegebene gerade Linie, R der gegebene Punct. Construiren wir nun die Chordale von Punct und Kreis, und schneidet dieselbe die gegebene gerade Linie in P, so ist PR eine Tangente an den gesuchten Kreis im gegebenen Puncte R. Das Uebrige ergibt sich wie vorhin.

121. Die Constructionen der beiden vorigen Nummern erleiden endlich nur leichte Modificationen, wenn statt des Kreises C ein Punct gegeben ist, und der gesuchte Kreis einmal einen gegebenen Kreis berühren, das andere Mal durch einen zweiten gegebenen Punct gehen soll. Um nur den letzten Fall zu nehmen, sey Fig. 19. C der erste Punct, PQ die gegebene gerade Linie und R der zweite Punct. Das Perpendikel in der Mitte der geraden Linie, welche die beiden gegebenen Puncte C und R verbindet, schneide PQ in P; ziehen wir alsdann PR, so ist diese Linie eine Tangente des gesuchten Kreises (γ) im gegebenen Puncte R.

122. Wenn wir für den, in der 114. Nummer durch B = o bezeichneten Ort irgend einen festen Punct nehmen, so knüpft sich folgender Satz an das Schema jener Nummer:

Construirt man beliebig viele Kreise, welche eine gemeinschaftliche Chordale haben und zieht man von irgend einem beliebigen aber festen Puncte Tangenten-Paare an die verschiedenen Kreise, so gehen alle diejenigen geraden Linien, welche die beiden Tangenten jedes Paares halbiren, durch einen festen Punct der gemeinschaftlichen Chordalen. Durch denselben Punct geht auch die Tangente, welche im gegebenen Puncte an denjenigen Kreis gelegt werden kann, der zugleich durch letztern Punct geht.

In der 20. Figur gehen alle Kreise durch die beiden festen Puncte M und M', der Fig. 20. angenommene Punct ist R, und im Puncte P laufen die im Satze bezeichneten geraden Linien TT, RP zusammen.

123. Wir könnten noch für die andern besondern Fälle das Schema der 114. Nummer construiren, statt dessen wollen wir im Allgemeinen alle diejenigen Kreise analytisch bestimmen, welche mit zweien gegebenen dieselbe Chordale haben. Da die Mittelpuncte aller dieser Kreise in einer geraden Linie liegen, die auf der Chordalen senkrecht steht, so wollen wir diese Linie zur ersten Axe nehmen. Auf dieser Axe liegen auch die Mittelpuncte der beiden gegebenen Kreise, deren Gleichungen also von folgender Form sind:

$$\begin{aligned} y^2+(x-\alpha)^2 &= \varrho^2, \\ y^2+(x-a)^2 &= r^2. \end{aligned} \qquad (1)$$

Wir erhalten die allgemeine Gleichungen derjenigen Kreise, welche, mit jedem der gegebenen zusammengestellt, dieselbe Chordale geben als die beiden gegebenen Kreise unter sich, wenn wir die eine der letzten Gleichungen mit einem unbestimmten Coefficienten μ, dem wir sowol positive als negative Werthe beilegen, multipliciren und dann zur andern Gleichung addiren. Auf diese Weise kommt, wenn wir zugleich mit dem Coefficienten von y^2 dividiren:

$$y^2+x^2-2\,\frac{\mu\alpha+a}{\mu+1}\,x=\frac{\mu(\varrho^2-a^2)+(r^2-a^2)}{\mu+1}.$$

Wir können diese Gleichung durch eine schickliche Wahl der zweiten Axe noch vereinfachen; wir können z. B. die Chordale der beiden gegebenen Kreise zur zweiten Axe nehmen, alsdann ist:

$$\varrho^2-\alpha^2=r^2-a^2,$$

wodurch die letzte Gleichung folgende Gestalt annimmt:

$$y^2+x^2-2\,\frac{\mu\alpha+a}{\mu+1}\,x=\varrho^2-\alpha^2=r^2-a^2.$$

Nun können wir endlich noch, der Kürze halber,

$$\frac{\mu\alpha+a}{\mu+1}=m$$

setzen, wenn wir durch m eine neue unbestimmte Gröfse bezeichnen, die, da μ alle mögliche Werthe erhalten kann, ebenfalls keiner Beschränkung unterworfen ist. Die obige Gleichung geht alsdann in folgende über:

$$y^2+x^2-2mx=\varrho^2-\alpha^2. \qquad (2)$$

Wir kommen mit geringerm Aufwande von Rechnung zu demselben Resultate, wenn wir, statt die beiden Kreis-Gleichungen (1) mit einander zu verbinden, die eine dieser Gleichungen mit der Gleichung der Chordalen, die bei unserer Axen-Annahme folgende ist:

$$x=0$$

durch Addition verbinden, nachdem wir die letztere mit irgend einem Coefficienten multiplicirt haben; d. h. mit andern Worten, wenn wir eine der Kreis-Gleichungen z. B. die erste, entwickeln:

$$y^2+x^2-2\alpha x=\varrho^2-a^2,$$

und den Coefficienten der ersten Potenz von x als durchaus beliebig annehmen; schreiben wir für denselban 2m, so kommt wie oben:

$$y^2+x^2-2mx=\varrho^2-\alpha^2.$$

124. Wir können der in der vorigen Nummer entwickelten Gleichung folgende Form geben:

$$y^2+(x-m)^2=\varrho^2-\alpha^2+m^2. \qquad (3)$$

Die Realität dieser Gleichung fordert, dafs der zweite Theil derselben positiv sey. Diefs findet immer Statt, wenn ϱ^2 gröfser ist als α^2, d. h. wenn die beiden gegebenen, und also auch alle gesuchten Kreise sich schneiden. In diesem Falle mögen wir m, oder die Mittelpuncts-Abscisse bestimmen wie wir wollen, die letzte Gleichung gibt immer einen reellen Kreis, der kleinste Kreis entspricht der Bedingung, dafs m verschwindet, sein Radius ist $\sqrt{(\varrho^2-\alpha^2)}$. Berühren sich die beiden gegebenen Kreise, so können wir durch Verbindung ihrer Gleichungen einen neuen Kreis von jedem beliebigen Radius bekommen. Dieser Fall bildet den Uebergang dazu, dafs die beiden gegebenen Kreise und mithin auch irgend zwei der in Rede stehenden Kreise sich nicht schneiden. Als-

dann ist ϱ^2 kleiner als α^2, und wir erhalten für die Realität von (3) folgende Bedingungs-Gleichung:

$$m^2 > \alpha^2 - \varrho^2.$$

Die Mittelpuncts-Abscisse ist also, abgesehen vom Zeichen, nothwendig gröfser als die vom gemeinschaftlichen Chordal-Puncte aller, (namentlich auch der beiden gegebenen) Kreise an dieselben gezogenen Tangenten. Nehmen wir

$$m^2 = \alpha^2 - \varrho^2, \quad \text{also} \quad m = \pm \sqrt{\alpha^2 - \varrho^2},$$

so bezeichnet die Gleichung (3) einen Punct. Diese Puncte, deren es zwei gibt, sind leicht zu construiren. Ist

$$m^2 < \alpha^2 - \varrho^2,$$

so bedeutet die Gleichung (3) durchaus nichts, oder wenn wir lieber wollen, einen imaginären Kreis, einen Kreis, dessen Radius durch einen Ausdruck von der Form $R\sqrt{-1}$ gegeben ist; und wir sehen zugleich, dafs zwei imaginäre Kreise, oder auch ein reeller und ein imaginärer Kreis eine reelle Chordale haben.

125. Da das Wesentliche der von uns überall durchgeführten Methode in der geometrischen Deutung solcher Gleichungen, die wir aus der Verbindung anderer Gleichungen erhalten, besteht: so dürfen wir Bemerkungen von der Art der eben gemachten nicht aufser Acht lassen, besonders nicht in der Theorie der Linien höherer Ordnung. Wir müssen sie indefs für weiter nichts nehmen, als für das, was sie wirklich sind: für analytische Beziehungen; und wenn z. B. vorhin von imaginären Kreisen die Rede war, so ist diefs nur eine Sprache, die den analytischen Formen angepafst ist.

126. Aus dem Frühern ist ersichtlich, dafs, wenn ein Kreis und ein Punct auf diesem Kreise gegeben ist, wir die Gleichung der Tangente in diesem Puncte bekommen, wenn wir von der Gleichung des Kreises die Gleichung des Punctes unter der Form einer quadratischen Gleichung abziehn. Hierauf gründet sich eine hübsche Tangenten-Theorie für den Kreis, die aber, wie wir im Folgenden entwickeln werden, sich nicht allein auf den Kreis beschränkt, sondern, indem wir dieselbe auf andere Linien ausdehnen, zu sehr allgemeinen Resultaten führt.

Sey also:

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = \varrho^2, \quad (1)$$

die Gleichung des Kreises und:

$$(y-y'')^2 + (x-x'')^2 = 0, \quad (2)$$

die Gleichung des gegebenen Punctes (y'', x''), und da dieser Punct, unserer Voraussetzung gemäfs, auf dem Umfange des Kreises liegt, so haben wir zugleich folgende Bedingungs-Gleichung zwischen den Coordinaten desselben:

$$(y''-\beta)^2 + (x''-\alpha)^2 = \varrho^2.$$

Ziehen wir die beiden Gleichungen (1) und (2) von einander ab, so kommt:

$$2(y''-\beta)y + 2(x''-\alpha)x = \varrho^2 + (y''^2 + x''^2) - (\alpha^2 + \beta^2),$$

und da wir die vorhergehende Bedingungs-Gleichung auch folgendergestalt schreiben können:

$$y''^2 + x''^2 - (\alpha^2 + \beta^2) = \varrho^2 + 2(y''-\beta)\beta + 2(x''-\alpha)\alpha,$$

so erhalten wir, indem wir zusammenziehen und alle Glieder durch 2 dividiren:

$$(y''-\beta)(y-\beta) + (x''-\alpha)(x-\alpha) = \varrho^2:$$

die gesuchte Gleichung der Tangente im Puncte (y'', x''). Nehmen wir den Anfangs-Punct der Coordinaten in dem Mittelpuncte des Kreises an, so sind β und α gleich Null und die Gleichung der Tangente wird folgende

$$y''y + x''x = \varrho^2.$$

127. Wir wollen wieder einen Schritt vorwärts thun und zu diesem Ende nochmals die Gleichungen zweier Kreise, so wie wir es bisher gethan haben, mit einander verbinden. Wir wollen den Anfangs-Punct der Coordinaten in den Mittelpunct des ersten Kreises legen und die erste Axe durch den Mittelpunct des zweiten führen. Alsdann haben wir folgende beiden Gleichungen:

$$y^2 + x^2 = r^2, \qquad (1)$$

$$y^2 + (x-\alpha)^2 = \varrho^2, \qquad (2)$$

und wenn wir abziehen, so kommt:

$$2\alpha x - \alpha^2 = r^2 - \varrho^2 \qquad (3)$$

für die Gleichung der Chordalen. Diese Gleichung ist in Beziehung auf α vom zweiten Grade, es gibt also im Allgemeinen zwei verschiedene Werthe von α, welche, substituirt in die letzte Gleichung, denselben Werth für x geben, also dieselbe Chordale bestimmen. Es gibt also zwei Kreise von gleichem Radius ϱ, die mit einem dritten dieselbe Chordale haben. Wir wollen hier nur den Fall betrachten, dafs ϱ gleich Null ist, die Gleichung (2) also einen Punct bezeichnet. Die Gleichung (3) geht aber, wenn wir ϱ gleich Null setzen, und in Beziehung auf α ordnen, in folgende über:

$$\alpha^2 - 2\alpha x + r^2 = 0. \qquad (4)$$

Wenn wir die beiden Wurzeln dieser Gleichung durch α' und α'' bezeichnen, so gibt die Theorie der quadratischen Gleichungen:

$$\alpha' + \alpha'' = 2x, \qquad (5)$$

$$\alpha'\alpha'' = r^2, \qquad (6)$$

und zugleich bedingt die Realität dieser Wurzeln dafs

$$x^2 > r^2,$$

d. h. wie wir auch früher schon bewiesen haben (103), dafs die Chordale von Punct und Kreis, der Punct mag aufserhalb oder innerhalb liegen, niemals den Kreis schneidet.

128. Die Gleichung der Tangente an den durch (1) dargestellten Kreis im Puncte (y'', x') ist folgende:

$$y''y + x''x = r^2,$$

und wenn wir die Abscisse des Durchschnittes dieser Tangente mit der ersten Axe durch x' bezeichnen, so kommt, indem wir $y = 0$ setzen:

$$x''x' = r^2.$$

Diese Gleichung stimmt mit (6) überein, woraus wir denn den Schlufs zu ziehen berechtigt sind, dafs zwischen den beiden Puncten $(0, \alpha')$ und $(0, \alpha'')$, welche mit einem gegebenen Kreise eine gemeinschaftliche Chordale haben, dieselbe Beziehung Statt findet, als zwischen demjenigen Puncte, in welchem zwei an jenen Kreis gezogene Tangenten sich schneiden und der Mitte der Berührungs-Chorde (*corde de contact*).

129. Aus der Gleichung (5) folgt, dafs die beiden in Rede stehenden Puncte, die auf der ersten Axe liegen und durch die Abscissen α' und α'' bestimmt werden, zu beiden Seiten der Chordalen sich befinden und gleichweit von derselben entfernt sind. Diefs stimmt mit der 104. Nummer, die uns in dem Vorhergehenden schon zur Construction der Chordalen von Punct und Kreis gedient hat.

Fig. 21. 130. Zwei Puncte R und ϱ, welche mit einem gegebenen Kreise dieselbe gerade Linie zur Chordalen haben, werden wir nach dem Vorgange französischer Mathematiker: zugeordnete Pole in Beziehung auf diesen Kreis nennen. Diese Definition

wird aber gewöhnlich mit Beziehung auf Tangenten gegeben und also an die 128. Nummer geknüpft.

131. Nach diesen Erörterungen kommen wir unmittelbar zu einer Reihe von Sätzen: Wenn man aus irgend einem Puncte der gemeinschaftlichen Chordalen eines gegebenen Kreises und zweier zugeordneter Pole, einen zweiten Kreis beschreibt, der durch einen der Pole geht, so geht er auch durch den andern Pol; ein solcher Kreis aber schneidet den gegebenen unter rechten Winkeln, und umgekehrt:
Wenn ein Kreis durch irgend zwei Puncte geht, die in Beziehuug auf einen andern Kreis zugeordnete Pole sind, so schneiden sich die beiden Kreise unter rechten Winkeln.

132. Die folgenden Erörterungen schliefsen sich an das Schema der 114. Nummer. Seyen:

$$A = o, \quad B = o, \quad C = o, \quad C' = o, \qquad (1)$$

die Gleichungen eines Kreises, zweier Puncte und des zugeordneten Poles des letztern Punctes in Beziehung auf jenen Kreis. Alsdann bezeichnen die Gleichungen:

$$A - C = o, \quad A - C' = o, \quad C - C' = o,$$

ein und dieselbe Chordale, und gleichviel, ob wir die beiden ersten Oerter mit dem dritten oder vierten zusammenstellen, wir bekommen beidesmal denselben Chordal-Punct. Durch diesen Punct gehen also:

$$B - C = o, \quad B - C' = o,$$

und da der Durchschnitt dieser Linien, den Chordal-Punct der drei letzten Oerter bestimmt, so fällt auch dieser Punct mit den frühern zusammen. Es haben also je drei der vier Oerter (1), die nicht dieselbe Chordale haben, denselben Chordal-Punct.

Nehmen wir statt des zugeordneten Poles des zweiten Punctes den Pol des ersten, den wir durch die Gleichung $B' = o$ darstellen, so ergibt sich gerade auf dieselbe Weise wie eben, derselbe Chordal-Punct für je drei der vier Oerter

$$A = o, \quad B = o, \quad C = o, \quad C' = o;$$

und weil die drei ersten dieser Oerter mit den drei ersten der vier Oerter bei (1) einerlei sind, so ist dieser Punct mit dem der ersten Zusammenstellung ein und derselbe. Die zwei Paare zugeordneter Pole liegen also auf dem Umfange eines einzigen Kreises, und dieser Kreis schneidet den gegebenen unter rechten Winkeln. Also:
Durch je zwei Paare, in Beziehung auf einen gegebenen Kreis, zugeordneter Pole läfst sich ein neuer Kreis beschreiben. Die beiden Kreise schneiden sich unter rechten Winkeln. Oder: *Wenn irgend ein Kreis gegeben ist und man legt von irgend zweien, beliebig angenommenen, Puncten Tangenten an den gegebenen Kreis, und verbindet die Berührungen, so liegen die beiden angenommenen Puncte und die beiden Mitten der Berührungs-Chorden auf dem Umfange eines und desselben Kreises, der den gegebenen rechtwinklig durchsetzt.*

In der 22. Figur sind die beiden Paare zugeordneter Pole durch R und ϱ, R' und ϱ' bezeichnet. Fig. 23.

133. Durch Umkehrung erhalten wir folgenden Satz:
Wenn irgend zwei Kreise sich rechtwinklig schneiden, und man zieht aus dem Mittelpuncte des ersten eine gerade Linie, welche dem zweiten begegnet, so sind die beiden Durchschnitts-Puncte zugeordnete Puncte in Beziehung auf den ersten Kreis. Oder,

mit andern Worten, *wenn man von irgend einem Puncte des zweiten Kreises Tangenten an den ersten Kreis zieht, so liegt die Mitte der Berührungs-Chorde wiederum auf dem zweiten Kreise.*

Diese Beziehung zwischen den beiden Kreisen ist offenbar reciprok.

Fig. 23. 134. Wenn wir zwei Kreise mit einem Puncte und dem zugeordneten Pole dieses Punctes in Beziehung auf den ersten Kreis zusammenstellen:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad C' = 0;$$

so ist, wie in der 132. Nummer, der Chordal-Punct für je beliebige drei dieser vier Oerter, die nicht schon eine gemeinsame Chordale haben, immer derselbe Punct. Wenn wir weiter gehen, und den Pol für den Punct, dessen Gleichung ist: $C' = 0$, auf dem zweiten Kreise bestimmen, und diesen Pol darstellen durch die Gleichung $C'' = 0$ darstellen: so finden wir wieder denselben Punct als eben für den Chordal-Punct je dreier von folgenden vier Oertern:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad C'' = 0.$$

Wir können nun wieder den Pol des zuletzt bestimmten Punctes auf dem ersten Kreise, construiren, und wenn wir auf diese Weise beliebig fortfahren, so erhalten wir eine Reihe von Puncten, die alle unter sich und mit den beiden gegebenen Kreisen ein und denselben Chordal-Punct haben, und also auf dem Umfange eines Kreises liegen, der die beiden gegebenen rechtwinklig schneidet.

Wir bekommen eine neue Reihe von Puncten, die auf demselben Kreise sich befinden, wenn wir zuerst auf dem zweiten Kreise, den zugeordneten Pol des gegebenen Punctes, dessen Gleichung ist $C = 0$ suchen, dann den Pol dieses Punctes auf dem ersten Kreise und so beliebig fortfahren.

In der bezüglichen Figur sind die in Rede stehenden Puncte durch: R, R', R'', R''', ϱ', ϱ'' . . . bezeichnet.

Wenn also irgend zwei Kreise (diese Kreise mögen in einander liegen oder nicht, sie mögen sich schneiden oder berühren) und zugleich ein Punct gegeben sind, und wir bestimmen den Pol dieses Punctes auf dem ersten Kreise, für welchen ersten *Kreis wir nach einander* jeden *der beiden gegebenen Kreise nehmen können, dann weiter den Pol des so bestimmten Punctes auf dem zweiten Kreise, und wiederum den Pol des so erhaltenen Punctes auf dem ersten Kreise, und so beliebig fort: so liegen alle diese Constructions-Puncte auf dem Umfange eines neuen Kreises, der durch den gegebenen Punct geht und die beiden gegebenen Kreise unter rechten Winkeln schneidet.*

135. Zu denselben und andern Resultaten können wir auf eine allgemeinere Weise gelangen, wenn wir überhaupt die Bestimmung suchen, daſs ein vierter Ort mit drei gegebenen denselben Chordal-Punct habe.

Den Anfangs-Punct der Coordinaten wollen wir in den Chordal-Punct der drei gegebenen Oerter legen, und

$$(y-b)^2 + (x-a)^2 = r^2 \qquad (1)$$

für die Gleichung eines derselben nehmen; alsdann erhalten wir für $(a^2+b^2) - r^2$ und die, für die beiden andern Oerter auf entsprechende Weise gebildeten, Ausdrücke ein und denselben Werth, den wir durch M bezeichnen wollen. Soll nun ein vierter Ort mit den drei gegebenen Oertern denselben Chordal-Punct haben, so muſs die Chordale

desselben und jedes der gegebenen Oerter durch den Anfangs-Punct der Coordinaten gehen. Ist also

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\varrho^2 \qquad (2)$$

die Gleichung des vierten Ortes, und wir ziehen diese Gleichung von (1) ab, so muſs in der Gleichung, die wir auf diese Weise erhalten,

$$2(\beta-b)y+2(\alpha-a)x=r^2-(a^2+b^2)-\varrho^2+(\alpha^2+\beta^2),$$

der zweite Theil verschwinden, mithin ist:

$$\alpha^2+\beta^2-\varrho^2=a^2+b^2-r^2=M. \qquad (3)$$

136. Wir wollen erstens die Voraussetzung machen, daſs der vierte Ort ein Punct sey. Alsdann ist zuvörderst ersichtlich, daſs die Gleichung (3) durchaus nicht Statt finden kann, wenn M negativ ist, d. h. wenn der Chordal-Punct innerhalb der gegebenen Oerter fällt. Liegt der Chordal-Punct aber auſserhalb, so gibt die Gleichung (3),

$$\alpha^2+\beta^2=M, \qquad (4)$$

für den Ort der gesuchten Puncte einen Kreis, der aus dem Anfangs-Puncte der Coordinaten mit einem Radius, der den aus diesem Puncte an die gegebenen Oerter gezogenen Tangenten gleich ist, beschrieben wird. Dieser Kreis schneidet die gegebenen unter rechten Winkeln, weshalb wir ihn früher den Orthogonal-Kreis genannt haben.

137. Nehmen wir nun für die drei gegebenen Oerter drei Kreise, so gibt die vorige Nummer folgenden Satz: Fig. 24.

Wenn drei Kreise (C, C′, C″) gegeben sind und man zieht aus irgend einem Puncte (R) des Orthogonal-Kreises Tangenten-Paare an die drei gegebenen Kreise, so schneiden sich, wo man auch jenen Punct (R) annehmen mag, die drei geraden Linien, welche die Tangenten jedes Paares halbiren (TT, T′T′, T″T″), immer im Mittelpuncte des Orthogonal-Kreises.

138. Aus der Construction der letzten Nummer ergibt sich auf eine zu leichte Weise folgender Satz, als daſs wir ihn nicht gleich anführen sollten:

Wenn man, bei denselben Voraussetzungen als eben, die drei Berührungs-Chorden (ττ, τ′τ′, τ″τ″) construirt, so schneiden sich dieselben in ein und demselben Puncte (S), der auf dem Orthogonal-Kreise, dem angenommenen Puncte (R) diametral gegenüber, liegt. Die Beziehung der beiden Puncte (R und S) zu einander ist reciprok.

139. Die Constructionen der 132 — 134 Nummer entsprechen den Fällen, daſs unter den drei gegebenen Oertern sich einmal zwei Puncte befinden, das andere Mal ein Punct. In beiden Fällen bekommen wir immer einen reellen Kreis für den eben bestimmten Ort (4), weil M′ immer positiv ist. Bezeichnet nemlich die Gleichung (1) der 135. Nummer einen Punct, so ist $r=o$ und es kommt:

$$M=a^2+b^2.$$

Nehmen wir endlich, um auch diesen Fall nicht zu übergehen, für die drei gegebenen Oerter drei Puncte, so entspricht der 137. Nummer der allbekannte Satz: daſs alle in den Mitten beliebiger Chorden eines Kreises errichteten Perpendikel, durch einen festen Punct, den Mittelpunct des Kreises gehen. Der folgenden Nummer entspricht die Umkehrung des Satzes, daſs alle Winkel im Halbkreise rechte Winkel sind.

140. Nehmen wir zweitens für den veränderlichen vierten Ort, der mit den drei gegebenen Oertern denselben Chordal-Punct hat, und durch die Gleichung (2) dargestellt wird, einen Kreis von gegebenem Radius, so gibt uns die Gleichung (3) für den Ort der Mittelpuncte solcher Kreise, einen neuen Kreis, dessen Mittelpunct in den Chordal-Punct der drei gegebenen Oerter fällt und dessen Radius leicht zu bestimmen ist. Der angenommene Radius ϱ kann jeder beliebige seyn, wenn M positiv ist; im andern Falle muſs das Quadrat desselben gröſser seyn als (—M), d. h. gröſser als $(r^2-(a^2+b))$.

141. Sind drei Kreise gegeben, so können wir, umgekehrt, aus dem Chordal-Puncte, mit einem beliebigen Radius R einen Kreis beschreiben, dessen Gleichung folgende ist:

$$y^2+x^2 = R^2, \qquad (5)$$

und diesen Kreis für den durch (3) dargestellten geometrischen Ort nehmen; alsdann ist:

$$R^2 = (a^2+b^2)-r^2+\varrho^2,$$

und mithin ϱ durch folgende Gleichung gegeben:

$$\varrho^2 = R^2+r^2-(a^2+b^2). \qquad (6)$$

Zugleich ergibt sich, daſs unsere Annahme nur dann Statt finden kann, wenn:

$$R^2 > (a^2+b^2)-r^2. \qquad (7)$$

Diese Bedingung wird immer erfüllt, wenn der Chordal-Punct innerhalb der gegebenen Kreise liegt; im andern Falle muſs der beliebig angenommene Radius des Kreises (5) gröſser seyn, als die vom Chordal-Puncte an die gegebenen Kreise gezogenen Tangenten. Die in Rede stehenden gemeinschaftlichen Chorden gehen alsdann alle durch ein und denselben Punct, den Anfangs-Punct der Coordinaten.

Sind nur zwei Kreise gegeben, so können wir den Anfangs-Punct der Coordinaten oder den Mittelpunct des Kreises (5) in einem beliebigen Puncte der Chordalen der beiden gegebenen Kreise annehmen; ϱ bestimmt sich alsdann wie vorhin.

Ist endlich nur ein Kreis gegeben, so können wir den Mittelpunct des Kreises (5) annehmen, wo wir wollen. Nehmen wir ihn innerhalb des gegebenen Kreises an, so ist die Bestimmung des Radius, R, dieses Kreises durchaus keiner Beschränkung unterworfen. Im andern Falle müssen wir auf die Bedingungs-Gleichung (7) Rücksicht nehmen, die geometrisch gedeutet, anders nichts heiſst, als daſs die beiden Kreise sich unter einem Winkel schneiden, der gröſser als $\frac{\pi}{2}$ ist, oder daſs einer derselben innerhalb des andern liegt.

Wenn wir die beiden Kreise mit einander vertauschen, mithin den Anfangs-Punct der Coordinaten in den Mittelpunct des gegebenen Kreises verlegen und die Mittelpuncts-Coordinaten des andern Kreises $(-\beta)$ und $(-\alpha)$ nehmen, so daſs wir statt der beiden Gleichungen (1) und (5) nun folgende beide Gleichungen zu betrachten haben:

$$y^2+x^2 = r^2,$$
$$(y+\beta)^2+(x+\alpha)^2 = R^2:$$

so erhalten wir zur Bestimmung von ϱ wiederum dieselbe Gleichung als früher:

$$\varrho^2 = R^2+r^2-(a^2+b^2).$$

Die obige Beziehung der beiden Kreise zu einander ist also reciprok.

Fig. 25. *Wenn irgend zwei Kreise gegeben sind, die sich unter stumpfen Winkeln schneiden, oder ganz in einander liegen* (wie in der 25. Figur), *so gibt jeder Kreis, den wir mit einem constanten, leicht zu bestimmenden Radius aus irgend einem Puncte auf dem Umfange des ersten der beiden gegebenen Kreise, als Mittelpuncte, beschreiben, mit dem zweiten gegebenen Kreise eine gemeinschaftliche Chorde, die immer durch den*

Mittelpunct des ersten gegebenen Kreises geht. Wir können die beiden gegebenen Kreise mit einander vertauschen, ohne dafs der constante Radius des veränderlichen Kreises sich anders bestimmt.

In der 25. Figur, wo der eine Kreis (O) ganz innerhalb des andern (C) liegt, schneiden sich in dem Mittelpunct des erstgenannten, innerhalb liegenden, Kreises die gemeinschaftlichen Chorden des zweiten Kreises und jedes einzelnen der Kreise (y), deren Mittelpuncte sich auf dem Umfange des ersten Kreises befinden, und deren constanten Radius wir leicht bestimmen, indem wir einen beliebigen dieser Kreise construiren.

142. Wir wollen nun zunächst die Gleichung eines Kreises, der zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet, bestimmen. Legen wir die erste Axe durch die Mittelpuncte der beiden gegebenen Kreise, so haben deren Gleichungen folgende Form:

$$y^2+(x-\alpha)^2 = \varrho^2, \qquad (1)$$

$$y^2+(x-a)^2 = r^2. \qquad (2)$$

Der Mittelpunct eines beliebigen Kreises, der die beiden gegebenen Kreise rechtwinklig schneidet, liegt in irgend einem Puncte der Chordalen derselben, die wir hiernach als zweite Axe nehmen wollen; der Radius desselben ist gleich den Tangenten, die von jenem Puncte an die beiden gegebenen Kreise gezogen werden können, das Quadrat dieses Radius ist also gleich:

$$\alpha^2+y'^2-\varrho^2 = a^2+y'^2-r^2,$$

wenn wir die Ordinate des Mittelpunctes y' nennen. Für die Gleichung des in Rede stehenden Kreises erhalten wir, diesem entsprechend, folgende:

$$(y-y')^2+x^2 = \alpha^2+y'^2-\varrho^2. \qquad (3)$$

Die Gleichung irgend eines zweiten solchen Kreises hat dieselbe Form, es ändert sich blofs die Ordinate y', nehmen wir statt derselben y'', so kommt:

$$(y-y'')^2+x^2 = \alpha^2+y''^2-\varrho^2. \qquad (4)$$

Ziehen wir die letzten beiden Gleichungen von einander ab, so verschwinden, wenn wir durch $2(y''-y')$ dividiren, die Ordinaten y' und y'', und wir finden für die Chordale der beiden Kreise (3) und (4):

$$y = 0;$$

d. h. die Gleichung der ersten Axe, oder der Central-Linie der beiden gegebenen Kreise. Diese Linie ist also die gemeinschaftliche Chordale aller Kreise, welche die letztgenannten unter rechten Winkeln schneiden. Wenn also einer dieser Kreise die Central-Linie schneidet, so schneiden alle dieselbe in denselben beiden Puncten. Um diese zu bestimmen, brauchen wir nur in der Gleichung (3) y gleich Null zu setzen. Auf diese Weise kommt:

$$x^2 = \alpha^2-\varrho^2;$$

und, je nachdem α gröfser oder kleiner als ϱ oder gleich ϱ ist, was mit andern Worten heifst, je nachdem die beiden gegebenen Kreise keinen Punct mit einander gemein haben, sich schneiden oder berühren, sind die Werthe von x reell, imaginär oder Null.

Dieselben Werthe, die wir hier für x finden, haben wir früher in der 124. Nummer, für die Abscissen derjenigen beiden Puncte erhalten, zu deren quadratischen Gleichungen wir durch Verbindung der beiden gegebenen Kreis-Gleichungen gelangen können, für die Abscissen, die wir a. a. O. durch m bezeichnet haben. Diese beiden Puncte sind, wie wir leicht zeigen können, zugeordnete Pole für jeden der beiden gegebenen Kreise und mithin für alle diejenigen, welche mit diesen dieselbe Chordale haben. Denn, wenn wir den Anfangs-Punct der Coordinaten in den Mittelpunct des ersten Kreises verlegen, so

bekommen wir für die Gleichung der Chordalen $x = -\alpha$ und für die Abscissen der in Rede stehenden Puncte:

$$x = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \varrho^2}.$$

Das Product der beiden Werthe von x gibt ϱ^2, die Summe derselben -2α; mithin sind jene Puncte zugeordnete Pole für den ersten Kreis. Ebenso läſst sich zeigen, daſs sie's auch für den zweiten Kreis sind, und überhaupt für jeden, der mit den beiden gegebenen dieselbe Chordale hat. Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

Fig. 26. *Wenn beliebig viele Kreise gegeben sind, die eine gemeinschaftliche Chordale haben, so werden alle diese Kreise von denselben Kreisen, deren Mittelpuncte nothwendig auf dieser Chordalen liegen, rechtwinklig geschnitten, und alle diese Orthogonal-Kreise haben wiederum die Central-Linie der gegebenen Kreise zur gemeinschaftlichen Chordalen. Wir haben also zwei Reihen von Kreisen, die unter sich eine gemeinschaftliche Chordale haben und sich gegenseitig unter rechten Winkeln schneiden. Die Kreise der einen Reihe gehen alle durch zwei feste Puncte (O und O′), während die der andern sich nicht schneiden; jene zwei Puncte sind für jeden Kreis der letztgenannten Reihe zugeordnete Pole.*

143. Der durch (3) bezeichnete Kreis wird imaginär, wenn der zweite Theil seiner Gleichung negativ wird, d. h. wenn der Mittelpunct dieses Kreises innerhalb der gegebenen Kreise, die in diesem Falle sich schneiden müssen, angenommen wird. Aus einem solchen Puncte kann man also keinen Kreis beschreiben, der die gegebenen rechtwinklig schneidet, aber wir erhalten die Gleichung eines neuen Kreises, wenn wir bei obiger Voraussetzung, das Zeichen des zweiten Theiles der Gleichung (3) ändern. Auf diese Weise kommt:

$$(y-y')^2 + x^2 = \varrho^2 - (\alpha^2 + y'^2). \qquad (5)$$

Stellen wir, wie in der vorigen Nummer, mit dieser Gleichung eine zweite von derselben Form zusammen:

$$(y-y'')^2 + x^2 = \varrho^2 - (\alpha^2 + y''), \qquad (6)$$

so kommt, wenn wir abziehen und durch $2(y''-y')$ dividiren:

$$y = y' + y''. \qquad (7)$$

Fig. 27, 28. Um diesen Ausdruck geometrisch zu deuten, wollen wir von einem einzigen gegebenen Kreise ausgehen. Alsdann können wir jede beliebige gerade Linie, die den gegebenen Kreis schneidet, der obigen Coordinaten-Bestimmmung gemäſs, zur zweiten Axe nehmen; die Mitte (O) der auf ihr interceptirten Chorde ist alsdann der Anfangs-Punct der Coordinaten. Die Mittelpuncte der Kreise (5) und (6) fallen in irgend zwei Puncte (C, C′) dieser Chorde, und diejenigen beiden Chorden des gegebenen Kreises, MM und M′M′, welche in C und C′ halbirt werden, sind Durchmesser jener Kreise. Die Gleichung (7) ferner bezeichnet die Chordale dieser Kreise, Pγ, welche also durch P, den Durchschnitt von MM und M′M′ geht, und auf CC′ senkrecht steht. Hiernach haben wir:

$$y = O\gamma, \quad y' = OC, \quad y'' = OC';$$

und da wir die Gleichung (7) folgendergestalt schreiben können:

$$y' = y - y''$$

so folgt, abgesehen vom Zeichen:

$$OC = C'\gamma.$$

Dieses Resultat besteht, welche Lage auch der Punct P, in Beziehung auf den gegebenen Kreis, haben mag; er mag sich innerhalb oder auſserhalb desselben befinden, oder auf dem Umfange desselben liegen. In der Construction können wir von irgend zwei, belie-

big genommenen Chorden MM und M'M', durch deren Mitten alsdann CC' geht, ausgehen, und somit haben wir allgemein folgenden Satz bewiesen:

Wenn man in einem Kreise irgend zwei beliebige Chorden zieht, und von dem Durchschnitte derselben ein Perpendikel auf diejenige dritte Chorde fällt, welche die Mitten derselben verbindet, so steht der Fuſs-Punct dieses Perpendikels so weit von der Mitte einer der zuerst gezogenen Chorden ab, als die Mitte der andern von der Mitte der zuletzt gezogenen Chorde.

144. Statt einer der beiden Chorden, z. B. statt M'M' können wir eine Tangente und den Berührungs-Punct C' als Mitte derselben nehmen. Dieſs heiſst in der Gleichung (6) y'' so bestimmen, daſs: Fig. 29.

$$\varrho^2 - (\alpha^2 + y''^2) = 0.$$

Also auch in Beziehung auf die 29. Figur ist:

$$OC = C'\gamma \quad \text{oder} \quad OC' = C\gamma.$$

Wir bemerken endlich noch, daſs, wenn wir statt beider Chorden, MM und M'M', zwei Tangenten nehmen, wir als besondern Fall den Satz erhalten, daſs diejenige gerade Linie, welche durch den Durchschnitt zweier Tangenten geht und senkrecht auf der Berührungs-Chorde steht, diese letztere halbirt. Die Puncte O und γ fallen nemlich alsdann zusammen.

145. Wir wollen uns nun zur Theorie der Pole zurückwenden. Wenn irgend ein Punct und ein Kreis gegeben sind, so nennen wir mit französischen Schriftstellern Polare dieses Punctes diejenige gerade Linie, welche durch den zugeordneten Pol desselben, der Chordalen beider Oerter parallel gezogen werden kann. Gegenseitig heiſst der gegebene Punct: der Pol dieser geraden Linie. Liegt der Punct auſserhalb des Kreises, so ist die Berührungs-Chorde dessen Polare.

Die Gleichung des gegebenen Kreises sey:

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = \varrho^2, \qquad (1)$$

und die Coordinaten des Punctes seyen y' und x'; wir wollen die Gleichung der Polaren desselben nach obiger Definition bestimmen. Wenn wir zu diesem Ende die Gleichung des Punctes unter folgender Form:

$$(y-y')^2 + (x-x')^2 = 0, \qquad (2)$$

nehmen und von der Gleichung des Kreises abziehen, so erhalten wir für die Gleichung der Chordalen:

$$2(y'-\beta)y + 2(x'-\alpha)x = \varrho^2 - (\alpha^2 - \beta^2) + (y'^2 + x'^2). \qquad (3)$$

Die Gleichung einer der Chordalen parallelen Linie hat folgende Form:

$$2(y'-\beta)y + 2(x'-\alpha)x = C, \qquad (4)$$

wo wir durch C irgend eine constante Gröſse bezeichnen; die Parallele ferner, welche durch den gegebenen Punct (y', x') geht, wird durch folgende Gleichung dargestellt:

$$2(y'-\beta)(y-y') + 2(x'-\alpha)(x-x') = 0,$$

oder, wenn wir anders ordnen, durch die Gleichung:

$$2(y'-\beta)y + 2(x'-\alpha) = 2(y'-\beta)y' + 2(x'-\alpha)x'. \qquad (5)$$

Nehmen wir nun (4) für die Gleichung der Polaren, so folgt aus der Definition:

$$C + 2(y'-\beta)y' + 2(x'-\alpha)x' = 2\{\varrho^2 - (\alpha^2 + \beta^2) + (y'^2 + x'^2)\},$$

mithin erhalten wir:

$$C = 2\{(y'-\beta)\beta + (x'-\alpha)\alpha + \varrho^2\},$$

wonach denn die Gleichung (4) der Polaren in folgende übergeht:

$$(y'-\beta)(y-\beta) + (x'-\alpha)(x-\alpha) = \varrho^2 \qquad (6)$$

Wenn wir den Anfangs-Punct der Coordinaten in den Mittelpunct des gegebenen Kreises verlegen, also $\beta = 0$, $\alpha = 0$ setzen, so geht die Gleichung der Polaren in folgende über:

$$y'y + x'x = \varrho^2. \qquad (7)$$

146. Wenn wir den Punct (y', x') auf dem Umfange des Kreises annehmen, so sind die Gleichungen (6) und (7) mit den entsprechenden Gleichungen, die wir früher (126) für die Chordale desselben Punctes gefunden haben, oder mit den Gleichungen der Tangente in diesem Puncte identisch.

147. Setzen wir in der Gleichung (6) $y = \beta$, d. h. suchen wir den Durchschnitt der Polaren des Punctes (y', x') mit einer geraden Linie, die der ersten Axe parallel ist, und durch den Mittelpunct des Kreises geht, so kommt, wenn wir die Abscisse dieses Punctes durch X unterscheiden:

$$(x'-\alpha)(X-\alpha) = \varrho^2,$$

in welcher Gleichung y' nicht mehr vorkommt. Wie wir also den Punct (y', x') auf der durch die Gleichung:

$$(X-\alpha)(x-\alpha) = \varrho^2 \qquad (8)$$

dargestellten geraden Linie fortrücken lassen, wir erhalten immer denselben Punct für den Durchschnitt der Polaren desselben mit der geraden Linie:

$$y = \beta.$$

Die Gleichung (8) ist aber die der Polaren desjenigen Punctes, dessen Coordinaten β und X sind, denn wir erhalten diese Gleichung, wenn wir in (6) diese Werthe für y' und x' setzen. Da wir nun durchaus keine Bestimmung über die Richtung der ersten Axe gemacht haben, und sie jedem Durchmesser des Kreises parallel nehmen können, so ist folgender Satz bewiesen:

Fig. 30. 31. *Die Polaren aller Puncte einer beliebigen geraden Linie (RR) schneiden sich in ein und demselben Puncte (ϱ), dem Pole der geraden Linie; und umgekehrt, die Pole aller geraden Linien, welche durch denselben festen Punct gehen, gleichviel welche Lage dieser Punct hat, liegen in einer einzigen geraden Linie, der Polaren des festen Punctes.*

Mit obigem Beweise dieses Satzes können wir den Beweis desselben Satzes, — nur mit der Beschränkung, daſs der Pol innerhalb liege — in der analytischen Geometrie des H. Biot vergleichen. *)

148. Aus der vorigen Nummer folgt unmittelbar, daſs der Pol einer geraden Linie in dem Durchschnitte der Polaren irgend zweier beliebiger Puncte derselben liegt.

149. Wir wollen wieder eine Reihe von Kreisen betrachten, die sich in denselben beiden Puncten schneiden, oder, allgemeiner, ein und dieselbe Chordale haben. Die Gleichungen irgend zweier dieser Kreise seyen:

$$y^2 + (x-\alpha)^2 = \varrho^2,$$
$$y^2 + (x-a)^2 = r^2.$$

Ferner seyen y' und x' die Coordinaten irgend eines beliebigen Punctes; alsdann erhalten wir für die Polaren dieses Punctes auf den beiden Kreisen:

$$y'y + (x'-\alpha)(x-\alpha) = \varrho^2,$$
$$y'y + (x'-a)(x-a) = r^2.$$

*) Essai de Géométrie analytique par Biot. six. édit. Nro. 120 — 121.

Ziehen wir die letzten beiden Gleichungen von einander ab, so kommt:

$$(\alpha-a)(x+x') = \varrho^2-\alpha^2-r^2+a^2,$$

für die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Durchschnitt der beiden Polaren geht. Der letzte Theil dieser Gleichung verschwindet, wenn wir die Chordale zur zweiten Axe nehmen; dividiren wir endlich durch $(a-\alpha)$, so bleibt blofs:

$$x+x' = 0. \qquad (1)$$

Da dieser Ausdruck unabhängig ist von den Constanten der eben betrachteten Kreis-Gleichungen, so ergibt sich folgender Satz:

Wenn mehrere Kreise durch dieselben beiden Puncte M und M' gehen, und man zieht von irgend einem festen Puncte (R) Tangenten an die verschiedenen Kreise, so gehen die Berührungs-Chorden ebenfalls durch einen festen Punct (ϱ), der von der gemeinschaftlichen Chorde, so weit, als der angenommene Punct (R), absteht. Oder allgemeiner: *die Polaren eines beliebigen festen Punctes auf allen Kreisen, die eine gemeinschaftliche Chordale haben, gehen wiederum durch einen festen Punct; beide Puncte stehen gleichweit von der Chordalen ab.* Fig. 32.

Die Beziehung der beiden festen Puncte zu einander ist reciprok; diefs zeigt sogleich die Gleichung (1), die in Beziehung auf x' und x symmetrisch ist.

Liegt einer der beiden festen Puncte auf der Chordalen, so fällt auch der zweite in dieselbe. Diese beiden Puncte sind alsdann, im Fall die gegebenen Kreise sich schneiden, zugeordnete Pole in Beziehung auf denjenigen unter ihnen, der über der gemeinsamen Chorde als Durchmesser beschrieben werden kann.

149. Wenn die gegebenen Kreise sich nicht schneiden, so gehören in die Reihe derselben zwei Puncte, die in Beziehung auf jeden der Kreise zugeordnete Pole sind. Die Polare eines Punctes in Beziehung auf einen zweiten Punct ist, der allgemeinen Definition gemäfs, das Perpendikel in letzterm Puncte auf derjenigen geraden Linie, welche die beiden Puncte verbindet, was auch unmittelbar aus der Gleichung (6) der 145. Nummer folgt, wenn wir in derselben $\varrho = 0$ setzen. Wir wollen hier nur einen Satz hervorheben:

Wenn ein Kreis gegeben ist und man zieht von irgend einem Puncte (R) nach irgend zwei, in Beziehung auf den gegebenen Kreis, zugeordneten Polen (Q, Q') gerade Linien, und errichtet auf diese in den beiden Polen Perpendikel, so schneiden sich diese Perpendikel und die Polare des beliebig angenommenen Punctes in ein und demselben Puncte (R'). Fig. 33.

Indem wir hier abbrechen, bemerken wir nur noch, dafs sich hier eigentlich der früher schon in der 138. Nummer angezogene Satz anschliefst, und ebenso hätten wir den Satz der 148. Nummer schon in der 122. anziehen können.

150. Wenn wir wieder durch:

$$A=0, \quad B=0, \quad C=0, \quad D=0,$$

u. s. w. allgemeine, auf ein, wie früher, rechtwinkliges oder auch auf ein beliebiges System bezogene Kreis-Gleichungen der Kürze halber bezeichnen, so stellt jedes Aggregat von A, B, C, D u. s. w. gleich Null gesetzt, einen neuen Kreis dar, wenn nicht etwa so viele jener Symbole subtractiv als additiv genommen werden, in welchem Falle wir die Gleichung einer geraden Linie erhalten. Folgende Gleichung z. B.

$$A+B-C-D = 0$$

stellt eine gerade Linie dar, die wir leicht durch zwei Puncte construiren können, nemlich durch die beiden Durchschnitte folgender beiden Paare gerader Linien:

$$A - C = o, \quad B - D = o,$$
$$A - D = o, \quad B - C = o.$$

Folgende Gleichung — und nur dies eine Beispiel wollen wir näher betrachten —

$$A = B + C$$

stellt einen Kreis dar. Diese Gleichung wird befriedigt wenn zugleich den neben einander gestellten Gleichungen:

$$A - B = o, \quad C = o,$$
$$A - C = o, \quad B = o,$$

Genüge geleistet wird, was in den Durchschnitten jedes von zwei der gegebenen drei Kreise mit der Chordalen der beiden übrigen geschieht.

Fig. 34. *Wenn also drei Kreise gegeben sind und der eine dieser Kreise (C) wird von der Chordalen der beiden übrigen (MM) geschnitten, und ebenso ein anderer dieser Kreise (C′) von der Chordalen der beiden übrigen (M′M′), so liegen die vier Durchschnitts-Puncte (μ, μ, μ', μ') auf einem neuen Kreise.*

Dieser Satz besteht noch, wenn einmal oder beidesmal die zwei Durchschnitte sich in einen Berührungs-Punct vereinigen, er besteht immer auch dann noch, wenn zwei Durchschnitte imaginär werden. In diesem letztern Falle nemlich gibt es einen Kreis, der durch zwei Durchschnitts-Puncte geht und zugleich mit einem der gegebenen Kreise dieselbe Chordale (ideale Chorde) hat, als die beiden andern gegebenen Kreise unter sich haben. Begegnen aber beidesmal die in Rede stehenden Chordalen:

$$A - B = o, \quad A - C = o,$$

den bezüglichen Kreisen:

$$C = o, \quad B = o,$$

nicht, so müssen wir verschiedene Fälle unterscheiden; es bleibt alsdann der Kreis:

$$A = B + C$$

nicht immer reell, er kann imaginär werden; der Uebergang ist dadurch angezeigt, dafs er sich auf einen Punct reducirt. Diese verschiedenen Fälle stellen sich unmittelbar in der Construction dar.

Wir können endlich statt eines der drei gegebenen Kreise einen Punct nehmen; wir können auch zwei, auch alle drei Kreise mit Puncten vertauschen. Auf diese Weise kommen wir zu einer Reihe specieller Sätze; wir können aber hier nicht, wie wir es früher gethan haben, in ein ausführlicheres Detail eingehen.

151. Ehe wir zur Erörterung anderer Beziehungen zweier Kreise zu einander übergehen, wollen wir die Theorie der Chordalen zur Construction der einzelnen, von Appollonius zusammengestellten, Probleme der Tactionen anwenden. Zuerst gehören hierhin die Construction eines Kreises, der durch drei gegebene Puncte geht und eines Kreises, der drei gegebene gerade Linien berührt. Zu beiden Constructionen sind wir auf analytischem Wege geführt worden. Ebenso haben wir die Construction derjenigen beiden Kreise angezeigt, welche durch zwei gegebene Puncte gehen und einen gegebenen Kreis berühren (106). Diese Construction läfst sich nicht geradezu auf den Fall ausdehnen, dafs der zu berührende Kreis in eine gerade Linie übergeht. Für diesen Fall haben wir folgende, der vorigen ähnliche, Construction.

Fig. 35. Seyen M und M′ die beiden gegebenen Puncte und sey TT′ die zu berührende gerade Linie. Man ziehe alsdann die gerade Linie MM′ und verlängere dieselbe bis zum Durch-

schnitt mit TT', dieser Durchschnitt sey C. Beschreibt man erner durch M und M' irgend einen Kreis und legt von C eine Tangente an diesen Kreis, so ist die Länge derselben bis zum Berührungs-Puncte N genommen, für alle beliebigen Kreise, die durch M und M' gehen, constant. Also steht auch der Punct, in welchem der gesuchte Kreis die gegebene gerade Linie berührt, um die Länge dieser Tangente CN vom Puncte C ab. Hiernach finden wir sogleich diese beiden Berührungs-Puncte, in welchen die beiden möglichen Kreise, die den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten, die gegebene Linie berühren. Es bleibt also blofs noch durch drei Puncte, einmal durch M, M' und T, das andere Mal durch M, M' und T', ein Kreis zu legen übrig.

151. Die allgemeinere Aufgabe, die der letztern entspricht, ist: einen Kreis zu beschreiben, der mit zweien gegebenen Oertern eine gemeinschaftliche Chordale hat und überdiefs eine gegebene gerade Linie berührt. Ein besonderer Fall ist wiederum der, einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Puncte zu zugeordneten Polen hat, und zugleich eine gegebene gerade Linie berührt. Die Constructionen sind der zuletzt angezeigten durchaus ähnlich. Im letztern Falle insbesondere errichte man in der Mitte derjenigen geraden Linie, welche die beiden Pole R und R' verbindet, ein Perpendikel, und beschreibe aus dem Durchschnitte desselben mit der gegebenen geraden Linie, aus C, als Mittelpunct einen Kreis, der durch die beiden Pole R und R' geht und die letztgenannte Gerade in T und T' schneidet. Diese beiden Puncte sind diejenigen, in welchen diejenigen beiden Kreise, die den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten, die gegebene Gerade berühren. Die Kreise selbst sind hiernach leicht zu beschreiben, denn ihre Mittelpuncte liegen in den Durchschnitten der Perpendikel in T und T' und der geraden Linie, welche durch die beiden Pole R und R' geht. Fig. 36.

152. Wenn zwei Puncte gegeben sind, so können wir sogleich eine gerade Linie bestimmen, auf welcher der Mittelpunct jedes Kreises liegt, der durch jene beiden Puncte geht; und, gegenseitig, wenn diese Linie und einer der beiden Puncte gegeben ist, so ergibt sich unmittelbar der andere Punct. Wir können ferner nach der bekannten Verfahrungs-Art der 118. Nummer die Construction eines Kreises, dessen Mittelpunct auf einer gegebenen geraden Linie liegt und der einen gegebenen Kreis berührt, auf die Construction eines Kreises zurückführen, der, statt den gegebenen Kreis zu berühren, durch einen gegebenen Punct, den Mittelpunct des letztgenannten Kreises, geht. Da nun endlich die Mittelpuncte aller Kreise, die zwei gegebene gerade Linien berühren, in diejenigen beiden geraden Linien fallen, welche die am Durchschnitte der beiden gegebenen entstehenden Winkel halbiren, so können wir nach den letzten Bemerkungen die beiden Aufgaben construiren: einen Kreis zu beschreiben der zwei gegebene gerade Linien berührt und überdiefs noch, einmal durch einen gegebenen Punct geht, das andere Mal einen gegebenen Kreis berührt. Die erstere Aufgabe läfst vier, die letztere acht Auflösungen zu.

153. Wir wollen uns nun zu der Aufgabe wenden, einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise berührt. Der Mittelpunct desjenigen Kreises P, der die gegebenen γ, c und C, alle drei innerhalb berührt, d. h. keinen derselben umschliefst, ist als derjenige Punct anzusehen, in welchem die drei gegebenen Kreise, Fig. 37.

deren Radien um den Radius des berührenden Kreises vergröſsert worden sind, sich schneiden; mit andern Worten: der Chordal-Punct der so bestimmten Kreise. Der Ort der Chordal-Puncte aller Systeme dreier Kreise, die wir erhalten, indem wir die Radien der gegebenen Kreise um beliebige aber gleiche Stücke vergröſsern, geht durch den Mittelpunct des zu berührenden Kreises. Dieser Ort aber ist eine gerade Linie. Um dieſs zu beweisen, seyen:

$$\begin{aligned}(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 &= \varrho^2,\\ (y-b)^2+(x-a)^2 &= r^2,\\ (y-B)^2+(x-A)^2 &= R^2\end{aligned} \qquad (1)$$

die Gleichungen der drei gegebenen Kreise. Der Chordal-Punct dieser drei Kreise liegt in dem Durchschnitte zweier beliebiger Chordalen; wir wollen ihn durch die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}2(b-\beta)y+2(a-\alpha)x &= \varrho^2-r^2-(\alpha^2+\beta^2)+(a^2+b^2),\\ 2(B-\beta)y+2(A-\alpha)x &= \varrho^2-R^2-(\alpha^2+\beta^2)+(A^2+B^2),\end{aligned} \qquad (2)$$

bestimmen. Zwischen diesen beiden Gleichungen könnten wir die Werthe der Coordinaten des Chordal-Punctes eliminiren, es genügt uns aber dieselben durch einen Accent von den allgemeinen Werthen von y und x zu unterscheiden. So kommt:

$$\begin{aligned}2(b-\beta)y'+2(a-\alpha)x' &= \varrho^2-r^2-(\alpha^2+\beta^2)+(a^2+b^2),\\ 2(B-\beta)y'+2(A-\alpha)x' &= \varrho^2-R^2-(\alpha^2+\beta^2)+(A^2+B^2).\end{aligned} \qquad (3)$$

Aus den Gleichungen (2) leiten wir auf der Stelle zwei andere Gleichungen zur Bestimmung des Chordal-Punctes dreier Kreise her, die aus denselben Mittelpuncten als die gegebenen Kreise mit Radien beschrieben werden, die um ein gleiches Stück verlängert worden sind; wir brauchen nemlich zu diesem Ende in den angezogenen Gleichungen nur $(\varrho+\varphi)$, $(r+\varphi)$ und $(R+\varphi)$ statt ϱ, r und R zu schreiben. Auf diese Weise erhalten wir:

$$\begin{aligned}2(b-\beta)y+2(a-\alpha)x &= \varrho^2-r^2-(\alpha^2+\beta^2)+(a^2+b^2)+2(\varrho-r)\varphi,\\ 2(B-\beta)y+2(A-\alpha)x &= \varrho^2-R^2-(\alpha^2+\beta^2)+(A^2+B^2)+2(\varrho-R)\varphi.\end{aligned} \qquad (4)$$

Durch die beiden letzten Gleichungen sind die Coordinaten des Chordal-Punctes jener drei Kreise, deren Radien $(\varrho+\varphi)$, $(r+\varphi)$ und $(R+\varphi)$ sind, bestimmt. Wenn wir aber nicht direct eliminiren wollen, so können wir auch diese Gleichungen beliebig zu der Gleichung eines neuen geometrischen Ortes verbinden, der alsdann ebenfalls den in Rede stehenden Punct enthält. Verbinden wir so, daſs φ eliminirt wird, so erhalten wir die Gleichung einer Linie, welche die Chordal-Puncte aller besagten Systeme dreier Kreise enthält; denn, da diese Gleichung nicht mehr φ enthält, so würden wir, bei demselben Verfahren, immer zu derselben Gleichung gekommen seyn, wenn wir für φ auch irgend einen andern Werth angenommen hätten. Ziehen wir zuvor die entsprechenden Gleichungen bei (3) und (4) von einander ab, so kommt, wenn wir den gemeinschaftlichen Factor 2 weglassen:

$$\begin{aligned}(b-\beta)(y-y')+(a-\alpha)(x-x') &= (\varrho-r)\varphi,\\ (B-\beta)(y-y')+(A-\alpha)(x-x') &= (\varrho-R)\varphi;\end{aligned}$$

und wenn wir nun die ersten und zweiten Theile der beiden Gleichungen in einander dividiren, so fällt φ aus, und man bekommt:

$$\frac{(b-\beta)(y-y')+(a-\alpha)(x-x')}{(B-\beta)(y-y')+(A-\alpha)\,x-x'} = \frac{\varrho-r}{\varrho-R},$$

und nach einer leichten Reduction:

$$y-y' = -\frac{\varrho(a-A)+r(A-\alpha)+R(\alpha-a)}{\varrho(b-B)+r(B-\beta)+R(\beta-b)}(x-x') \qquad (5)$$

Dieſs ist die Gleichung des gesuchten Ortes, der also eine gerade Linie ist.

Wir bemerken in Beziehung auf die letzten Entwicklungen, dafs es uns darum zu thun war, die letzte Gleichung selbst herzuleiten; der blofse Beweis, dafs der gesuchte Ort eine gerade Linie sey, bedarf fast gar keiner Rechnung; man erkennt sogleich in den Gleichungen (4), dafs die Elimination von φ zu einer linearen Gleichung führt und die Form dieser Gleichungen selbst ergibt sich unmittelbar aus der Form der Chordalen-Gleichung zweier Kreise.

Um die Gleichung (5) zu construiren, brauchen wir blofs den Chordal-Punct der drei gegebenen Kreise zu bestimmen, dann die Radien dieser Kreise um ein beliebiges aber gleiches Stück gröfser zu nehmen und auch für die dadurch bestimmten drei neuen Kreise den Chordal-Punct zu suchen. Durch diese beiden Chordal-Puncte geht die zu construirende gerade Linie, welche den Mittelpunct desjenigen Kreises enthält, der die gegebenen alle drei innerhalb berührt.

Wir überzeugen uns leicht, dafs der Mittlpunct desjenigen Kreises, der die gegebenen alle drei aufserhalb berührt, und also dieselben umschliefst, ebenfalls auf der oben bestimmten geraden Linie (5) liegt. Der Mittelpunct dieses Berührungs-Kreises nemlich, dessen Radius wir durch ψ bezeichnen wollen, können wir als den Chordal-Punct dreier Kreise ansehen, die aus den Mittelpuncten der gegebenen Kreise mit den bezüglichen Radien $(\psi-\varrho)$, $(\psi-r)$ und $(\psi-R)$ beschrieben werden. Nehmen wir für ψ irgend einen beliebigen Werth, so erhalten wir zur Bestimmung des entsprechenden Chordal-Punctes die frühern Gleichungen (4), wenn wir die beliebigen Werthe ψ und φ unter einander vertauschen und die Zeichen der Radien, oder was damit auf Eins hinauskommt, das Zeichen von ψ ändern. Aus jeder der zwiefachen Zeichen-Aenderung folgt, dafs die Elimination von ψ zu derselben Gleichung (5) führt; denn einmal bleibt diese Gleichung dieselbe, wenn wir die Zeichen aller Radien ändern, und das andere Mal können wir auch die eliminirte Gröfse ψ ursprünglich negativ annehmen, d. h. statt die Radien um ein gleiches Stück zu verlängern, dieselben um ein gleiches Stück verkürzen.

Es gibt noch sechs Kreise, welche die drei gegebenen berühren, und diese ordnen sich ebenfalls paarweise zusammen, und zwar der Berührungs-Kreis, welcher jeden beliebigen der drei gegebenen Kreise umschliefst, mit demjenigen, der die beiden andern umschliefst. Die gerade Linie, welche die Mittelpuncte jedes Paares solcher Kreise verbindet, geht auch durch den Chordal-Punct der drei zu berührenden Kreise. Wollen wir diese Linien construiren, so brauchen wir blofs den Radius desjenigen Kreises, der allein umschlossen, oder allein nicht umschlossen wird, um ein beliebiges Stück zu verlängern oder zu verkürzen, und zu gleicher Zeit die Radien der beiden übrigen Kreise um dasselbe Stück zu verkürzen, wenn wir jenen verlängert, oder zu verlängern, wenn wir jenen verkürzt haben: der Chordal-Punct dreier auf diese Weise bestimmten Kreise liegt auf der bezüglichen gesuchten Linie. Auf gleiche Weise bestimmen wir die beiden andern.

Die Gleichungen der vier geraden Linien, von welchen jede die Mittelpuncte zweier der acht möglichen Berührungs-Kreise enthält, können wir demnach in folgende Gleichung:

$$y-y' = -\frac{\varrho(a-A) \pm r(A-\alpha) \pm R(\alpha-a)}{\varrho(b-B) \pm r(B-\beta) \pm R(\beta-b)}(x-x'), \qquad (6)$$

zusammenfassen, wobei die Zeichen in Nenner und Zähler entsprechend genommen werden müssen.*)

*) Wir haben im Texte, um die Art zu bezeichnen, wie die drei gegebenen Kreise von den gesuchten berührt werden, uns des gewöhnlichen Sprach-Gebrauches bedient, und dem gemäfs

154. Die eben angezeigte Construction der in Rede stehenden Linien erleidet mancherlei Modificationen, einmal nach der verschiedenen Bestimmungs-Art des Chordal-Punctes dreier Kreise, und dann nach der verschiedenen Annahme des beliebigen Stückes, das wir anfänglich φ genannt haben. Was letztere betrifft, so können wir z. B. nach einander für φ die Radien der gegebenen Kreise, und zwar mit negativen Zeichen, nehmen; alsdann erhalten wir drei Systeme von zwei Kreisen und einem Puncte, die wir durch folgendes Schema (es ist nemlich durchaus gleichgültig, ob die Radien sich als positive oder negative Gröfsen darstellen) nach den Radien bezeichnen können:

$$\begin{array}{ccc} 0, & r-\varrho, & R-\varrho; \\ r-\varrho, & 0, & R-r; \\ R-\varrho, & R-r, & 0; \end{array}$$

wo die Mittelpuncte der in der ersten, zweiten und dritten Vertical-Columne zusammengestellten Kreise die Mittelpuncte der gegebenen drei Kreise sind, welche ϱ, r und R zu Radien haben. Die Chordal-Puncte dieser drei Systeme liegen in gerader Linie und zwar auf der geraden Linie, die die Mittelpuncte derjenigen beiden Berührungs-Kreise enthält, welche die drei gegebenen entweder alle drei oder keinen derselben umschliefsen.

denjenigen Fall als Normal-Fall betrachtet, wo die drei gegebenen Kreise (γ, c und C) eine Lage zu einander haben, wie in der 37. Figur. Im Allgemeinen haben die Berührungs-Kreise in Beziehung auf die gegebenen Kreise sehr verschiedene Lagen, je nach der verschiedenen gegenseitigen Lage der letztgenannten. Wenn wir nur diejenigen beiden Berührungs-Kreise betrachten, deren Mittelpuncte auf der durch die Gleichung (5) dargestellten geraden Linie liegen, so umschliefsen diese Kreise erstens alle beide keinen der drei gegebenen Kreise, und werden von keinem derselben umschlossen, oder, zweitens alle beide umschliefsen die drei gegebenen (werden von diesen umschlossen) oder, drittens, einer der drei Berührungs-Kreise umschliefst keinen der drei gegebenen und der andere umschliefst alle drei (wird umschlossen). Wenn, um einige Beispiele zu geben, zwei gegebene Kreise sich nicht schneiden, und der dritte zwischen beiden und ganz innerhalb ihrer gemeinschaftlichen äufsern Tangenten liegt, so umschliefsen jene Berührungs-Kreise beidesmal keinen der gegebenen Kreise; wenn der dritte Kreis bei obigen Voraussetzungen, beide gemeinschaftlichen Tangenten schneidet, so werden die zu berührenden Kreise beidesmal umschlossen; wenn der dritte Kreis nur eine der gemeinschaftlichen Tangenten schneidet, so umschliefst ein Berührungs-Kreis die gegebenen Kreise, der andere nicht. Wenn zwei gegebene Kreise ganz innerhalb des dritten liegen, so umschliefsen beide in Rede stehende Berührungs-Kreise die beiden ersten Kreise, während sie vom dritten umschlossen werden; wenn zwei Kreise sich schneiden und der dritte innerhalb beider liegt, so umschliefsen beide Berührungs-Kreise den dritten Kreis und werden von den beiden andern umschlossen. Wenn je zwei der drei gegebenen Kreise sich schneiden und zwar so, dafs der Chordal-Punct innerhalb fällt, so umschliefst ein Berührungs-Kreis dieselben, während der andere von ihnen umschlossen wird; schneiden sich zwei Kreise, und schneidet der dritte jeden derselben so, dafs die Durchschitte der beiden erstern Kreise aufserhalb desselben liegen, so werden beide Berührungs-Kreise umschlossen.

Wenn die drei gegebenen Kreise sich in demselben Puncte schneiden, so reducirt sich ein Kreis jedes der vier Paare von Berührungs-Kreisen auf einen Punct, nemlich auf jenen Durchschnitts-Punct der gegebenen Kreise. Wir erhalten also eigentlich nur vier Berührungs-Kreise, und die Constanten derselben sind durch lineare Gleichungen gegeben.

Wir können auch auf dreifache Art φ so bestimmen, daſs wir zu Systemen von drei Kreisen kommen, von denen zwei einander gleich sind: wir brauchen nemlich zu diesem Ende nur φ subtractiv und gleich der halben Summe je zweier Radien der drei gegebenen Kreise zu nehmen, so finden wir z. B. wenn wir $\varphi = -\frac{r+\varrho}{2}$ setzen, abgesehen vom Zeichen, folgende Radien:

$$\frac{r-\varrho}{2},\quad \frac{r-\varrho}{2},\quad R-\frac{r+\varrho}{2}.$$

In diesem Falle wird die Construction des Chordal-Punctes sehr einfach.

155. Es ist zugleich ersichtlich, daſs in den angezeigten Constructions-Weisen durchaus nichts geändert wird, wenn statt eines der drei gegebenen Kreise ein Punct gegeben ist. Die Gleichungen der Linien, von welchen alsdann jede die Mittelpuncte zweier Berührungs-Kreise enthält, können wir in folgender Gleichung:

$$y-y' = -\frac{\varrho(a-A)\pm r(A-\alpha)}{\varrho(b-B)\pm r(B-\beta)}(x-x') \qquad (7)$$

zusammenfassen, wenn wir nemlich statt des Kreises, dessen Radius gleich R ist, einen Punct nehmen, also in der Gleichung (6) R gleich Null setzen. Wir bezeichnen hierbei wieder durch y' und x' die Coordinaten des Chordal-Punctes der drei gegebenen Oerter. Die letzte Gleichung stellt zwei verschiedene gerade Linien dar, und es gibt im Allgemeinen vier Kreise, die den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten.

156. Wir wollen zwei Beispiele nehmen, um die Constructionen der in Rede stehenden geraden Linien anschaulich zu machen. Fig. 38.

Seyen erstens drei Kreise gegeben, von denen einer von den beiden andern geschnitten wird. Alsdann bestimmt sich der Chordal-Punct durch den Durchschnitt zweier gemeinschaftlicher Chorden. In der 38. Figur sind die drei gegebenen Kreise stärker gehalten, der Chordal-Punct P liegt im Durchschnitte von MP und μP. Es ist ferner das Stück φ, um welches der Radius jedes dieser Kreise verlängert wird, so genommen, daſs von den dadurch bestimmten, in der Figur schwächer gehaltenen, Kreise wiederum einer von den beiden andern geschnitten wird. Wir erhalten alsdann wie eben der Chordal-Punct p durch den Durchschnitt zweier Chorden, Np un νp. Durch P und p geht die gesuchte gerade Linie.

Wenn die drei gegebenen Kreise sich nicht schneiden, so brauchen wir nicht den Chordal-Punct derselben zu suchen, sondern können gleich die Radien so verlängern oder verkürzen, daſs die bezüglichen Kreise sich schneiden und alsdann den Chordal-Punct bestimmen. Durch Wiederholung derselben Construction erhalten wir einen neuen zur Bestimmung der gesuchten geraden Linie nöthigen Punct.

157. Seyen zweitens zwei beliebige Kreise $\gamma\mu$ und c und irgend ein Punct R, der nach der 39. Figur auſserhalb derselben liegt, gegeben. Zieht man bei dieser Annahme vom gegebenen Puncte an die beiden gegebenen Kreise Tangenten, so schneiden sich diejenigen beiden geraden Linien τP und tP, welche die Tangenten jedes Paares halbiren, im Chordal-Puncte der drei Oerter, nach der Figur in P. Bezeichnen wir ferner die Radien der beiden gegebenen Kreise durch ϱ und r, und nehmen $\varphi = -\frac{\varrho+r}{2}$, so besteht das System von neuen Kreisen, das auf diese Weise bestimmt wird, statt der beiden gege- Fig. 39.

benen Kreise aus zweien Kreisen von gleichen Radien $\left(\frac{\varrho-r}{2}\right)$, von welchen der erste Kreis in der Figur $\gamma\nu$ ist, und statt des gegebenen Punctes aus einem Kreise RM, dessen Radius gleich ist $\left(\frac{\varrho+r}{2}\right)$. (Wir nehmen hierbei auf die verschiedenen Vorzeichen, mit welchen die Radien behaftet erscheinen, keine Rücksicht). Der Chordal-Punct dieses neuen Systems liegt im Durchschnitte derjenigen geraden Linie Kp, welche auf der Central-Linie der beiden gleichen Kreise in deren Mitte senkrecht steht, mit einer der beiden andern Chordalen, für welche wir in der Construction die gemeinschaftliche Chorde λp, der beiden Kreise RM und $\gamma\nu$ genommen haben. Der Chordal-Punct ist demnach p. Durch P und p geht die zu construirende gerade Linie, welche die Mittelpuncte derjenigen beiden Kreise enthält, die durch den gegebenen Punct R gehen und die beiden gegebenen Kreise $\gamma\mu$ und c beide gleichartig berühren.

Wir hätten auch φ gleich $(-\varrho)$ oder $(-r)$ nehmen können, alsdann hätten wir wiederum ein System von zwei Kreisen und einem Puncte erhalten, dessen Chordal-Punct gerade wie im ersten Theile der eben angezeigten Construction gefunden wird. Oder, wir hätten auch statt des gegebenen Punctes einen Kreis von beliebigem schicklichem Radius nehmen, und um die Länge dieses Radius die Radien der beiden gegebenen Kreise vergröſsern und alsdann den Chordal-Punct, wie in der vorigen Nummer, durch den Durchschnitt gemeinschaftlicher Chorden bestimmen können. — Diese Andeutungen sind für unsere Absicht mehr als hinreichend.

158. Um die Auflösung der in Rede stehenden Probleme, wo drei Kreise oder statt eines derselben ein Punct gegeben ist, zu vollenden, brauchen wir jetzt nur noch Kreise zu construiren, deren Mittelpuncte auf schon bestimmten geraden Linien liegen und die zwei gegebenen Kreise berühren, oder statt einen der Kreise zu berühren, durch einen gegebenen Punct gehen. Diese Constructionen sind früher angezeigt (116—118). Wenn noch zwei Kreise zu berühren sind, so erhalten wir vier Auflösungen, von denen wir aber nur zwei zu construiren brauchen, die beiden andern sind fremde Auflösungen. Wir überzeugen und hiervon sogleich aus dem Anblick der Figur und wollen in kein Detail hier eingehen. Zum Schlusse bemerken wir nur noch, daſs — wie überhaupt jede lineare Gleichung eine reelle Linie darstellt — wir auch die Gleichungen (6) und (7) der letzten Nummern immer durch die Bestimmung von Chordal-Puncten construiren können, und also auch dann, wenn die Auflösungen der Aufgabe unmöglich werden.

159. Es sind noch zwei Probleme der Tactionen übrig, nemlich einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Kreise und eine gegebene gerade Linie berührt, und einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis und eine gegebene gerade Linie berührt und zugleich durch einen gegebenen Punct geht. Diese beiden Aufgaben ordnen sich wie die beiden vorigen zusammen, und überhaupt sind die nächstfolgenden Entwicklungen den vorhergehenden ganz analog:

Seyen:

$$\left.\begin{aligned}(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 &= \varrho^2,\\ (y-b)^2+(x-a)^2 &= r^2,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

die Gleichungen zweier gegebenen Kreise, alsdann ist:

$$2(b-\beta)y+2(a-\alpha)x = \varrho^2-(\alpha^2+\beta^2)-r^2+(a^2+b^2),$$

die Gleichung ihrer Chordalen. Nehmen wir die gegebene gerade Linie zur zweiten Axe, so ist ihre Gleichung

$$x = 0,$$

und legen wir überdieſs den Anfangs-Punct der Coordinaten in den Durchschnitt dieser Linie mit jener Chordalen, so haben wir folgende Beziehung zwischen den Constanten der beiden Kreis-Gleichung:

$$\varrho^2 - (\alpha^2 + \beta^2) - r^2 + (a^2 + b^2) = 0.$$

Wenn wir nun ferner die Radien der gegebenen Kreise beide um ein gleiches Stück φ gröſser nehmen, und um dasselbe Stück die gegebene gerade Linie parallel mit sich selbst nach der positiven oder negativen Seite der x hin fortrücken lassen, so erhalten wir, mit Berücksichtigung der Bedingungs-Gleichung:

$$(b-\beta)y + (a-\alpha)x = (\varrho - r)\varphi, \qquad (2)$$

für die Gleichung der Chordalen der beiden neuen Kreise, und

$$x = \pm \varphi \qquad (3)$$

für die Gleichung der neuen geraden Linie. Wenn wir aus der letzten Gleichung den Werth von φ nehmen und in die vorhergehende substituiren, so kommt, wenn wir ordnen:

$$y = -\frac{(a-\alpha) \pm (r-\varrho)}{b-\beta}\,x, \qquad (4)$$

eine lineare Gleichung, die nicht mehr φ enthält. Die durch diese Gleichung dargestellten beiden geraden Linien sind also der Ort aller Durchschnitte der durch (2) und (3) bezeichneten geraden Linien, wenn wir in diesen Gleichungen nach einander für φ jeden beliebigen Werth nehmen. Zu derselben Gleichung (4) wären wir gekommen, wenn wir die gegebene gerade Linie immer nach derselben, etwa nach der negativen Seite der x, fortgerückt, also in der Gleichung derselben, in (3), φ immer mit negativen Zeichen genommen hätten, zugleich aber in der Gleichung (2) φ einmal positiv, das andere mal negativ setzen. In der Construction entspricht dem letztern Falle entweder eine Verkürzung der Radien, so daſs diese gleich $(\varrho-\varphi)$ und $(r-\varphi)$ werden, oder auch daſs für dieselben diese Ausdrücke mit dem entgegengesetzten Zeichen, also $(\varphi-\varrho)$ und $(\varphi-r)$ genommen werden.

Wenn wir erstens den Radius eines der beiden gegebenen Kreise um ein beliebiges Stück φ verkürzen und den Radius des andern Kreises um dasselbe Stück verlängern, dann zweitens jenen Radius verlängern, während wir diesen verkürzen, und beidesmal die gegebene gerade Linie um das Stück (φ) parallel mit sich sich selbst fortrücken lassen, so brauchen wir nur, um die Gleichung (4) für diese Fälle zu modificiren, nach einanander das Zeichen von ϱ und r zu ändern. Auf diese Weise kommt:

$$y = -\frac{(a-\alpha) \pm (r+\varrho)}{b-\beta}\,x, \qquad (5)$$

und wenn wir die Gleichungen (4) und (5) in eine Form zusammenfassen

$$y = -\frac{(a-\alpha) \pm (r \mp \varrho)}{b-\beta}\,x. \qquad (6)$$

160. Wir hätten die Resultate der vorigen Nummer unmittelbar aus der 153. Nummer und den nachstehenden Bemerkungen folgern können. Wenn nemlich eine gerade Linie in einem beliebigen Puncte von verschiedenen Kreisen berührt wird, so nähert sich derjenige Kreis, dessen Radius am gröſsten ist, am meisten dieser geraden Linie: wir können dieselbe als die Gränze zwischen denjenigen Kreisen, die auf der einen Seite

und denjenigen, die auf der andern Seite liegen, ansehen, so daſs der Uebergang von diesen zu jenen dadurch geschieht, daſs die Radien unendlich werden. Was also für Kreise von jedem beliebigen Radius gilt, gilt auch wenn Kreise mit geraden Linien vertauscht werden. Solche Schluſs-Weisen, die, wie mir billig scheint, in der Behandlung der Geometrie im Sinne der Alten durchaus nicht Platz finden dürfen, lassen sich durch algebraische Entwicklungen unterstützen, und gewinnen auf diese Weise volle Evidenz. In unserm Falle kommt Alles darauf an, eine gerade Linie durch eine Kreis-Gleichung auszudrücken. Auf solche Ausdrücke sind wir gewissermaaſsen schon in der 123. Nummer gestoſsen. Denn, wenn wir daselbst $\mu = -1$ nehmen, so stellt die Gleichung (2)

$$y^2+x^2-2mx = \varrho^2-\alpha^2$$

die Chordale der beiden gegebenen Kreise dar, also nach der dort gemachten Axen-Bestimmung, die zweite Axe. In obiger Voraussetzung wird m unendlich; um auf die Gleichung der zweiten Axe:

$$x = o,$$

zu kommen, brauchen wir bloſs alle Glieder obiger Gleichung, die nicht m, gleichviel ob y und x, enthalten, zu vernachläſsigen.

Es folgt zugleich aus der eben angezogenen Nummer, daſs wenn ein Kreis und eine gerade Linie gegeben sind, wir die gegebene gerade Linie als Chordale der beiden Oerter betrachten können, und daſs mithin der Chordal-Punct zweier Kreise und einer geraden Linie in dem Durchschnitte der letztern mit der Chordalen der beiden erstern liegt. In der vorstehenden Nummer haben wir also den Anfangs-Punct der Coordinaten in den Chordal-Punct gelegt; wollen wir also für dieselbe die End-Gleichung der 153. Nummer umformen, so ist zunächst $y' = x' = o$ und es kommt:

$$y = -\frac{\varrho(a-A) \pm r(A-\alpha) \pm R(\alpha-a)}{\varrho(b-B) \pm r(B-\beta) \pm R(\beta-b)}\, x. \qquad (7)$$

Soll nun die dritte Kreis-Gleichung:

$$(y-B^2)+(x-A)^2 = R^2,$$

die zweite Axe darstellen, so ist B gleich Null (oder hat irgend einen endlichen Werth); ferner sind A und R gleich und zwar gröſser als jede gegebene Gröſse. Setzen wir also in der Gleichung (7) A und R gleich, dividiren durch den Werth derselben Nenner und Zähler des Coefficienten von x, so finden wir mit Vernachläſsigung der verschwindenden Gröſsen:

$$y = -\frac{(a-\alpha) \pm (r\mp\varrho)}{b-\beta}\, x, \qquad (8)$$

gerade dieselbe Gleichung als oben.

Wir können hier noch weiter gehen, und zeigen, wie die allgemeine Gleichung (7), gehörig modificirt, diejenigen geraden Linien, welche die Mittelpuncte der Berührungs-Kreise erhalten, auch dann noch darstellt, wenn wir für zwei der drei gegebenen Oerter gerade Linien nehmen. Die Stelle des Chordal-Punctes vertritt alsdann offenbar der Durchschnitt der beiden gegebenen geraden Linien, gleichviel welche Lage der dritte gegebene Ort auch haben mag. Legen wir also den Anfangs-Punct der Coordinaten in diesen Durchschnitt, und nehmen als zweite Axe die eine der gegebenen geraden Linien, so haben wir zunächst wiederum die Gleichung (8). Soll ferner die Gleichung:

$$(y-b)^2+(x-a)^2 = r^2,$$

eine gerade Linie darstellen, so können wir uns diese Linie, wie eben, als die Gränze

derjenigen Kreise denken, von welchen dieselbe in irgend einem Puncte, für den wir sogleich den Anfangs-Punct nehmen wollen, berührt wird, wenn wir nemlich die Radien jener Kreise immer gröſser nehmen. Betrachten wir irgend einen dieser Kreise, und nehmen die letzte Gleichung für die seinige, so überzeugen wir uns leicht, auch ohne die Figur zu zeichnen, daſs

$$\frac{b}{r} = \sin\omega, \quad \frac{a}{r} = \cos\omega,$$

wenn wir den Winkel, welchen die zweite gegebene gerade Linie mit der ersten, also mit der Axe y bildet, ω nennen.*) Diese Gleichungen bestehen auch bei immer gröſser werdendem r. Wenn wir daher bei dieser Annahme Nenner und Zähler des Coefficienten von x in der Gleichung (8) durch r dividiren, für $\frac{b}{r}$ und $\frac{a}{r}$ jene Werthe substituiren und die verschwindenden Gröſsen vernachlässigen, so kommt:

$$y = -\frac{\cos\omega \pm 1}{\sin\omega},$$

eine Gleichung, die wir in folgende beide einzelne Gleichungen:

$$y = -\frac{1+\cos\omega}{\sin\omega} = -\cot g\frac{\omega}{2},$$

$$y = \frac{1-\cos\omega}{\sin\omega} = \tan g\frac{\omega}{2},$$

auflösen können. Diese Gleichungen bezeichnen, wie zu erwarten stand, diejenigen beiden geraden Linien, welche die, am Durchschnitte der beiden gegebenen entstehenden, Scheitel-Winkel halbiren.

Wir werden uns niemals, als einzigen Beweises, solcher Entwicklungen, die den letzten ähnlich sind, bedienen; wir erkennen aber zugleich an, daſs solchen Beweisen nichts an Strenge abgeht. Denn, auf was für Formen auch die Rechnung uns führen mag, wir können mit diesen Formen weiter rechnen. Diesen Grundsatz müssen wir festhalten

*) Nach den Bestimmungen des Textes muſs die Gleichung:

$$(x-b)^2 + (x-a)^2 = r^2, \qquad (a)$$

mit folgender Gleichung identisch seyn:

$$y = \tan g\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) . x. \qquad (b)$$

Dieſs gibt zuvörderst:

$$a^2+b^2 = r^2, \qquad (c)$$

wonach die Gleichung (a), wenn wir zugleich alle Glieder derselben durch 2b dividiren, folgende wird:

$$\frac{y^2}{2b} - y + \frac{x^2}{2b} - \frac{a}{b}x = o,$$

und diese Gleichung geht in (b) über, wenn

$$-\frac{a}{b} = -\tan g\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right), \text{ mithin } \frac{b}{a} = \tan g\,\omega, \qquad (d)$$

und wir überdieſs b und also auch a und r unendlich nehmen. Die Zusammenstellung von (c) und (d) gibt, wie im Texte:

$$\frac{b}{r} = \sin\omega, \quad \frac{a}{r} = \cos\omega,$$

einen Grundsatz, den wir stillschweigend bei der Auflösung jeder algebraischen Gleichung annehmen, denn, sonst müfsten wir ja alle Gleichungen, durch die wir stufenweise zum Resultate gelangen, näher prüfen, ob sie nicht Ausdrücke enthalten, die unendlich oder imaginär werden.

161. Wir überzeugen uns leicht, dafs jede der vier geraden Linien, welche die Gleichung (6) bezeichnet, die Mittelpuncte zweier derjenigen Kreise enthält, die die beiden gegebenen Kreise und die gegebene gerade Linie berühren; solcher Kreise sind mithin
Fig. 40. acht möglich. In der 40. Figur z. B. seyen C und γ die beiden zu berührenden Kreise, K und K' zwei gesuchte. Nehmen wir den ersten der zuletzt bezeichneten Kreise und nennen dessen Radius φ, so liegt der Mittelpunct dieses Kreises in einem der beiden Durchschnitte, der aus C und γ mit Radien, die gleich sind $(r+\varphi)$ und $(\varrho+\varphi)$ beschriebenen Kreise, durch welchen Mittelpunct auch diejenige gerade Linie vv geht, welche der gegebenen NN parallel ist, und von ihr um dasselbe Stück φ absteht. Nehmen wir nun an, dafs die beiden gegebenen Kreise nach der negativen Seite der x hin liegen, so ist die Gleichung jener Parallelen

$$x = -\varphi,$$

mithin liegt der Mittelpunct des Berührungs-Kreises K, auf einer geraden Linie, deren Gleichung folgende ist:

$$y = -\frac{(a-\alpha)-(r-\varrho)}{b-\beta}\,x. \qquad (9)$$

Auf derselben geraden Linie liegt der Mittelpunct des Kreises K'.

Fig. 41. In der 41. Figur liegt der Mittelpunct des Kreises K in einem der Durchschnitte zweier Kreise, die aus C und γ mit Radien beschrieben werden, die, wenn wir wiederum durch φ den Radius des Kreises K bezeichnen, gleich sind $(r-\varphi)$ und $(\varphi-\varrho)$. Durch denselben Punct geht auch diejenige gerade Linie vv, die der gegebenen NN parallel ist, und von derselben um dasselbe Stück φ absteht. Die Gleichung dieser Linie ist, wenn wir diejenige Seite, auf welcher die Mittelpuncte der gegebenen Kreise liegen, als die positive Seite der x betrachten:

$$x = \varphi;$$

mithin liegt der Mittelpunct des Berührungs-Kreises K auf einer geraden Linie, die wiederum durch die Gleichung (9) dargestellt wird. Auf derselben geraden Linie liegt der Mittelpunct des Kreises K'.

Fig. 42. 162. Nichts ist nun leichter als die, durch die vier in der Gleichung (6) enthaltenen Gleichungen dargestellten, geraden Linien zu construiren. Wir können dieselben, ähnlich wie wir früher verfahren sind, construiren, indem wir irgend zwei Puncte derselben bestimmen; wir können aber auch die Gleichungen (6) geradezu construiren. Nach der frühern Annahme liegt der Anfangs-Punct der Coordinaten in dem Durchschnitte P der gegebenen geraden Linie und der Chordalen der beiden gegebenen Kreise. Die Gleichung der Chordalen ist:

$$(b-\beta)y+(a-\alpha)x = 0;$$

mithin entspricht für dieselbe der Abscisse $-(b-\beta)$ eine Ordinate $(a-\alpha)$. Es ist aber $(b-\beta)$ die Projection der geraden Linie, welche die Mittelpuncte der beiden Kreise verbindet auf die zweite Axe, nach der Figur also MN. Nehmen wir nun auf der ersten Axe nach der negativen Seite hin ein Stück PQ gleich MN, und legen durch Q eine gerade Linie, die der zweiten Axe parallel ist, so ist die Ordinate des Durchschnittes dieser

Linie mit den Chordalen, QR, gleich $(a-\alpha)$. Tragen wir nun von diesem Puncte R aus, nach beiden Seiten hin Stücke auf, die gleich sind $(r+\varrho)$ und $(r-\varrho)$, so ergibt sich:

$$a-\alpha+(r-\varrho) = QV,$$
$$a-\alpha-(r-\varrho) = QW,$$
$$a-\alpha+(r+\varrho) = QT,$$
$$a-\alpha-(r-\varrho) = QU,$$

und wenn wir durch P und jeden der Puncte V, W, T und U eine gerade Linie legen, so erhalten wir auf diese Weise die vier geraden Linien, die durch die Gleichung:

$$y = -\frac{a-\alpha \pm (r\mp\varrho)}{b-\beta}\,x, \qquad (6)$$

dargestellt werden.

Sind die Radien der beiden gegebenen Kreise gleich, so fallen die beiden geraden Linien OW und OV in eine einzige zusammen, auf der also die Mittelpuncte von vier Berührungs-Kreisen liegen.

Wenn einer der beiden gegebenen Kreise, etwa der Kreis γ, auf einen Punct sich reducirt, so ändert sich die eben angewandte Schlufs-Weise nicht im Mindesten, die Gleichung (6) geht aber, indem wir ϱ gleich Null setzen, in folgende Gleichung über:

$$y = -\frac{a-\alpha\pm r}{b-\beta}\,x, \qquad (10)$$

welche alsdann nur noch zwei einzelne Gleichungen in sich begreift. Durch die Construction derselben, die der eben angezeigten vollkommen entspricht, erhalten wir zwei gerade Linien, von welchen jede die Mittelpuncte zweier der vier möglichen Berührungs-Kreise enthält.

Die beiden in Rede stehenden Probleme der Tactionen sind also auf die bekannten Constructionen von Kreisen zurückgeführt, deren Mittelpuncte in einer gegebenen geraden Linie liegen und die eine gegebene gerade Linie und einen gegebenen Kreis berühren, oder, statt einen Kreis zu berühren, durch einen gegebenen Punct gehen (150–152). Wir gehen in keine weitere Ausführungen hier ein (später werden wir noch neue Constructionen der Probleme der Tactionen geben), und wollen nun andere Beziehungen von Kreisen zu einander betrachten.

163. Wenn zwei Kreise, die zu einander irgend eine beliebige Lage haben, gegeben sind, und wir ziehen in beliebiger Richtung in denselben zwei parallele Radien, so geht diejenige gerade Linie, welche die Endpuncte dieser Radien verbindet, immer durch einen oder den andern von zweien festen Puncten der Central-Linie, je nachdem die Endpuncte der Radien auf dieselbe oder auf entgegengesetzte Seite dieser Linie fallen. Es ist leicht diefs zu zeigen. Seyen:

$$y^2+x^2 = R^2,$$
$$y^2+(x-\alpha)^2 = \varrho^2,$$

die Gleichungen der beiden Kreise, alsdann ist:

$$y = 0$$

die Gleichung der Centralen. Nennen wir ferner die Winkel, welche die parallelen Radien mit dieser Linie, also mit der ersten Axe bilden, φ, so ist die Gleichung derjenigen geraden Linie, welche durch die Endpuncte dieser Radien, also durch die Puncte $(R\sin\varphi,\ R\cos\varphi)$ und $(\varrho\sin\varphi,\ (\varrho\cos\varphi+b))$ geht, folgende:

$$y-R\sin\varphi = \frac{(R-\varrho)\sin\varphi}{(R-\varrho)\cos\varphi-\alpha}\,(x-R\cos\varphi),$$

und diese Gleichung gibt, wenn wir in derselben $y = o$ setzen, nach einer ganz einfachen Reduction für den Durchschnitt mit der Centralen:

$$x = \frac{R\alpha}{R-\varrho},$$

einen Ausdruck, unabhängig von φ. Wir haben hierbei vorausgesetzt, daſs die End-puncte beider Radien auf derselben Seite der ersten Axe liegen; betrachten wir aber statt des einen Radius, für welchen wir den Radius des ersten Kreises nehmen wollen, denjenigen, der mit jenem einen Durchmesser dieses Kreises bildet, so müssen wir die bisher in die Rechnung eingeführten Coordinaten des ersten Punctes, oder was damit auf Eins hinauskommt, den Radius R negativ nehmen. Machen wir diese Zeichen-Aenderung im Resultate, so kommt:

$$x = \frac{R\alpha}{R+\varrho}.$$

Fig. 43. 44. Die auf diese Weise bestimmten beiden festen Puncte der Central-Linie zweier Kreise, die in der 43. und 44. Figur durch S und σ bezeichnet sind, wollen wir Symmetral-Puncte der beiden gegebene Kreise nennen, und zwar S den äuſsern, σ den innern Symmetral-Punct.*) Im erstern Puncte vereinigen sich alle diejenigen geraden Linien, welche durch die, auf dieselbe Seite der Centralen fallenden End-Puncte irgend zweier paralleler Radien, wie z. B. durch M und μ oder durch M' und μ' gehen, im innern Symmetral-Puncte alle diejenigen geraden Linien, welche die, nicht auf dieselbe Seite der Centralen fallenden End-Puncte irgend zweier parallelen Radien, z. B. M und μ', oder M' und μ verbinden. Wenn die beiden gegebenen Kreise sich nicht schneiden und einer den andern auch nicht einschlieſst, so schneiden sich in den beiden Symmetral-Puncten auch die gemeinschaftlichen beiden äuſsern und innern Tangenten. Wenn die beiden Kreise sich schneiden, so sind nur die erstgenannten, wenn ein Kreis ganz in dem andern liegt, gar keine gemeinschaftliche Tangenten möglich; aber auch in diesen Fällen existiren jene Symmetral-Puncte, die wir vermittelst paralleler Radien construiren können. Wenn die beiden gegebenen Kreise sich innerhalb oder auſserhalb berühren, fällt der äuſsere oder innere Symmetral-Punct mit dem Berührungs-Puncte zusammen. Dieſs folgt sogleich aus der analytischen Bestimmung jener Puncte; denn, wenn z. B. die beiden Kreise sich auſserhalb berühren, so ist, bei obiger Axen-Annahme, $R+r = \alpha$, mithin reducirt sich die Abscisse des innern Symmetral-Punctes auf

$$x = R,$$

worin wir sogleich die Abscisse des Berührungs-Punctes wieder erkennen.

164. Wenn wir drei Kreise zusammenstellen, so haben je zwei derselben ihren zwiefachen Symmetral-Punct, den wir auf die eben angezeigte Weise construiren können. Bedienen wir uns zu diesem Ende dreier Radien, die alle drei unter einander parallel sind, so folgt unmittelbar aus der 77—81. Nummer folgender Satz:

Wenn irgend drei beliebige Kreise gegeben sind, so können wir dieselben auf dreifache Art zu zwei nehmen, und erhalten mithin drei äuſsere und drei innere Symmetral-Puncte; die drei äuſsern, so wie jeder derselben und zwei der innern Symmetral-Puncte, liegen in gerader Linie.

*) Der von Monge eingeführte Ausdruck ist „point de similitude de deux cercles externe et interne. (Innerer und äuſserer Aehnlichkeits-Punct.)

Wir können für je drei beliebige Kreise jene vier gerade Linien bestimmen. Wir nennen diese Linien Symmetralen der drei Kreise; diejenige Symmetrale, welche die drei äufsern Symmetral-Puncte enthält, nennen wir die äufsere, jede der drei übrigen eine innere Symmetrale.*)

165. Nehmen wir an, dafs jeder der drei gegebenen Kreise ganz aufserhalb der beiden andern liegt, so gibt die vorige Nummer folgenden, zuerst von Monge bemerkten Satz: **) Fig. 45.

Zieht man die gemeinschaftliche Tangenten je zweier von drei gegebenen Kreisen, so liegen die drei Durchschnitte der zusammengehörigen äufsern Tangenten in gerader Linie. Ebenso liegt jeder dieser Durchschnitte mit zweien Durchschnitten der innern Tangenten in gerader Linie.

In der 43. Figur sind SS'S", $S\sigma'\sigma''$, $S'\sigma\sigma''$ und $S''\sigma'\sigma$ die vier Symmetralen.

Wir könnten hier den Fall besonders hervorheben, dafs die drei gegebenen Kreise sich gegenseitig berühren.

166. Wir wollen jetzt die Gleichungen der Symmetralen dreier Kreise bestimmen, und zwar zunächst die Gleichung der äufsern Symmetralen, aus der sich alsdann die Gleichungen der übrigen drei unmittelbar ergeben. Seyen zu diesem Ende:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = \varrho^2,$$
$$(y-b)^2+(x-a)^2 = r^2,$$
$$(y-B)^2+(x-A)^2 = R^2,$$

die Gleichungen der drei gegebenen Kreise. Nehmen wir die Radien, deren wir uns zur Construction des Symmetral-Punctes der beiden ersten Kreise bedienen, der ersten Axe parallel, so haben wir zur Bestimmung der Coordinaten desselben folgende beiden Gleichungen:

$$y-\beta = \frac{\beta-b}{\alpha-a}(x-\alpha),$$

$$y-\beta = \frac{\beta-b}{\alpha-a+\varrho-r}(x-\alpha-\varrho),$$

von denen die erste die Centrale, die zweite diejenige gerade Linie darstellt, die durch die Endpuncte der Radien geht. Bezeichnen wir die Coordinaten des in Rede stehenden Symmetral-Punctes durch y' und x', so kommt durch eine ähnliche Elimination wie in der 77. Nummer:

$$x' = \frac{\varrho a - r\alpha}{\varrho - r}, \quad y' = \frac{\varrho b - r\beta}{\varrho - r}.$$

Da der Werth von x' unabhängig ist von den Ordinaten der Mittelpuncte und überdiefs die Richtung der zweiten Axe durchaus beliebig ist, so folgt, dafs, wenn ein fester und unveränderlicher Kreis gegeben ist, und ein anderer Kreis von constantem Radius sich so bewegt, dafs der Mittelpunct desselben auf einer geraden Linie bleibt, so rückt der Symmetral-Punct beider Kreise ebenfalls auf einer geraden Linie fort, und diese gerade Linie ist jener parallel. Dieselbe Bemerkung hätten wir auch an die Form des Ausdruckes für y' knüpfen können.

*) Nach Monge: „axes de similitude externe et internes." (Aehnlichkeits-Linien.)

**) Monge: Géométrie descriptive. 4ieme éd. nro. 44.

Durch bloſse Buchstaben-Vertauschung erhalten wir aus den letzten Gleichungen die folgenden:

$$x'' = \frac{\varrho A - R\alpha}{\varrho - R},\quad y'' = \frac{\varrho B - R\beta}{\varrho - R},$$

wenn wir die Coordinaten des äuſsern Symmetral-Punctes des ersten und dritten Kreises durch x″ und y″ bezeichnen. Für die Gleichung derjenigen geraden Linie endlich, welche durch die beiden Puncte (y″, x″) und (y′, x′) geht, findet man nach allen Reductionen:

$$y = \frac{\varrho(b-B) + r(B-\beta) + R(\beta-b)}{\varrho(a-A) + r(A-\alpha) + R(\alpha-a)}\,x + \frac{\varrho(aB-Ab) + r(A\beta-aB) + R(\alpha b - a\beta)}{\varrho(a-A) + r(A-a) + R(\alpha-a)} \quad (1)$$

Dieſs ist die gesuchte Gleichung der äuſsern Symmetralen. Darin, daſs diese Gleichung in Beziehung auf die gleichnamigen Constanten der drei Kreis-Gleichungen symmetrisch ist, liegt der directe Beweis des Satzes der 163. Nummer, daſs die drei äuſsern Symmetral-Puncte in gerader Linie liegen.

Nach der 162. Nummer erhalten wir unmittelbar die Gleichungen der drei innern Symmetralen (163), wenn wir in der letzten Gleichung nach einander jeden der drei Radien ϱ, r und R negativ nehmen. Hiernach können wir die Gleichungen der vier einzelnen Symmetralen in folgende Gleichung zusammenfassen:

$$y = \frac{\varrho(b-B) \pm r(B-\beta) \pm R(\beta-b)}{\varrho(a-A) \pm r(A-\alpha) \pm R(\alpha-a)}\,x + \frac{\varrho(aB-Ab) \pm r(A\beta-\alpha B) \pm R(\alpha b - a\beta)}{\varrho(a-A) \pm r(A-\alpha) \pm R(\alpha-a)}. \quad (2)$$

167. Wenn wir die in dem letzten Ausdrucke zusammengezogenen vier Gleichungen mit denen, welche die letzte Gleichung der 153. Nummer:

$$y - y' = -\frac{\varrho(a-A) \pm r(A-\alpha) \pm R(\alpha-a)}{\varrho(b-B) \pm r(B-\beta) \pm R(\beta-b)}\,(x-x')$$

in sich begreift, einzeln vergleichen, so ist sogleich ersichtlich, daſs die durch die erstgenannten Gleichungen dargestellten geraden Linien auf den, durch die letztgenannten Gleichungen dargestellten, senkrecht stehen. Die äuſsere Symmetrale nemlich steht auf derjenigen Linie senkrecht, welche die Mittelpuncte derjenigen beiden Kreise enthält, die die gegebenen alle drei innerhalb und auſserhalb berühren; von den drei innern Symmetralen steht jedesmal diejenige, welche durch den äuſsern Symmetral-Punct irgend zweier gegebenen drei Kreise geht, auf derjenigen geraden Linie senkrecht, in welcher die Mittelpuncte derjenigen beiden Berührungs-Kreise liegen, die jene zwei entweder nicht oder alle beide umschlieſsen.

Aus den letzten Bemerkungen ergeben sich Modificationen für die oben angezeigten Constructionen des Problems der Tactionen; wir können nemlich diejenigen geraden Linien, welche die Mittelpuncte der Berührungs-Kreise enthalten construiren, indem wir vom Chordal-Punct (y′, x′) der gegebenen Kreise Perpendikel auf die Symmetralen fällen.

168. Wir können auch von der Symmetralen zweier Kreise und eines Punctes sprechen. Solcher Symmetralen gibt es zwei, deren Gleichungen wir sogleich erhalten, wenn wir in der Gleichung (2) den Radius des Kreises, den wir uns nun auf seinen Mittelpunct reducirt denken, z. B. R, gleich Null setzen. Auf diese Weise kommt:

$$y = \frac{\varrho(b-B) \pm r(B-\beta)}{\varrho(a-A) \pm r(A-\alpha)}\,x + \frac{\varrho(aB-Ab) \pm r(A\beta-\alpha B)}{\varrho(a-A) \pm r(A-\alpha)}. \quad (3)$$

Diese beiden Symmetralen gehen durch den gegebenen Punct (in welchem zwei Paar Symmetral-Puncte zusammenfallen) und durch den äuſsern und innern Symmetral-Punct

der beiden gegebenen Kreise. Hiervon überzeugen wir uns leicht, wenn wir die Construction bis zum allmähligen Verschwinden des dritten Kreises verfolgen; dasselbe zeigt aber auch die Form der letzten Gleichung. Denn legen wir den Anfangs-Punct der Coordinaten in den gegebenen Punct, setzen mithin B und A gleich Null, so verschwindet das constante Glied der letzten Gleichung, die bezügliche gerade Linie geht also durch den gegebenen Punct. Wir erhalten nemlich bei jener Annahme statt der letzten Gleichung (3) folgende:

$$y = \frac{\varrho b \mp r\beta}{\varrho a \mp r\alpha} x,$$

die wir auch unter folgende Form bringen können:

$$\frac{\varrho a \mp r\alpha}{\varrho \mp r} y = \frac{\varrho b \mp r\beta}{\varrho \mp r} x,$$

woraus denn sogleich auch ferner ersichtlich ist, dafs die durch jene Gleichung dargestellte gerade Linie durch den Punct

$$\left(\frac{\varrho b \mp r\beta}{\varrho \mp r}, \quad \frac{\varrho a \mp r\alpha}{\varrho \mp r}\right),$$

d. h. durch den (äufsern oder innern) Symmetral-Punct geht.

Der Analogie und der leichtern Uebersichtlichkeit wegen, können wir die gerade Linie, welche durch zwei gegebene Puncte geht, als die Symmetrale der beiden Puncte und eines beliebigen Kreises ansehen. Hierzu berechtigen uns sowohl Gränz-Betrachtungen in der Construction, als auch die Form, welche die allgemeine Gleichung (2) annimmt, wenn wir zwei Radien, z. B. R und r gleich Null setzen. Alsdann verschwinden aus der eben angezogenen Gleichung die Constanten ϱ, α und β und dieselbe reducirt sich auf:

$$y = \frac{b - B}{a - A} x + \frac{aB - Ab}{a - A},$$

auf die Gleichung einer geraden Linie, welche durch die beiden gegebenen Puncte (B, A) und (b, a) geht.

169. Wir wollen ferner sehen, was aus der Gleichung der Symmetralen dreier Kreise wird, wenn wir statt eines Kreises eine gerade Linie nehmen. Bedienen wir uns zu diesem Ende derselben Reductions-Art als für den bezüglichen Fall in der 160 Nummer, setzen wir nemlich R gleich A und gröfser als jede gegebene Gröfse, während B einen endlichen Werth behält, so kommt, indem wir zunächst die Gleichung (1) behandeln:

$$y = \frac{\beta - b}{-\varrho + r + \alpha - a} x + \frac{-\varrho b + r\beta + \alpha b - a\beta}{-\varrho + r + \alpha - a}, \qquad (4)$$

und wenn wir reduciren:

$$((r-a) - (\varrho - \alpha))y = (\beta - b)x + (r-a)\beta - (\varrho - \alpha)b.$$

Diese Gleichung können wir endlich noch unter folgende beide Formen bringen:

$$\begin{aligned} ((r-a)-(\varrho-\alpha))(y-b) &= (\beta-b)(x-a+r), \\ ((r-a)-(\varrho-\alpha))(y-\beta) &= (\beta-b)(x-\alpha+\varrho), \end{aligned} \qquad (5)$$

und so ist augenfällig, dafs die in Rede stehende gerade Linie durch die Puncte (b, a—r) und (β, α—ϱ) geht, also mit Beziehung auf die 42. Figur durch K und x, durch die Endpuncte zweier paralleler Radien der gegebenen Kreise, mithin auch durch den (äufsern) Symmetral-Punct derselben. Diefs folgt nemlich aus der 163. Nummer, und, umgekehrt, wenn wir, was leicht ist, geradezu aus der Gleichung (4) beweisen, dafs die bezügliche Linie durch den Symmetral-Punct geht, so erscheint, weil wir als gegebene gerade Linie jede beliebige betrachten können, der Satz der angezogenen Nummer, dafs nemlich die Fig. 42.

Endpuncte irgend zweier beliebigen paralleler Radien in zweien Kreisen mit einem der Symmetral-Puncte in gerader Linie liegen — als eine Modification des Satzes, dafs immer drei Symmetral-Puncte dreier Kreise in gerader Linie liegen.

Durch Zeichen-Aenderung von r und ϱ erhalten wir aus (4) unmittelbar die Gleichungen der drei übrigen Symmetralen, wenn wir dieses Ausdrucks uns auch für den in Rede stehenden Fall bedienen wollen. Diese Linien sind in der Figur durch K'x', K'x und Kx' bezeichnet.

Die zuerst bestimmte und dann die eben genannten drei Linien stehen, ganz der 169. Nummer gemäfs, auf den in der 162. Nummer construirten, daselbst durch (6) bezeichneten geraden Linien, welche die Mittelpuncte der Berührungs-Kreise enthalten, nemlich der Ordnung nach, auf PV, PW, PT und PU senkrecht. Hiernach können wir also wiederum die letztgenannten geraden Linien construiren.

In folgender Gleichung sind die Gleichungen der vier einzelnen Symmetralen zusammengezogen:

$$y = \frac{(\beta - b)x + b(\alpha \pm \varrho) - \beta(a \pm r)}{\alpha \pm \varrho - (a \pm r)}. \qquad (6)$$

Gehen wir noch weiter und fragen nach den Symmetralen eines Kreises und zweier geraden Linien, so brauchen wir nur die letzte Gleichung auf eine ähnliche Weise zu behandeln, wie wir die entsprechende Gleichung (8) in der 160. Nummer behandelt haben.

Den Winkel, welchen die zweite mit der ersten gegebenen geraden Linie, also mit der zweiten Axe, bildet, wollen wir wie dort ω nennen. Dividiren wir nun Nenner und Zähler des zweiten Theiles der Gleichung (6) durch r, substituiren für $\frac{b}{r}$ und $\frac{a}{r}$ ihre Werthe $\sin\omega$ und $\cos\omega$, und vernachläfsigen diejenigen Ausdrücke, die für immer gröfser werdende Werthe von r verschwinden, so geht die letzte Gleichung (6) in folgende über:

$$y = \frac{-x \sin a + (\alpha \pm \varrho)\sin\omega - \beta(\cos\omega \pm 1)}{-(\cos\omega \pm 1)},$$

wo das Zeichen von 1 im Nenner dem Zeichen von 1 im Zähler entsprechend genommen werden mufs. Diese Gleichung enthält vier von einander verschiedene Gleichungen. Wir können ihr auch folgende Form geben:

$$y - \beta = (x - (\alpha \pm \varrho))\,\frac{\sin\omega}{\cos\omega \pm 1},$$

und endlich noch in folgende beide Gleichungen auflösen:

$$y - \beta = (x - (\alpha \pm \varrho))\,\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}, \qquad (7)$$

$$y - \beta = -(x - (\alpha \pm \varrho))\,\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}.$$

Die vier durch diese Gleichungen dargestellten Symmetralen bilden zwei Paar Parallel-Linien, die auf denjenigen beiden geraden Linien, welche die am Durchschnitte der gegebenen geraden Linien entstehenden Winkel halbiren, und mithin die Mittelpuncte der Berührungs-Kreise enthalten, senkrecht stehen (in anderer Ordnung genommen, ihnen parallel sind). In so fern wir die letztgenannten Linien durch Perpendikel auf jene Symmetrale construiren, erhalten wir zwei Paar zusammenfallender Linien: eine Folgerung, zu der wir auch aus der Construction gelangen können. Hierin erblicken wir denn auch gewissermaafsen den Grund, warum auf jeder jener beiden Halbirungs-Linien im Allgemeinen

die Mittelpuncte von vier Berührungs-Kreisen sich befinden, deren immer noch acht möglich sind. Nur wenn einer der gegebenen Kreise sich auf einen Punct reducirt, reducirt sich die Zahl der jedesmaligen Auflösungen auf die Hälfte.

Wenn wir die Gleichungen (7) genauer betrachten, so sehen wir, daſs die bezüglichen Linien durch einen der beiden Puncte $(\beta, (\alpha+\varrho))$ und $(\beta, (\alpha-\varrho))$ gehen, und wir erkennen in diesen Puncten die Durchschnitte des gegebenen Kreises, mit dem vom Mittelpuncte desselben auf die erste der gegebenen geraden Linie, d. h. auf die zweite Axe, gefällten Perpendikel. Diese Puncte sind in der Figur durch S und σ bezeichnet. Ebenso gehen jene Linien durch die Puncte S' und σ', die in derselben Beziehung zu der zweiten gegebenen geraden Linie stehen. Die vier in Rede stehenden Symmetralen bilden also das in den Kreis beschriebene Parallelogramm $SS'\sigma\sigma'$. Fig. 46.

Wir wären durch Gränz-Betrachtungen in der Construction ebenfalls zu den Resultaten dieser Nummer gekommen. Wir haben aber vorgezogen, diese Gränz-Betrachtungen nur auf die analytischen Formel anzuwenden, und auch hier haben uns dieselben nur dazu gedient, um uns auf die Form der Gleichungen (6) und (7) aufmerksam zu machen, Gleichungen, die wir alsdann auf directe, von aller Gränz-Methode unabhängige, Weise construirt haben. Solche Betrachtungen sind übrigens von groſsem Vortheil, um verschiedene Constructionen aus demselben Gesichtspuncte zu übersehen; wir werden in dem Folgenden an Beispielen sehen, wie wir durch Hülfe derselben, Constructionen, die sich auf gegebene Kreise beziehen, unmittelbar auf die Fälle, wo Puncte und gerade Linien an die Stelle von gegebenen Kreisen treten, übertragen, oder wenigstens sogleich zeigen können, daſs, und aus welchem Grunde jene Uebertragung unstatthaft ist.

170. Wir haben in dem Obigen (163) die Symmetral-Puncte zweier Kreise als diejenigen beiden Puncte bezeichnet, in welchen alle gerade Linien, welche durch die End-Puncte irgend zweier beliebiger paralleler Radien gehen, sich vereinigen. Wenn wir, umgekehrt, durch einen der beiden Symmetral-Puncte irgend eine gerade Linie ziehen, welche die gegebenen Kreise schneidet, so werden durch die Durchschnitte auf dem einen Kreise zwei Radien bestimmt, die den durch die Durchschnitte mit dem andern Kreise bestimmten Radien parallel sind. Es sind CM und $\gamma\mu$, so wie CM' und $\gamma\mu'$ unter sich parallel. Fig. 47. 48.

Eine unmittelbare Folgerung aus dem Parallelismus jener Radien ist, daſs auch die Tangenten in M und μ, so wie die Tangenten in M' und μ' unter sich parallel sind, und daſs mithin die durch jene beliebige, durch einen der Symmetral-Puncte gezogene, gerade Linie auf beiden Kreisen bestimmten Abschnitte gleiche Winkel fassen, woraus denn weiter folgt, daſs die Flächen beider Kreise in demselben Verhältnisse getheilt werden.

171. Bei denselben Voraussetzungen als eben, sind offenbar die Winkel CMM', CM'M, $\gamma\mu\mu'$ und $\gamma\mu'\mu$ alle vier einander gleich. Wenn wir daher zwei von den durch die Puncte M, M', μ und μ' bestimmten vier Radien, welche nicht unter einander parallel sind, und nicht demselben Kreise angehören, (wir wollen die Radien CM' und $\gamma\mu$ nehmen) bis zu ihrem Durchschnitte K verlängern, so steht dieser gleichweit von den End-Puncten jener beiden Radien, von M' und μ ab. Wir können daher aus diesem Durchschnitte K als Mittelpunct einen Kreis beschreiben, der durch jene beiden Puncte geht, und dieser Kreis berührt die beiden gegebenen Kreise und zwar, wie aus der Construction ersichtlich ist, gleichnamig wenn die schneidende gerade Linie durch den äuſsern, ungleichnamig, wenn sie durch den innern Symmetral-Punct geht. Dem ersten Falle entspricht die 47. Figur, dem zweiten die 48. Figur.

Wenn, umgekehrt, irgend ein dritter Kreis zwei gegebene berührt, so geht die gerade Linie, welche die beiden Berührungs-Puncte verbindet, je nachdem die Berührungen gleichnamig oder ungleichnamig sind, durch den äufsern oder innern Symmetral-Punct.

Wir bemerken beiläufig, dafs der letzte Satz ein besonderer Fall des allgemeinen Satzes der 164. Nummer ist.

172. Da die beiden gegebenen Kreise in den Puncten M und μ', so wie in den Puncten M' und μ von demselben Kreise berührt werden, so folgt aus der Theorie des Chordal-Punctes, dafs die gemeinschaftlichen Tangenten in den eben paarweise zusammengestellten Puncten, sich auf der Chordalen der beiden gegebenen Kreise schneiden, nach den bezüglichen beiden Figuren in P und p. Also:

Wenn wir durch einen der beiden Symmetral-Puncte zweier gegebenen Kreise eine beliebige gerade Linie ziehen, welche diesen Kreisen begegnet, so schneiden sich von den vier Tangenten in den vier Durchschnitts-Puncten diejenigen, welche nicht demselben Kreise angehören und nicht parallel sind, auf der Chordalen beider Kreise.

173. Wenn wir ferner die Durchschnitte der beiden Tangenten jedes der beiden gegebenen Kreise, oder, mit andern Worten, die Pole der, durch einen der Symmetral-Puncte gehenden, geraden Linie betrachten, so ist ersichtlich, dafs diejenigen geraden Linien, welche diese Puncte N und ν mit den Mittelpuncten der bezüglichen Kreise C und γ verbinden, parallel sind und überdiefs sich verhalten, wie die Radien der beiden Kreise, woraus denn weiter folgt, dafs jene Puncte N und ν mit dem Symmetral-Puncte S oder σ in gerader Linie liegen. Man überzeugt sich leicht, dafs auch dann, wenn die durch einen der Symmetral-Puncte gezogene gerade Linie die gegebenen Kreise nicht schneidet, die Pole dieser Linie auf den beiden Kreisen mit dem Symmetral-Puncte immer noch in gerader Linie liegen. Also:

Wenn wir durch einen der beiden Symmetral-Puncte zweier Kreise irgend eine gerade Linie legen, so liegen die, in Beziehung auf beide Kreise genommene, Pole derselben in gerader Linie mit dem Symmetral-Puncte.

174. Bringen wir die Resultate der beiden letzten Nummern in Verbindung, so haben wir folgenden Satz:

Wenn man durch einen der beiden Symmetral-Puncte zweier Kreise eine, denselben begegnende, gerade Linie zieht, so bilden die, durch die vier Durchschnitte bestimmten, Tangenten, genugsam verlängert, ein Parallelogramm, welches eine constante gerade Linie, nemlich die Chordale der beiden Kreise, zu einer Diagonalen hat, und dessen andere Diagonale immer durch den Symmetral-Punct geht.

175. Wenn wir eine gerade Linie sich um einen der beiden Symmetral-Punct zweier gegebenen Kreise drehen lassen, so beschreibt der Pol derselben in Beziehung auf jeden jener Kreise eine gerade Linie. Wir erhalten also zwei solcher gerader Linien, die Polaren des Symmetral-Punctes auf den beiden gegebenen Kreisen, deren allgemeine Gleichungen wir hier zunächst entwickeln wollen. Seyen zu diesem Ende:

$$(y-B)^2+(x-A)^2 = R^2,$$
$$(y-\beta)+(x-\alpha) = \varrho^2,$$

die Gleichungen der beiden gegebenen Kreise, alsdann ist:

$$(y'-\beta)(y-\beta)+(x'-\alpha)(x-\alpha) = \varrho^2,$$

die Gleichung der Polaren des Punctes (y', x') auf dem zweiten Kreise. Nehmen wir für diesen Punct den Symmetral-Punct der beiden Kreise, so ist

$$y' = \frac{\varrho B \mp R\beta}{\varrho \mp R}, \quad x' = \frac{\varrho A \mp R\alpha}{\varrho \mp R},$$

wo wir das negative Zeichen auf den äufsern, das positive auf den innern Symmetral-Punct beziehen müssen; nach einer einfachen Reduction wird hiernach die Gleichung obiger Polaren folgende:

$$(B-\beta)(y-\beta) + (A-\alpha)(x-\alpha) = \varrho(\varrho \mp R). \qquad (1)$$

Für die Gleichung der Polaren auf dem ersten Kreise finden wir nach blofser Buchstaben-Vertauschung:

$$(\beta-B)(y-B) + (\alpha-A)(x-A) = R(R \mp \varrho). \qquad (2)$$

Legen wir den Anfangs-Punct der Coordinaten in dem Mittelpuncte des zweiten Kreises, setzen also α und β gleich Null, so gehen die letzten beiden Gleichungen in folgende beide über:

$$By + Ax = \varrho(\varrho \mp R), \qquad (3)$$

$$B(y-B) + A(x-A) = -R(R \mp \varrho). \qquad (4)$$

176. Legen wir die erste Axe durch die Mittelpuncte der beiden gegebenen Kreise, so bekommen wir für die Gleichungen der in Rede stehenden beiden Polaren folgende:

$$\left.\begin{aligned}(A-\alpha)(x-\alpha) &= \varrho(\varrho \mp R),\\ (\alpha-A)(x-A) &= R(R \mp \varrho).\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Unterscheiden wir nun ferner das durch die erste dieser Gleichungen bestimmte x durch einen, das durch die zweite Gleichung bestimmte x durch zwei Accente, so erhalten wir durch Abziehen dieser Gleichungen:

$$(A-\alpha)(x' + x'') = \varrho^2 - \alpha^2 - (R^2 - A^2).$$

Wenn wir also die Chordale der beiden gegebenen Kreise zur zweiten Axe nehmen, so kommt:

$$x' + x'' = 0.$$

Die auf zweien Kreisen genommenen Polaren jedes ihrer beiden Symmetral-Puncte stehen gleichweit von der Chordalen ab.

Hierin liegt der directe Beweis des früher schon (99) bemerkten Satzes, dafs die Chordale zweier Kreise die gemeinschaftlichen Tangenten derselben halbirt. Es ergibt sich ferner hieraus unmittelbar folgender Satz:

Die Pole jeder geraden Linie, die durch einen der beiden Symmetral-Puncte zweier gegebenen Kreise geht, in Beziehung auf diese Kreise genommen, stehen gleichweit von der Chordalen derselben ab.

177. Lösen wir eine der beiden Gleichungen (5), etwa die erstere, in die beiden einzelnen Gleichungen auf, welche dieselbe enthält, so kommt:

$$(A-\alpha)(x-\alpha) = \varrho(\varrho - R),$$

$$(A-\alpha)(x-\alpha) = \varrho(\varrho + R).$$

Ziehen wir diese beiden Gleichungen von einander ab, nachdem wir zuvor die beiden x durch Accente unterschieden haben, so ergibt sich:

$$x' - x'' = \frac{2R\varrho}{A-\alpha},$$

Abgesehn vom Zeichen ändert dieser Werth von $x' - x''$ sich nicht, wenn wir den Constanten der beiden Kreis-Gleichungen mit einander vertauschen. Hieraus ergibt sich folgender Satz, den wir auch unmittelbar aus der vorigen Nummer hätten herleiten können.

Die beiden Polaren des innern und äufsern Symmetral-Punctes stehen auf jedem der beiden Kreise gleichweit von einander ab.

178. Durch Umkehrung erhalten wir aus der 172. Nummer folgenden Satz:

Wenn man von irgend einem Puncte der Chordalen zweier gegebener Kreise an jeden derselben eine Tangente zieht, so liegen die beiden Berührungs-Puncte mit einem der beiden Symmetral-Puncte in gerader Linie.

Fig. 49. Da überdiefs die von einen beliebigem Puncte der Chordalen zweier gegebenen Kreise an dieselben gezogenen Tangenten einander gleich und Radien eines Kreises sind, der die gegebenen rechtwinklig schneidet, so haben wir folgenden Satz:

Wenn irgend zwei gegebene Kreise von einem dritten Kreise unter rechten Winkeln geschnitten werden, so sind die vier Durchschnitte (M, μ', N' und ν) die Winkel-Puncte eines Vierecks, dessen gegenüberliegende Seiten sich bei gehöriger Verlängerung in den beiden Symmetral-Puncten (S und σ) schneiden.

Fig. 50. 51. 52. 179. Wir wollen die vier Durchschnitte einer beliebigen geraden Linie mit zweien gegebenen Kreisen, durch deren äufsern oder innern Symmetral-Punct diese Linie geht, durch μ, μ', M und M' bezeichnen, so dafs sich die griechischen und lateinischen Buchstaben auf denselben Kreis beziehen, und dann wiederum dafs den beiden accentuirten, wie den beiden nicht accentuirten, Buchstaben solche Puncte entsprechen, in denen die Tangenten unter einander parallel sind. Wenn wir bei dieser Bezeichnung durch M und μ', oder durch M' und μ irgend einen beliebigen Kreis legen, so schneidet dieser Kreis die beiden gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln. Denn diese Winkel sind offenbar gleich der Summe oder dem Unterschiede derjenigen gleichen Winkel, unter welchen die gegebenen Kreise von der, durch einen der Symmetral-Puncte gehenden geraden Linie geschnitten werden, und derjenigen, wiederum gleichen, Winkel, welche jene gerade Linie auf dem dritten Kreise bestimmt. In den Constructionen der 50—52. Figur geht der schneidende Kreis durch M' und μ, es ist:

$$\left.\begin{matrix} RM'M - QM'M \\ RM'Q \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \varrho\mu\mu' - \varkappa\mu\mu', \\ \varrho\mu\varkappa; \end{matrix}\right.$$

wobei wir die bezeichneten Winkel zweier Kreisbogen, wie bekannt, durch Tangenten bestimmen.

Der dritte Kreis schneidet die beiden gegebenen aufser in den Puncten M' und μ noch in zwei Puncten N und ν. Die in diesen Durchschnitten entstehenden Winkel sind ebenfalls gleich, woraus denn, wenn wir die eben angewendete Schlufs-Weise geradezu umkehren, folgt, dafs jene beiden Puncte N und ν mit dem Symmetral-Puncte in gerader Linie liegen. Also:

Wenn wir durch einen der beiden Symmetral-Puncte zweier gegebenen Kreise eine gerade Linie legen, welche die beiden gegebenen Kreise schneidet, und wir nehmen solche zwei Durchschnitts-Puncte, die nicht auf demselben Kreise liegen, und in denen die Tangenten einander nicht parallel sind, so schneidet jeder beliebige Kreis, der durch diese beiden Puncte geht, die beiden gegebenen unter gleichen Winkeln. Diejenige gerade Linie, welche durch die übrigen beiden Durchschnitte dieses Kreises mit den beiden gegebenen geht, geht auch durch den Symmetral-Punct.

Wenn, umgekehrt, zwei gegebene Kreise von einem dritten unter gleichen Winkeln geschnitten werden, so lassen sich durch die vier Durchschnitte zwei gerade Linien legen, die sich in einem der beiden Symmetral-Puncte vereinigen.

180. Da die Puncte N und ν, die der schneidende Kreis, welcher durch M' und μ geht, aufserdem noch auf den beiden gegebenen Kreisen bestimmt, mit dem Symmetral-Puncte in gerader Linie liegen, so folgt durch Umkehrung, dafs ein Kreis, der durch M', μ und durch den Punct N geht, der auf dem einen der beiden gegebenen Kreise liegt, zugleich auch durch einen vierten Punct ν geht, der auf dem andern Kreise durch eine gerade Linie bestimmt wird, die den Punct N mit dem Symmetral-Puncte verbindet. Hieraus folgt folgender Satz:

Wenn wir durch einen der beiden Symmetral-Puncte zweier gegebenen Kreise zwei gerade Linien ziehen, welche diese beiden Kreise schneiden, so können wir durch zwei Durchschnitte der einen und durch zwei Durchschnitte der andern geraden Linie, die nicht auf demselben Kreise liegen, und in denen die Tangenten unter sich nicht parallel sind, einen Kreis legen. Solcher Kreise erhalten wir vier, von welchen jeder die beiden gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln schneidet.

181. An die letzte Nummer schliefsen sich die nächstfolgenden Entwicklungen an. Seyen:

$$y^2 + x^2 = R^2, \qquad (1)$$

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = \varrho^2, \qquad (2)$$

die Gleichungen zweier gegebenen Kreise: wir wollen in Beziehung auf den ersten dieser Kreise den geometrischen Ort für die zugeordneten Pole aller Punete, die auf dem Umfange des zweiten Kreises liegen, bestimmen. Die Coordinaten irgend eines dieser Puncte seyen y' und x', alsdann ist die Gleichung der Polaren dieses Punctes auf dem ersten Kreise:

$$yy' + xx' = R^2, \qquad (3)$$

und der zugeordnete Pol liegt in dem Durchschnitte dieser Polaren mit derjenigen geraden Linie, welche den Punct (y', x') mit dem Mittelpuncte des ersten Kreises, den wir zum Anfangs-Puncte der Coordinaten genommen haben, verbindet. Die Gleichung dieser geraden Linie ist:

$$yx' - y'x = 0, \qquad (4)$$

Wenn die beiden Gleichungen (3) und (4) zugleich Statt finden sollen, so bezeichnet (y, x) einen bestimmten Punct, den gesuchten Pol. Wir können die Werthe der Coordinaten dieses Punctes eliminiren, wir können aber auch umgekehrt die Coordinaten des Punctes (y', x') durch die Coordinaten des Punctes (y, x) ausdrücken. Auf diese Weise kommt:

$$y' = \frac{R^2 y}{y^2 + x^2}, \quad x' = \frac{R^2 x}{y^2 + x^2}. \qquad (5)$$

Wenn nicht der Punct (y', x') selbst, sondern blofs eine Curve gegeben ist, auf der sich derselbe befindet, und wir also blofs eine Gleichung zwischen y' und x' haben, während wir diese Coordinaten als veränderliche Gröfsen betrachten müssen, so erhalten wir vermittelst der letzten beiden Gleichungen (5) ebenfalls eine Beziehung zwischen y und x, d. h. einen Ort für den gesuchten Pol. Wir haben bei unserer Annahme:

$$(y'-\beta)^2 + (x'-\alpha)^2 = \varrho^2,$$

wo y' und x' veränderliche Gröfsen bezeichnen, so dafs diese Gleichung identisch ist mit der Gleichung des zweiten gegebenen Kreises. Substituiren wir nun für y' und x' die eben gefundenen Werthe in y und x, so ergibt sich:

$$\left(\frac{R^2 y}{y^2 + x^2} - \beta\right)^2 + \left(\frac{R^2 x}{y^2 + x^2} - \alpha\right)^2 = \varrho^2,$$

für den gesuchten Ort der Pole. Entwickeln wir, so erhalten wir aus der letzten Gleichung folgende:

$$R^4 - 2R^2(\beta y + \alpha x) = (\varrho^2 - (\beta^2 + \alpha^2))(y^2 + x^2), \qquad (6)$$

also die Gleichung eines Kreises, der wir, durch eine gewöhnliche Umformung, indem wir zugleich der Kürze halber:

$$(\beta^2 + \alpha^2) - \varrho^2 = \gamma,$$

setzen, folgende Gestalt geben können:

$$\left(y - \frac{R^2\beta}{\gamma}\right)^2 + \left(x - \frac{R^2\alpha}{\gamma}\right)^2 = \frac{R^4}{\gamma^2}\varrho^2. \qquad (7)$$

Weil die Gleichungen (3) und (4) in Beziehung auf die accentuirten und nicht accentuirten Coordinaten symmetrisch sind, so ist auch die Beziehung der durch die Gleichungen (2) und (7) dargesellten Kreise zu einander reciprok, d. h. als geometrischen Ort für die zugeordneten Pole aller Puncte, die auf dem letztbezeichneten Kreise liegen, erhalten wir den Kreis (2). Diese beiden Kreise können wir ganz füglich, rücksichtlich des ersten Kreises, zugeordnete Kreise nennen

Wir wollen den durch die Gleichung (7) dargestellten Kreis noch genauer betrachten. Es folgt aus den Gleichungen (5) für die Voraussetzung, dafs der Punct (y, x) auf dem Umfange des Kreises (1) liegt:

$$x' = x, \quad y' = y;$$

d. h. die Puncte (y, x) und (y', x') fallen zusammen, der gesuchte Kreis geht also durch die Durchschnitte der beiden gegebenen Kreise. Es haben überhaupt die drei Kreise eine gemeinschaftliche Chordale. Dieses allgemeinere Resultat können wir nicht aus den eben angezogenen Gleichungen (5), wenigstens nicht, ohne imaginäre Ausdrücke zu Hülfe zu nehmen, herleiten. Wir überzeugen uns hiervon indefs sogleich, indem wir von der Gleichung (1) nach einander die Gleichungen (2) und (7) abziehen. Die resultirende Gleichung der Chordalen ist in beiden Fällen ein und dieselbe Gleichung, nemlich:

$$2\beta y + 2\alpha x = R^2 + \gamma. \qquad (8)$$

Wenn wir ferner die beiden Gleichungen (2) und (7) mit einander vergleichen, und, der Kürze halber, die letztgenannte folgendermaafsen schreiben:

$$(y - b)^2 + (x - a)^2 = r^2, \qquad (9)$$

so finden wir sogleich:

$$\frac{b}{\beta} = \frac{a}{\alpha} = \pm\frac{r}{\varrho},$$

und hieraus ergibt sich:

$$b\varrho \mp \beta r = 0, \quad a\varrho \mp \alpha r = 0;$$

mithin ist auch, wenn wir durch $(\varrho \mp r)$ dividiren:

$$\frac{b\varrho \mp \beta r}{\varrho \mp r} = 0, \quad \frac{a\varrho \mp \alpha r}{\varrho \mp r} = 0,$$

d. h. der Anfangs-Punct der Coordinaten, oder der Mittelpunct des ersten der beiden gegebenen Kreise, ist entweder der äufsere oder innere Symmetral-Punct der in Beziehung auf diesen Kreis, conjugirten beiden andern Kreise (2) und (7).

182. Die Gleichung (7) kann in eine lineare Gleichung übergehen, was nemlich dann geschieht, wenn zwischen den Constanten des zweiten gegebenen Kreises folgende Bedingungs-Gleichung:

$$\gamma = (\beta^2 + \alpha^2) - \varrho^2 = 0,$$

Statt findet. Diefs ist sogleich ersichtlich, wenn wir zur Gleichung (6) zurückgehen, die sich bei dieser Annahme, indem wir noch durch R^2 dividiren, auf folgende reducirt:

$$2\beta y + 2\alpha x = R^2, \qquad (10)$$

und alsdann die Chordale der beiden gegebenen Kreise (1) und (2) bezeichnet. Obiger Bedingungs-Gleichung entspricht aber der Fall, dafs der zweite Kreis durch den Mittelpunct des ersten Kreises geht. Wenn wir, umgekehrt, von der Gleichung (10), die wir nur als eine Modification der Gleichung (7) zu betrachten haben, ausgegangen wären, und den Ort für die Pole aller Puncte derselben auf dem ersten gegebenen Kreis gesucht hätten, so würden wir als Resultate die Gleichung (2) gefunden haben.

183. Wenn wir nochmals die Gleichung (7) ansehen, so ergibt sich, dafs der durch dieselbe dargestellte Ort immer einen reellen Kreis oder ausnahmsweise eine gerade Linie darstellt; und diefs bewährt sich auch für den Fall noch, dafs der Radius des ersten Kreises imaginär d. h. R^2 negativ wird. Hieraus ziehen wir durch Umkehrung den Schlufs, dafs einer derjenigen Kreise, in Beziehung auf welche zwei gegebene Kreise (2) und (9) zugeordnete sind, imaginär werden kann. Wir können diese Kreise, deren es im Allgemeinen zwei gibt, leicht construiren, denn nach dem Obigen liegen die Mittelpuncte derselben in den Symmetral-Puncten der beiden gegebenen Kreise, und sie haben mit diesen dieselbe Chordale. Aus der hierdurch angedeuteten Construction *) lassen sich die Fälle herleiten, für welche einer der in Rede stehenden Kreise imaginär wird. Wir ziehen indefs vor, zu den frühern Gleichungen zurückzukehren, und setzen, der Kürze halber: β mithin auch b gleich Null, alsdann gibt die Gleichung (8) folgende Bedingungs-Gleichung für die Realität von R:

$$2\alpha x - \alpha^2 + \varrho^2 > 0,$$

wo x der gemeinschaftlichen Chordalen entspricht. Zur Bestimmung des Werthes von x wollen wir von der Chordalen der beiden Kreise (2) und (9), die wir nun als ursprünglich gegeben betrachten, ausgehen und diese Chordale vermittelst der Polaren des (äufsern oder innern) Symmetral-Punctes dieser Kreise, welcher unser Anfangs-Punct der Coordinaten ist, construiren. Für die Gleichungen dieser Polaren haben wir nemlich:

$$-\alpha x = \varrho^2 - \alpha^2,$$
$$-a x = r^2 - a^2;$$

folglich erhalten wir nach der 176. Nummer für die Gleichung der Chordalen:

$$x = \frac{\alpha^2 - \varrho^2}{2\alpha} + \frac{a^2 - r^2}{2a},$$

und hiernach geht obige Bedingungs-Gleichung für die Realität von R in folgende über,

$$\frac{\alpha}{a}(a^2 - r^2) > 0.$$

*) Wenn ein Kreis und eine denselben nicht schneidende gerade Linie gegeben sind und überdiefs noch ein Punct, der auf derjenigen geraden Linie liegt, welche durch den Mittelpunct des gegebenen Kreises geht und senkrecht auf der gegebenen geraden Linie ist, so können wir auf verschiedene Weise aus dem gegebenen Puncte, als Mittelpuncte, einen Kreis beschreiben, der mit dem gegebenen Kreise die gegebene gerade Linie zur Chordalen hat. Es bietet sich uns z. B. sogleich folgende Construction dar:

Man beschreibe aus irgend einem Puncte der gegebenen geraden Linie, als Mittelpuncte, einen Kreis, der den gegebenen unter rechten Winkeln schneidet, und wiederum aus dem gegebenen Puncte, als Mittelpuncte, einen Kreis, der den eben construirten rechtwinklig schneidet. Dieser letzte Kreis ist der gesuchte.

Bei der Interpretation dieser Gleichung müssen wir die beiden Fälle unterscheiden, wo α und a von gleichem oder entgegengesetztem Zeichen sind; dem ersten Falle entspricht, dafs der Anfangs-Punct der Coordinaten im äufsern, dem zweiten Falle, dafs er im innern Symmetral-Puncte liegt. Im erstern Falle wird R, und also der bezügliche Kreis imaginär, wenn r^2 gröfser ist als a^2, d. h. wenn der äufsere Symmetral-Punct innerhalb des Kreises (9) fällt, oder wenn die gegebenen Kreise in einander liegen. Die Gränze der Realität ist, dafs diese Kreise sich innerhalb berühren. Wenn wir den andern Fall nehmen, wo α und a entgegengesetzte Zeichen haben, und wir also denjenigen Kreis betrachten, der aus dem innern Symmetral-Puncte als Mittelpuncte beschrieben wird, so wird dieser Kreis imaginär, wenn, umgekehrt, a^2 gröfser ist als r^2, d. h. wenn jener Symmetral-Punct (derjenige welcher zwischen die Mittelpuncte der beiden gegebenen Kreise
Fig. 53. fällt) aufserhalb liegt. Die äufsere Berührung entspricht der Gränze der Realität. Wenn die beiden gegebenen Kreise sich schneiden, so gibt es immer zwei reelle Kreise, für welche die gegebenen zugeordnete Kreise sind; auf diesen Fall bezieht sich die Construction, in der die beiden in Rede stehenden Kreise C und C′ stärker als die beiden gegebenen c und γ gehalten sind.

184. Wir können die Resultate der letzten Nummern in Folgendem zusammenfassen: *Wenn irgend ein Kreis gegeben und irgend ein zweiter Kreis beliebig angenommen wird, so befinden sich die zugeordneten Pole aller Puncte, die auf dem Umfange des letztern liegen, auf dem Umfange eines dritten Kreises. Alle drei Kreise haben dieselbe Chordale und der Mittelpunct des ersten ist einer der Symmetral-Puncte der beiden übrigen, der beiden conjugirten Kreise. Wenn der beliebig angenommene Kreis durch den Mittelpunct des gegebenen geht, so geht der dritte Kreis in eine gerade Linie, der Chordale der beiden erstern, über, und, umgekehrt, die zugeordneten Pole aller Puncte einer beliebig angenommenen geraden Linie liegen auf dem Umfange eines Kreises, der durch den Mittelpunct des gegebenen geht. Ferner, wenn zwei beliebige Kreise gegeben sind, so gibt es zwei andere Kreise, für welche die gegebenen conjugirte Kreise sind; je nachdem die beiden gegebenen sich schneiden, berühren, oder keinen Punct gemeinschaftlich haben, sind diese Kreise beide reell, einer derselben geht in einen Punct über, oder wird imaginär.*

185. Wenn wir drei Kreise zusammenstellen, so können wir für je zwei derselben diejenigen beiden Kreise construiren, für welche sie zugeordnete Kreise sind. Auf diese Weise erhalten wir im Allgemeinen solcher Kreise sechs, von denen drei die äufsern, drei die innern Symmetral-Puncte der gegebenen Kreise zu Mittelpuncten haben; jene drei erstern, so wie je zwei der letztern und einer der erstern drei haben unter sich dieselbe Chordale, und alle diese Chordalen, deren es vier gibt, gehen durch den Chordal-Punct der drei gegebenen Kreise. Um diefs zu zeigen, wollen wir nur den ersten Fall hervorheben. Bezeichnen wir, der Kürze halber, die drei gegebenen Kreise durch γ, c und C und die aus den äufsern Symmetral-Puncten von C und c, C und γ und von c und γ beschriebenen Kreise durch S, S′ und S″, so haben nach der obigen Bestimmung dieser Kreise, von den in folgendem Schema:

$$C, c, S; \quad C, \gamma, S'; \quad c, \gamma, S'';$$

jedesmalig zusammengestellten drei Kreisen je zwei dieselbe Chordale; es fallen also auch die Chordal-Puncte der drei gegebenen Kreise γ, c und C und der Kreise S, S′ und S″ zusammen. Da nun ferner die Mittelpuncte der letztgenannten Kreise in gerader

Linie liegen, so fallen nothwendig die Chordalen je zweier derselben zusammen, denn einerseits sind diese Linien unter einander parallel, und andrerseits geht jede derselben durch einen nicht unendlich weit entfernt liegenden Punct, nemlich durch den Chordal-Punct der drei gegebenen Kreise.

Da die Chordale der drei Kreise S, S′ und S″ auf der äufsern Symmetralen senkrecht steht, und durch den Chordal-Punct der drei gegebenen Kreise geht, so ist sie nach der 167. Nummer, keine andere als die gerade Linie, welche die Mittelpuncte derjenigen beiden Berührungs-Kreise enthält, die die gegebenen Kreise alle drei auf gleiche Weise berühren. Hierdurch ist eine neue Modification für die Construction des Problems der Tactionen angedeutet, da wir jene, die Mittelpuncte der gesuchten Berührungs-Kreise enthaltenden, geraden Linien, nun auch ohne Construction von Chordal-Puncten, bestimmen können. In der 54. Figur z. B. sind γ, c und C die zu berührenden Kreise; aus S, Fig. 54. dem äufsern Symmetral-Puncte von C und c, ist ein Kreis beschrieben, der durch die Durchschnitte dieser Kreise geht, und ebenso ein entsprechender Kreis aus S′, dem äufsern Symmetral-Puncte von C und γ. Die beiden so beschriebenen Kreise schneiden sich nach der Figur in A und B; durch diese beiden Puncte geht diejenige gesuchte gerade Linie, welche die Mittelpuncte zweier Berührungs-Kreise enthält.

186. Die folgenden Entwicklungen schliefsen sich ebenfalls an die Theorie der Symmetral-Puncte an. Wir wollen nemlich zunächst den Ort derjenigen Puncte suchen, von denen aus zwei gegebene Kreise unter gleichen Winkeln gesehen werden, so dafs also die beiden von einem dieser Puncte an jeden dieser Kreise gezogenen Tangenten unter sich gleiche Winkel bilden. Seyen: Fig. 55. 56.

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = \varrho^2, \qquad (1)$$

$$(y-b)^2+(x-a)^2 = r^2, \qquad (2)$$

die Gleichungen der beiden gegebenen Kreise und y′ und x′ die Coordinaten eines Punctes, den wir beliebig aufserhalb dieser beiden Kreise annehmen wollen. Ziehen wir alsdann von diesem Puncte Tangenten an den ersten Kreis, und bezeichnen den von ihnen eingeschlossenen Winkel durch 2ω, so haben wir offenbar, wenn wir gleich die quadratischen Ausdrücke nehmen:

$$sin^2\omega = \frac{\varrho^2}{(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2}. \qquad (3)$$

Für den zweiten Kreis finden wir einen entsprechenden Ausdruck:

$$sin^2\omega' = \frac{r^2}{(y'-b)^2+(x'-a)^2}, \qquad (4)$$

wenn wir hier den von den Tangenten eingeschlossenen Winkel $2\omega'$ nennen. Vermittelst der letzten Gleichungen können wir, wenn die Coordinaten y′ und x′ gegeben sind, die Winkel ω und ω' bestimmen; sind umgekehrt diese Winkel gegeben, so sind diese Gleichungen Bedingungs-Gleichungen zwischen y′ und x′, die wir nun auch als veränderliche Gröfsen betrachten können. Die auf diese Weise bezeichneten Oerter sind, wie die Form ihrer Gleichungen zeigt, zwei Kreise, die mit den gegebenen beiden concentrisch sind; von allen Puncten derselben erscheinen die bezüglichen gegebenen Kreise unter den gegebenen Winkeln. Jede Beziehung ferner zwischen den beiden Winkeln ω und ω', oder ihren trigonometrischen Functionen, führt uns wiederum zu einer Gleichung zwischen y′ und x′. Setzen wir jene Winkel, mithin auch ihre Sinus einander gleich, so geben uns, bei Hinweglassung der Accente, die letzten beiden Gleichungen (3) und (4) folgenden Ort:

$$\varrho^2((y-b)^2+(x-a)^2) = r^2((y-\beta)^2+(x-\alpha)^2), \qquad (5)$$

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

mithin die Gleichung eines neuen Kreises, den wir nun näher bestimmen wollen. Wir sehen sogleich, dafs wir dieselbe Gleichung (5) erhalten hätten, wenn wir die Gleichungen der beiden gegebenen Kreise, nachdem die erste derselben mit r^2, die zweite mit ϱ^2 multiplicirt worden, von einander abgezogen hätten. Es folgt hieraus, dafs der durch (5) dargestellte Kreis mit den beiden gegebenen Kreisen dieselbe Chordale hat.

Wir sehen ferner, dafs, wenn ϱ und r gleich sind, die Gleichung (5) in die Gleichung einer geraden Linie, der Chordalen der beiden gegebenen Kreise, übergeht.

Wenn wir entwickeln, so erhalten wir aus (5):

$$y^2-2\frac{\varrho^2 b-r^2\beta}{\varrho^2-r^2}y+x^2-2\frac{\varrho^2 a-r^2\alpha}{\varrho^2-r^2}x=\frac{r^2(\beta^2+\alpha^2)-\varrho^2(b^2+a^2)}{\varrho^2-r^2}, \qquad (6)$$

und wenn wir den ersten Theil dieser Gleichung zu zwei vollständigen Quadraten ergänzen, kommt:

$$\left(y-\frac{\varrho^2 b-r^2\beta}{\varrho^2-r^2}\right)^2+\left(x-\frac{\varrho^2 a-r^2\alpha}{\varrho^2-r^2}\right)^2=\left(\frac{r\varrho}{\varrho^2-r^2}\right)\left((\beta-b)^2+(\alpha-a)^2\right). \qquad (7)$$

Zugleich zeigt die Form dieser Gleichung, dafs der bezügliche Kreis immer reell bleibt.

Setzen wir, für einen Augenblick, zum Behuf der Construction dieses Kreises, β und b gleich Null, so verschwindet auch die Mittelpuncts-Ordinate dieses Kreises, d. h. der Mittelpunct desselben liegt auf der Centralen der beiden gegebenen Kreise. Setzen wir zugleich α gleich Null, so geht die Gleichung dieses Kreises, was unmittelbar aus (6) folgt, in folgende über:

$$y^2+x^2-2\frac{\varrho^2 a}{\varrho^2-r^2}x+\frac{\varrho^2 a^2}{\varrho^2-r^2}=0,$$

und wenn wir nun ferner in dieser Gleichung y gleich Null nehmen, so geben uns die Wurzeln der resultirenden Gleichung:

$$x^2-2\frac{\varrho^2 a}{\varrho^2-r^2}x+\frac{\varrho^2 a^2}{\varrho^2-r^2}=0,$$

die Durchschnitte des besagten Kreises mit der Central-Linie der beiden gegebenen Kreise, welche wir zur ersten Axe genommen haben. Wir erkennen sogleich, dafs

$$x=\frac{\varrho a}{\varrho-r}, \quad x=\frac{\varrho a}{\varrho+r},$$

die Wurzeln dieser Gleichung sind; denn die Summe dieser beiden Wurzeln gibt den Coefficienten der ersten Potenz von x, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, und ihr Product das constante Glied. Jene Werthe von x entsprechen aber den beiden Symmetral-Puncten der gegebenen Kreise: der zu bestimmende Kreis ist also über den Abstand dieser beiden Puncte als Durchmesser zu beschreiben.

Fig. 56. 187. Wenn die beiden gegebenen Kreise sich schneiden, so fällt ein Bogen des eben bestimmten Kreises innerhalb derselben; wenn einer der gegebenen Kreise von dem andern ganz umschlossen wird, so liegt der besagte Kreis ganz innerhalb. Im erstern Falle lassen sich nicht von allen, im letztern Falle von keinem, Puncte desselben Tangenten an die gegebenen Kreise ziehen; für jeden beliebigen Punct desselben, (y′, x′), besteht indefs die Gleichung:

$$\frac{\varrho^2}{(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2}=\frac{r^2}{(y'-b)^2+(x'-a)^2},$$

nur dafs die beiden Theile derselben eine andere geometrische Interpretation erhalten, wenn der Punct (y′, x′) innerhalb der beiden gegebenen Kreise liegt, als wenn er aufserhalb derselben sich befindet. Im Allgemeinen bedeutet diese Gleichung, dafs die

Quadrate der Radien der beiden gegebenen Kreise sich wie die Quadrate der Abstände jedes, beliebig auf dem Umfange des eben bestimmten dritten Kreises angenommenen Punctes (y′, x′) von den Mittelpuncten der gegebenen Kreise verhalten. Hieraus folgt denn, dafs die Flächen dieser letztern in demselben Verhältnisse getheilt (oder erweitert) werden, wenn man aus den beiden Mittelpuncten concentrische Kreise beschreibt, die durch denselben, beliebigen Punct auf dem Umfange desjenigen Kreises gehen, der über dem Abstande der Symmetral-Puncte der beiden gegebenen Kreise als Durchmesser beschrieben werden kann.

Wenn der Punct (y′, x′) innerhalb des ersten Kreises liegt, wie in der 56. Figur der Punct M in Beziehung auf den Kreis γ, und wir construiren den Pol dieses Punctes, der in μ fällt, so ist, wenn wir, um kurz zu seyn, gleich auf die Figur verweisen:

$$\frac{1}{\sin^2\omega} = \frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{\varrho^2}{(y'-\beta)^2+(\alpha'-\alpha)^2},$$

wo wir durch 2ω den Winkel bezeichnen, welche die beiden von μ, dem Pole des Punctes (y′, x′) an den ersten Kreis gezogenen Tangenten mit einander bilden. Da wir für den entsprechenden Ausdruck rücksichtlich des zweiten Kreises einen durchaus gleichgebildeten Ausdruck erhalten, so haben wir folgende Ergänzung des in dem Vorstehenden enthaltenen Satzes:

Wenn zwei gegebene Kreise sich schneiden oder ganz in einander liegen, so fällt derjenige Kreis, welcher über den Abstand der beiden Symmetral-Puncte als Durchmesser beschrieben wird, zum Theil oder ganz innerhalb der beiden gegebenen Kreise; wenn wir alsdann für irgend einen innerhalb liegenden Punct des Umfanges dieses Kreises auf den beiden gegebenen Kreisen die zugeordneten Pole suchen, so werden von diesen Polen aus die bezüglichen gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln gesehen.

188. Wenn wir ferner drei Kreise zusammenstellen, so können wir über die Abstände der Symmetral-Puncte je zweier dieser Kreise, als Durchmesser, neue Kreise beschreiben, deren Gleichungen wir nach den vorigen Nummern sogleich erhalten. Die Gleichung des dritten gegebenen Kreises sey:

$$(y-B)^2+(x-A)^2 = R^2;$$

bezeichnen wir alsdann durch $2\omega''$ denjenigen Winkel unter welchem dieser Kreis von einem beliebig angenommenem Puncte (y′, x′) aus gesehen wird, so haben wir, ähnlich wie in der 185. Nummer:

$$\sin^2\omega'' = \frac{R^2}{(y'-B)^2+(x'-A)^2}.$$

Stellen wir endlich für einen Augenblick die Ausdrücke für $\sin^2\omega$, $\sin^2\omega'$ und $\sin^2\omega''$ durch A, A′ und A″ dar, so sind, indem wir y′ und x′ als veränderliche Gröfsen betrachten,

$$\begin{aligned} A - A' &= 0, \\ A - A'' &= 0, \qquad (8) \\ A' - A'' &= 0, \end{aligned}$$

die Gleichungen jener drei in Rede stehenden Kreise. Zwei dieser Gleichungen bedingen die dritte, d. h. die drei bezüglichen Kreise haben ein und dieselbe Chordale; sie schneiden sich also, wenn überhaupt Durchschnitte Statt finden, in denselben beiden Puncten. Die Abstände jedes dieser Puncte von den Mittelpuncten der drei gegebenen Kreise verhalten sich wie die Radien derselben. Liegen diese Puncte aufserhalb, so werden von denselben aus die drei gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln gesehen.

Da ferner jeder dieser Kreise mit den beiden gegebenen, zu denen er gehört, dieselbe Chordale hat, so geht auch die gemeinschaftliche Chordale der Constructions-Kreise durch den Chordal-Punct der drei gegebenen.

Wenn man aber über den Abständen der innern und äufsern Symmetral-Puncte je zweier von drei gegebenen Kreisen als Durchmesser drei neue Kreise beschreibt, so haben diese ein und dieselbe Chordale, und diese geht durch den Chordal-Punct der gegebenen Kreise. *)

Da die Mittelpuncte solcher Kreise, welche dieselbe Chordale haben, in gerader Linie liegen, so ergibt sich noch folgender Satz:

Die drei Mitten zwischen den Abständen der beiden Symmetral-Puncte je zweier von drei gegebenen Kreise liegen in gerader Linie.

189. Wir wollen die Gleichung der den drei Constructions-Kreisen gemeinschaftlichen Chorde suchen; wir brauchen zu diesem Ende nur irgend zwei der drei Gleichungen (8) zu entwickeln und dann von einander abzuziehen. Für die erste dieser Gleichungen haben wir in dem Obigen folgende gefunden:

$$y^2 - 2\frac{\varrho^2 b - r^2\beta}{\varrho^2 - r^2} y + x^2 - 2\frac{\varrho^2 a - r^2\alpha}{\varrho^2 - r^2} x = \frac{r^2(\beta^2+\alpha^2) - \varrho^2(b^2+a^2)}{\varrho^2 - r^2},$$

und erhalten hieraus für die zweite derselben, durch Buchstaben-Vertauschung auf der Stelle folgende Gleichung:

$$y^2 - 2\frac{\varrho^2 B - R^2\beta}{\varrho^2 - R^2} y + x^2 - 2\frac{\varrho^2 A - R^2\alpha}{\varrho^2 - R^2} x = \frac{R^2(\beta^2+\alpha^2) - \varrho^2(B^2+A^2)}{\varrho^2 - R^2}.$$

Nehmen wir ferner an, dafs der Anfangs-Punct der Coordinaten in dem Chordal-Puncte der drei gegebenen Kreise liege, so ist:

$$\beta^2+\alpha^2-\varrho^2 = b^2+a^2-r^2 = B^2+A^2-R^2,$$

mithin ist:

$$b^2+a^2 = \beta^2+\alpha^2-(\varrho^2-r^2),$$
$$B^2+A^2 = \beta^2+\alpha^2-(\varrho^2-R^2),$$

und wenn wir für (b^2+a^2) und (B^2+A^2) ihre Werthe in die zweiten Theile der letzten beiden Kreis-Gleichungen substituiren, so finden wir nach einer leichten Reduction, dafs beide Theile gleich sind $(\beta^2+\alpha^2-\varrho^2)$. Die Chordale der bezüglichen Kreise geht also, dem Frühern gemäfs, durch den Anfangs-Punct der Coordinaten. Ziehen wir nun jene beiden Kreis-Gleichungen wirklich von einander ab, so kommt:

$$\left(\frac{\varrho^2 b - r^2\beta}{\varrho^2 - r^2} - \frac{\varrho^2 B - R^2\beta}{\varrho^2 - R^2}\right) y + \left(\frac{\varrho^2 a - r^2\alpha}{\varrho^2 - r^2} - \frac{\varrho^2 A - R^2\alpha}{\varrho^2 - r^2}\right) x = 0,$$

und wenn wir entwickeln:

$$y = -\frac{\varrho^2(a-A) + r^2(A-\alpha) + R^2(\alpha-a)}{\varrho^2(b-B) + r^2(B-\beta) + R^2(\beta-b)} x. \qquad (9)$$

Diefs ist die Gleichung der in Rede stehenden geraden Linie, wenn wir den Anfangs-Punct der Coordinaten im Chordal-Puncte der drei gegebenen Kreise annehmen.

190. Zu derselben Gleichung hätten wir auf eine directere Weise gelangen können. Vergleichen wir nemlich die eben gefundene Gleichung (9) mit der in der 153. Nummer hergeleiteten Gleichung (5) der geraden Linie, welche die Mittelpuncte derjenigen beiden Kreise enthält, von welchen die drei gegebenen gleichnamig berührt werden, so ist offenbar, dafs die letztgenannte Gleichung (5) in die eben entwickelte Gleichung (9) übergeht,

*) Gerg. Ann. XI. p. 364.

wenn wir zunächst, der letzten Annahme der Coordinaten gemäfs, y' und x' gleich Null setzen, und dann, statt der Radien ϱ, r und R, die Quadrate derselben nehmen, und diesem entspricht dieselbe Veränderung schon in dem Coefficienten von φ in der 4. Gleichung der angezogenen 153. Nummer zu machen. Zu Gleichungen von so bestimmter Form wären wir aber gekommen, wenn wir die Radien der drei gegebenen Kreise, nicht, wie in der angezogenen Nummer geschehen ist, alle drei um irgend ein gleiches Stück, sondern um denselben aliquoten Theil vergröfsert hätten. Wenn wir nemlich die Radien der drei gegebenen Kreise um den μ. Theil gröfser nehmen, und der Kürze halber $\frac{2\mu+\mu^2}{\mu 2}$ gleich φ setzen, so haben wir folgende drei neue Kreis-Gleichungen:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = (1+\varphi)\varrho^2,$$
$$(y-b)^2+(x-a)^2 = (1+\varphi)r^2,$$
$$(y-B)^2+(x-A)^2 = (1+\varphi)R^2,$$

und mithin zur Bestimmung des Chordal-Punctes dieser Kreise, wenn wir, wie in der vorigen Nummer, den Anfangs-Punct der Coordinaten in den Chordal-Punct der gegebenen Kreise legen, folgende beide Gleichungen:

$$2(b-\beta)y+2(a-\alpha)x = (\varrho^2-r^2)\varphi,$$
$$2(B-\beta)y+2(A-\alpha)x = (\varrho^2-R^2)\varphi.$$

Durch Elimination von φ erhalten wir die Gleichung (9), die also den geometrischen Ort der Chordal-Puncte aller Systeme dreier Kreise darstellt, die wir dadurch bestimmen, dafs wir die Radien der drei gegebenen Kreise in demselben Verhältnisse vergröfsern, oder auch, indem wir oben μ negativ nehmen, verkürzen. Auf dieser Linie liegen, wovon man sich auch leicht durch Construction überzeugt, die beiden Puncte, von denen aus die gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln erscheinen, wenn es überhaupt solche Puncte gibt.

191. Wir wollen hier nicht bei der Gleichung derjenigen Linie verweilen, welche die Mitten zwischen den Symmetral-Puncten je zweier der drei gegebenen Kreise enthält. Ohne die Rechnung indefs auszuführen, erkennen wir sogleich aus der Anlage derselben, indem wir dieselbe mit der Herleitung der Gleichung für die äufsere Symmetrale (166) vergleichen, dafs wir, um die besagte Gleichung aus der letztgenannten zu erhalten, wiederum blofs die Radien mit den Quadraten derselben zu vertauschen brauchen.

192. Eh wir weiter gehen, machen wir noch darauf aufmerksam, dafs die Centrale zweier gegebener Kreise durch die beiden Mittelpuncte und Symmetral-Puncte derselben harmonisch getheilt wird. Hiervon überzeugen wir uns sogleich, wenn wir diese Linie zur ersten Axe nehmen, und den Anfangs-Punct der Coordinaten nach einander in die Mittelpuncte des ersten und zweiten Kreises (γ, C) legen. Alsdann erhalten wir nemlich: Fig. 57.

$$\frac{\varrho a}{r-\varrho}, \quad \frac{\varrho a}{\varrho+r}, \quad -\frac{ra}{r-\varrho}, \quad -\frac{ra}{r+\varrho},$$

für die Abstände des äufsern und innern Symmetral-Punctes von den Mittelpuncten des ersten und zweiten Kreises, wenn wir den Abstand dieser Mittelpuncte von einander durch a bezeichnen. Nach der bezüglichen Figur sind diefs die Ausdrücke für γS, $\gamma\sigma$, CS und $C\sigma$ und es verhält sich

$$\gamma S : CS = \gamma\sigma : \sigma C = \varrho : r,$$

wobei wir nur das Zeichen des Ausdruckes für $C\sigma$ ändern müssen.

Hieraus folgt unter Andern folgender Satz: *Wenn wir über den Abstand der Symmetral-Puncte zweier gegebener Kreise, als Durchmesser, einen neuen Kreis beschreiben, und durch irgend einen Punct auf dem Umfange desselben, etwa durch M, und durch die Mittelpuncte der beiden gegebenen Kreise, γ und C, zwei gerade Linien ziehen, so werden die Winkel, welche dieselben mit einander bilden, von denjenigen geraden Linien, welche von M nach den beiden Symmetral-Puncten σ und S gezogen werden können, halbirt.*

$(\gamma M\sigma = \sigma MC,\ CMS = SMN)$. *)

Da, im Falle die gegebenen Kreise sich schneiden, der letztbezeichnete Kreis durch die Durchschnitte derselben geht, so können wir jeden dieser Durchschnitte für den Punct nehmen, den wir vorhin M genannt haben. Ziehen wir also von einem dieser Durchschnitte gerade Linien nach den beiden Symmetral-Puncten, so bilden dieselben unter sich einen rechten Winkel und halbiren überdiefs diejenigen Winkel, welche in jenem Durchschnitte von den, durch die Mittelpuncte der gegebenen Kreise gezogenen, geraden Linien gebildet werden.

193. Um die nachfolgenden Entwicklungen nicht zu unterbrechen, schalten wir gleich hier schon die Construction des Problems der Tactionen, die H. Gergonne in der Memoiren von Turin und später in seinen Annalen, zugleich mit einer neuen Modification, entwickelt hat.**) Das Characteristische dieser Construction besteht darin, dafs Gergone nicht geradezu den Mittelpunct des Berührungs-Kreises, sondern die Puncte, in welchen derselbe die drei gegebenen Kreise berührt, analytisch bestimmt. Auf diese Weise wird die zusammengesetztere Construction gewissermaafsen in drei einfachere Constructionen zerlegt. Die Construction des Berührungs-Punctes auf jedem der drei gegebenen Kreise ist ganz dieselbe, so dafs es genügt, einen dieser Puncte analytisch zu construiren. Wir legen den Anfangs-Punct der Coordinaten in den Mittelpunct desjenigen Kreises, auf dem wir den Berührungs-Punct bestimmen wollen, nehmen aber die Richtung der Axen

*) Wenn nemlich die Winkel, welche zwei gerade Linien mit einander bilden, von zweien andern geraden Linien halbirt werden, so wird, wie wir früher im ersten Abschnitte bemerkt haben, jede gerade Linie, welche jenen vier geraden Linien begegnet, von denselben harmonisch geschnitten. Die Linien des letztbezeichneten Paares stehen auf einander senkrecht. Wenn, umgekehrt, zwei gerade Linien MS und Mσ (wir beziehen uns hier auf die Figur des Textes) gegeben sind, die auf einander senkrecht sind und einer beliebigen gegebenen geraden Linie in S und σ, einem äufsern und innern harmonischen Theilungs-Puncte begegnen, so bilden diejenigen geraden Linien, die von M nach den beiden andern Theilungs-Puncten gezogen werden, gleiche Winkel mit jeder der erstgezogenen.

Da ferner der Ort des Durchschnittes zweier gerader Linien, die durch zwei feste Puncte, S, und σ, gehen, und sich rechtwinklig schneiden, ein Kreis ist, der über den Abstand dieser festen Puncte als Durchmesser beschrieben werden kann, so erhalten wir denselben geometrischen Ort, für alle Puncte M, welche die Bedingung erfüllen, dafs, wenn wir von denselben nach dreien festen Puncten γ, σ und C gerade Linien ziehen, die zweite derselben mit den beiden übrigen gleiche Winkel bildet. Der vierte harmonische Theilungs-Punct S findet sich leicht durch Construction.

**) Gerg. Ann. T. VII.

beliebig: auf diese Weise kürzen wir die Entwicklungen ab, ohne dadurch der Symmetrie derselben Abbruch zu thun. Demnach seyen:

$$\begin{aligned} y^2+x^2 &= \varrho^2, \\ (y-b)^2+(x-a)^2 &= r^2, \\ (y-B)^2+(x-A)^2 &= R^2, \end{aligned} \qquad (1)$$

die Gleichungen der drei gegebenen Kreise; wir wollen den Punct suchen, in welchem der erste Kreis berührt wird, und zwar von einem solchen Berührungs-Kreise, der keinen der gegebenen umschliefst. Bei diesen Voraussetzungen haben wir, indem wir die Mittelpuncts-Coordinaten des letztgenannten Kreises y' und x', den Radius desselben φ nennen, folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} y'^2+x'^2 &= (\varrho+\varphi)^2, \\ (y'-b)^2+(x'-a)^2 &= (r+\varphi)^2, \\ (y'-B)^2+(x'-A) &= (R+\varphi)^2, \end{aligned} \qquad (2)$$

und diese Gleichungen sind zur Bestimmung der unbekannten Gröfsen: y', x' und φ hinreichend. Ziehen wir nach einander die zweite und dritte Gleichung von der ersten ab, so kommt:

$$\begin{aligned} 2by'+2ax' &= a^2+b^2+\varrho^2-r^2+2(\varrho-r)\varphi, \\ 2By'+2Ax' &= A^2+B^2+\varrho^2-R^2+2(\varrho-R)\varphi, \end{aligned}$$

Gleichungen, die wir zum Behuf späterer Substitutionen folgendermaafsen schreiben können:

$$\begin{aligned} 2by'+2ax'-2(\varrho-r)(\varphi+\varrho) &= a^2+b^2-(\varrho-r)^2, \\ 2By'+2Ax'-2(\varrho-R)(\varphi+\varrho) &= A^2+B^2-(\varrho-R)^2, \end{aligned} \qquad (3)$$

Diese beiden Gleichungen, verbunden mit der ersten der Gleichungen (2), sind die möglichst einfachen zur Elimination von y', x' und φ. Statt hier indessen geradezu zu eliminiren, führen wir an die Stelle der Mittelpuncts-Coordinaten die Coordinaten des oben bezeichneten Berührungs-Punctes ein und nennen dieselben y und x. Nun haben wir aber offenbar:

$$y' = \frac{y(\varrho+\varphi)}{\varrho}, \quad x' = \frac{x(\varrho+\varphi)}{\varrho};$$

und wenn wir diese Werthe für y' und x' in die letzten Gleichungen (3) substituiren, kommt:

$$\begin{aligned} 2(by+ax-\varrho(\varrho-r))(\varrho+\varphi) &= \varrho(a^2+b^2-(\varrho-r)^2), \\ 2(By+Ax-\varrho(\varrho-R))(\varrho+\varphi) &= \varrho(A^2+B^2-(\varrho-R)^2), \end{aligned}$$

und endlich durch Elimination von $(\varrho+\varphi)$:

$$\frac{by+ax-\varrho(\varrho-r)}{a^2+b^2-(\varrho-r)^2} = \frac{By+Ax-\varrho(\varrho-R)}{A^2+B^2-(\varrho-R)^2}. \qquad (4)$$

Diese Gleichung ist in Beziehung auf y und x vom ersten Grade, und stellt mithin, wenn wir diese Coordinaten als veränderliche Gröfsen betrachten, eine gerade Linie dar, die auf dem ersten Kreise:

$$y^2+x^2 = \varrho^2,$$

den gesuchten Berührungs-Punct bestimmt. Solcher Puncte erhalten wir zwei, die offenbar den beiden Kreisen entsprechen, die sich auch in dem Frühern schon zusammengeordnet haben, zweien Kreisen nemlich, die, je nach der verschiedenen Lage der drei gegebenen Kreise zu einander, entweder beide dieselben innerhalb, oder beide dieselben aufserhalb berühren, oder auch von denen der eine die drei gegebenen Kreise innerhalb, der andere dieselben aufserhalb berührt. Dafs die Gleichung (4) sich auf die doppelte Art von Berührung bezieht, erhellet daraus, dafs diese Gleichung dieselbe bleibt, wenn wir die Zeichen aller Radien ändern.

Es kommt nun blofs noch darauf an, die Gleichung (4) zu construiren und bei dieser Gelegenheit wandte H. Gergonne die sinnreiche, bereits schon (41) erwähnte Constructions-Art einer linearen Gleichung an. Er setzt nemlich zuerst jeden Theil derselben für sich gleich Null, so kommt:

$$by+ax = \varrho(\varrho-r), \quad (5)$$
$$By+Ax = \varrho(\varrho-R). \quad (6)$$

Diese beiden Gleichungen, mit einander verbunden, bezeichnen einen bestimmten Punct der zu construirenden geraden Linie. Diesen Punct können wir mithin construiren durch den Durchschnitt der durch (5) und (6) (indem wir y und x als veränderliche Gröfsen betrachten), dargestellten geraden Linien, in welchen wir sogleich die Polaren der äufsern Symmetral-Puncte des ersten und zweiten und des ersten und dritten der gegebenen Kreise auf dem ersten derselben wieder erkennen (175).

Ferner setzt H. Gergonne jeden Theil der zu construirenden Gleichung gleich Eins, und erhält auf diese Weise:

$$b(y-b)+a(x-a) = r(\varrho-r), \quad (7)$$
$$B(y-B)+A(x-A) = R(\varrho-R), \quad (8)$$

Gleichungen, durch welche die Polaren der äufsern Symmetral-Puncte des ersten und zweiten und des ersten und dritten Kreises auf dem zweiten und dritten Kreise bezeichnet werden (175). Der Durchschnitt dieser beiden Linien, die den vorigen beiden Polaren (5) und (6) bezüglich parallel sind, gibt einen zweiten Punct der gesuchten geraden Linie, die nun also völlig bestimmt ist.

Hiernach gibt denn H. Gergonne folgende Construction des Problems der Tactionen für drei gegebene Kreise:

Fig. 58. Man ziehe die gemeinschaftlichen äufsern Tangenten an je zwei der drei gegebenen Kreise und dann die Berührungs-Chorden, die drei Paar Parallel-Linien bilden. Die beiden Chorden des ersten Kreises γ schneiden sich in M, und die ihnen parallele Chorden auf den beiden andern Kreisen c und C in N. Ebenso schneiden sich die beiden Chorden des zweiten Kreises c in M' und die ihnen parallele Chorden der Kreise γ und C in N' und endlich schneiden sich die beiden Chorden des dritten Kreises C in M'' und die ihnen parallele Chorden der ersten beiden Kreise γ und c in N''.

„Man ziehe ferner MN, M'N' und M''N''. MN schneidet den Kreis γ in T und ϑ; M'N' schneidet den Kreis c in T' und ϑ'; M''N'' schneidet den Kreis C in T'' und ϑ''. Legt man nun einen Kreis durch T, T' und T'', einen andern durch ϑ, ϑ' und ϑ'', so sind diefs die gesuchten Kreise, welche die drei gegebenen entweder alle drei aufserhalb oder alle drei innerhalb berühren. Hiernach ergeben sich die Mittelpuncte dieser Kreise auf die leichteste Weise; denn ziehen wir durch die Mittelpuncte der drei gegebenen Kreise und einmal durch die Puncte T, T' und T'', das andere Mal durch die Puncte ϑ, ϑ' und ϑ'' gerade Linien, so laufen die ersten drei in dem Mittelpuncte des einen, die andern drei in dem Mittelpuncte des andern Kreises zusammen."

Nach dem Bisherigen überzeugt man sich leicht, dafs man auf ganz ähnliche Weise die sechs übrigen Berührungs-Kreise erhält, indem man in der angezeigten Construction statt der gemeinschaftlichen äufsern Tangenten die innere nimmt. Wir formen nemlich die Gleichung (4) für diese Fälle um, indem wir nach einander die Zeichen der Radien der drei Kreise ändern.

Zugleich ist offenbar, dafs die Möglichkeit der Auflösungen im Allgemeinen nicht von der Möglichkeit der gemeinschaftlichen Tangenten, deren Construction wir nicht unum-

gänglich nöthig haben, abhängt, sondern einzig davon, ob die, immer construirbaren, Gleichungen von der Form der Gleichung (4) gerade Linien bedeuten, die dem bezüglichen Kreise begegnen, oder nicht.

194. Wir erhalten mit H. Gergonne eine Modification der angezeigten Construction, indem wir jeden Theil der Gleichung (4) gleich $\frac{1}{2}$ setzen; auf diese Weise kommt:

$$\begin{aligned} 2by+2ax &= \varrho^2-r^2+a^2+b^2, \\ 2By+2Ax &= \varrho^2-R^2+A^2+B^2. \end{aligned} \qquad (9)$$

In diesen Gleichungen erkennen wir die Gleichungen der Chordalen des ersten und jedes der beiden andern Kreise wieder; der Durchschnitt dieser Linien bestimmt also einen Punct der zu construirenden Linie, die mithin durch den Chordal-Punct der drei gegebenen Kreise geht. Durch diesen Punct geht also, wenn wir uns wieder auf die vorige Figur beziehen, jede der drei geraden Linien MN, M′N′ und M″N″, wir können also auch statt die drei Puncte N, N′ und N″ zu construiren, den Chordal-Punct P der drei gegebenen Kreise suchen. Diefs ist, wie wir uns leicht überzeugen, als eine Folge davon anzusehen, dafs die Chordale zweier gegebenen Kreise gleichweit von den Polaren eines beliebigen ihrer beiden Symmetral-Puncte absteht. Durch den Chordal-Punct P gehen auch die entsprechenden geraden Linien für die drei übrigen Paare von Berührungs-Kreisen; diefs folgt unmittelbar daraus, dafs die Gleichungen (9) keine Aenderung erleiden, indem man die Zeichen der Radien der drei gegebenen Kreise beliebig ändert.

Wir betrachten die, in den letzten beiden Nummern auseinandergesetzte, analytische Construction als ein Muster der Behandlungs-Art und verweisen deshalb, da wir überdiefs ganz frei verfahren sind, auf den Original-Aufsatz selbst. Zu derselben Construction werden wir in dem Folgenden noch auf andere Weise gelangen, indem wir die isolirt dastehende Aufgabe in ihre natürliche Verbindung bringen und auf diesem Wege kommen wir auch noch, ungemein leicht, zur Auflösung zusammengesetzterer und allgemeinerer Aufgaben. Hiermit wollen wir diesen zweiten Abschnitt, den wir hier nicht weiter ausdehnen dürfen, beschliefsen.

195. Seyen C und C′ zwei gegebene Kreise, die von einem dritten Kreise γ berührt werden. Wir legen die erste Axe durch die Mittelpuncte der beiden ersten Kreise, die Form ihrer Gleichungen ist demnach folgende:

$$\begin{aligned} y^2+(x-A)^2 &= R^2, \\ y^2+(x-A')^2 &= R'^2; \end{aligned}$$

wir nehmen ferner die Chordale derselben als zweite Axe; alsdann haben wir zwischen den Constanten der letzten beiden Gleichungen folgende Bedingungs-Gleichung:

$$R^2-A^2 = R'^2-A'^2.$$

Die Gleichung des Berührungs-Kreises γ sey:

$$(y-\beta)^2+(y-\alpha)^2 = \varrho^2,$$

wenn alsdann dieser Kreis γ den Kreis C aufserhalb, den Kreis C′ innerhalb berührt, wie in dem Falle der 59. Figur, so kommt: Fig. 59.

$$\begin{aligned} \beta^2+(\alpha-A)^2 &= (R+\varrho)^2, \\ \beta^2+(\alpha-A')^2 &= (R'-\varrho)^2, \end{aligned}$$

und wenn wir abziehen, und die obige Bedingungs-Gleichung berücksichtigen:

$$(A'-A)\alpha = (R'+R)\varrho.$$

Würde umgekehrt, der Kreis C innerhalb und der Kreis C′ aufserhalb berührt, so wären wir zu folgendem Ausdruck gekommen:

$$(A'-A)\alpha = -(R'+R)\varrho.$$

Würden endlich die beiden Kreise C und C′ vom dritten Kreise beide aufserhalb oder beide innerhalb berührt, so ergibt sich:

$$(A'-A)\alpha = \mp (R'-R)\varrho.$$

Für jeden dieser einzelnen Fälle ist also $\frac{\alpha}{\varrho}$ constant. Der auf diese Art bewiesene Satz ist folgender:

Wenn beliebig viele Kreise zwei gegebene und feste Kreise auf dieselbe Weise berühren, so ist für alle das Verhältnifs des Radius zum Abstande des Mittelpunctes von der Chordalen der beiden gegebenen Kreise ein constantes.

Wenn wir eine der gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise C und C′ als die Gränze betrachten, der sich die Berührungs-Kreise immer mehr nähern, je gröfser die Radien derselben genommen werden, so haben wir für diese Gränze:

$$\frac{\alpha}{\varrho} = \sin\omega,$$

wenn wir durch ω denjenigen Winkel bezeichnen, den die gemeinschaftlichen Tangenten mit der Central-Linie der beiden gegebenen Kreise bilden. Jenes constante Verhältnifs $\frac{\alpha}{\varrho}$ ist also gleich dem Sinus des Winkels, welchen die, der jedesmaligen Berührungs-Art entsprechenden, gemeinschaftlichen Tangenten mit der Central-Linie bilden.

196. Wir wollen nun zwei Berührungs-Kreise betrachten und für die Gleichungen derselben folgende nehmen:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = \varrho^2,$$
$$(y-\beta')^2+(x-\alpha')^2 = \varrho'^2,$$

alsdann erhalten wir für den äufsern Symmetral-Punct (166):

$$x = \frac{\varrho'\alpha-\varrho\alpha'}{\varrho'-\varrho}.$$

Wenn wir nun für die beiden Berührungs-Kreise die Kreise γ und γ' nehmen, welche jeden der beiden gegebenen C und C′ auf dieselbe Weise (für den Fall der 59. Figur den ersten Kreis C aufserhalb, den zweiten C′ innerhalb) berühren, so ist:

$$\frac{\alpha}{\varrho} = \frac{\alpha'}{\varrho'},$$

und diese Bedingung reducirt obigen Werth von x auf Null. Es liegt also der äufsere Symmetral-Punct S der Kreise γ und γ' auf der zweiten Axe, mithin auf der Chordalen der beiden Kreise C und C′.

Für die Abscisse des innern Symmetral-Punctes der obigen beiden Kreise erhalten wir:

$$x = \frac{\varrho'\alpha+\varrho\alpha'}{\varrho'+\varrho},$$

und dieser Ausdruck wird Null wenn:

$$\frac{\alpha}{\varrho} = -\frac{\alpha'}{\varrho'},$$

eine Beziehung, die nach der 195. Nummer dann eintritt, wenn wir zwei Kreise γ und $\varkappa$ nehmen, die den einen wie den andern der Kreise C und C′ auf verschiedene Weise berühren. In dem Falle der Figur berührt γ den Kreis C aufserhalb und den Kreis C′ innerhalb, während $\varkappa$ den Kreis C innerhalb und den Kreis C′ aufserhalb berührt. Ein an-

derer hierher gehöriger Fall ist, dafs γ z. B. die beiden Kreise C und C' aufserhalb berührt, während $\varkappa$ dieselben innerhalb berührt. In beiden Fällen liegt der innere Symmetral-Punct σ für γ und $\varkappa$ auf der Chordalen der beiden Kreise C und C'.

Wenn zwei gegebene Kreise von irgend zweien andern beiden gleichartig oder beide ungleichartig berührt werden, so liegt im ersten Falle der äufsere, im letztern Falle der innere Symmetral-Punct der beiden letztgenannten Kreise auf der Chordalen der beiden gegebenen.

197. Wir bemerken hier noch, dafs zwischen den Kreisen γ, γ' und C, C' eine gegenseitige Beziehung Statt findet, denn während C und C' ungleichartig berührt werden, werden γ und γ' gleichartig berührt; der äufsere Symmetral-Punct S von γ und γ' liegt auf der Chordalen von C und C', während der innere Symmetral-Punct P von C und C' auf der Chordalen von γ und γ' liegt.

198. Wenn wir endlich beliebig viele Kreise γ, γ', γ'' u. s. w. construiren, von denen jeder die beiden gegebenen Kreise C und C' auf dieselbe Weise berührt, so geht die Chordale jedes Paares derselben durch einen der beiden Symmetral-Puncte der zwei gegebenen Kreise, durch den äufsern Symmetral-Punct, wenn die Berührungen für C und C' gleichnamig, durch den innern Symmetral-Punct, wenn dieselben ungleichnamig sind. Dieser Punct ist mithin der Chordal-Punct je dreier Berührungs-Kreise, die also auch alle von demselben Kreise unter rechten Winkeln geschnitten werden.

Wenn die beiden Kreise C und C' sich schneiden, wie in der 59. Figur, so sondern sich die eben betrachteten Berührungs-Kreise in zwei Reihen von Kreisen ab, von welchen die eine Reihe γ, γ', γ'' u. s. w. den Kreis C aufserhalb, und den Kreis C' innerhalb berührt, während die andere Reihe, in welche $\varkappa$ gehört, jeden jener Kreise auf die entgegengesetzte Art berührt. Die Uebergänge von der einen Reihe zur andern geschehen, indem die Berührungs-Kreise sich auf Puncte, auf die Durchschnitts-Puncte nemlich von C und C', reduciren. Dasselbe findet Statt, wenn wir von denjenigen Kreisen, die zwei sich schneidende Kreise C und C' aufserhalb berühren, zu denjenigen übergehen, welche beide innerhalb berühren. Die aufserhalb berührenden Kreise sondern sich wiederum in solche ab, welche die beiden gegebenen umschliefsen und nicht umschliefsen, mithin selbst, im ersten Falle innerhalb, im zweiten Falle aufserhalb von C und C' berührt werden. Die gemeinschaftlichen äufsern Tangenten der gegebenen Kreise C und C' bezeichnen hier die Uebergänge.

199. Aus den Bemerkungen der letzten Nummer erhellt, dafs, wenn die beiden gegebenen Kreise, C und C', sich schneiden, derjenige Kreis, welcher alle, die beiden gegebenen Kreise gleichnamig oder ungleichnamig berührende, Kreise rechtwinklig schneidet, durch die Durchschnitte der beiden gegebenen Kreise C und C' geht. In allen Fällen hat der eben bezeichnete Orthogonal-Kreis mit C und C' dieselbe Chordale. Denn da der gemeinschaftliche Chordal-Punct der Berührungs-Kreise, P, der (innere) Symmetral-Punct der Kreise C und C' ist, so sind jede zwei Durchschnitte, wie Q und Q', einer geraden Linie, die durch P geht, mit den letztgenannten Kreisen, zwei Puncte, in welchen diese von irgend einem Berührungs-Kreise, von γ, berührt werden (171). Je zwei auf diese Weise bestimmte Durchschnitte, Q und Q', sind also in Beziehung auf den Orthogonal-Kreis zugeordnete Pole (133), und die beiden gegebenen Kreise, C und C' zugeord-

nete Kreise. Jener Orthogonal-Kreis hat also mit den beiden gegebenen Kreisen C und C′ dieselbe Chordale (181).

Fig. 59. 60. 200. Wenn wir also drei jener Kreise γ, γ' und γ'' als ursprünglich gegeben betrachten, so können wir ihren Chordal-Punct construiren, und erhalten auf diese Weise einen der Symmetral-Puncte für jedes der vier möglichen Paare von Kreisen, welche die gegebenen berühren, so daſs also für vier Paare ein und derselbe Punct einer der beiden Symmetral-Puncte ist. Ob wir für ein bestimmtes Paar der Berührungs-Kreise den äuſsern oder innern Symmetral-Punct erhalten, hängt davon ab, ob diese beiden Kreise ihrerseits gleichartig oder ungleichartig berührt werden, und dieſs bestimmt sich dann wiederum nach der gegenseitigen Lage und Gröſse der gegebenen Kreise. Die gleichartige Berührung entspricht dem äuſsern, die ungleichartige dem innern Symmetral-Puncte. Wir können hier in keine ausführliche Erörterungen eingehen; die Nebeneinander-Stellung der 59. und 60. Figur läſst indeſs keine Dunkelheit über das eben Gesagte mehr übrig. In der ersten Construction gibt es, wenn die Kreise γ, γ' und γ'' gegeben sind, einen Kreis C, der von jedem derselben ausserhalb, einen andern C′, der von jedem der gegebenen innerhalb berührt wird; der Chordal-Punct P ist also der innere Symmetral-Punct der beiden zu construirenden Berührungs-Kreise. In der Construction der 60. Figur gibt es für die drei gegebenen Kreise γ, γ' und γ'' zwei Kreise C und C′, von denen jeder von jedem der gegebenen auſserhalb berührt wir, mithin ist der Chordal-Punct in diesem Falle der äuſsere Symmetral-Punct jener Berührungs-Kreise C und C′.

Fig. 59. 201. Wir wollen wiederum beliebig viele Kreise betrachten, von denen jeder zwei gegebene Kreise gleichartig oder ungleichartig berührt. Um die Ideen zu fixiren, nehmen wir den letzten Fall, auf den sich die 59. Figur bezieht, und betrachten also die Kreise γ, γ', γ'' . . . $\varkappa$. u. s. w. Alsdann liegt einer der Symmetral-Puncte je zweier dieser Kreise auf der Chordalen von C und C′, und zwar der äuſsere, wenn wir zwei Kreise zusammenstellen, die wie γ und γ', jeden der gegebenen Kreise C und C′ auf gleichartige Weise berühren, während wir den innern Symmetral-Punct erhalten, wenn die beiden Berührungs-Kreise, wie γ und $\varkappa$, jeden der gegebenen Kreise ungleichartig berühren. Hieraus folgt denn unmittelbar, daſs für je drei obiger Berührungs-Kreise drei Symmetral-Puncte auf der Chordalen der beiden gegebenen Kreise C und C′ liegen, und diese Symmetral-Puncte sind drei äuſsere, wenn wir drei Kreise nehmen, die wie γ, γ' und γ'' den Kreis C sowol als den Kreis C′ gleichartig berühren, hingegen zwei innere und ein äuſserer, wenn wir drei Kreise wie γ, γ' und $\varkappa$, zusammenstellen, von denen zwei jeden der beiden gegebenen Kreise C und C′ auf dieselbe, der dritte aber jeden derselben auf entgegengesetzte Weise, als die beiden ersten, berührt.

Auf diese Art haben wir also auf eine neue, sehr directe, Weise den Satz bewiesen, daſs für drei gegebene Kreise viermal drei Symmetral-Puncte in gerader Linie liegen, weil wir nemlich ursprünglich von dreien beliebigen Kreisen γ, γ' und γ'' (oder $\varkappa$) ausgehen können. Nur ist ersichtlich, daſs dieser Beweis des Satzes, da vorausgesetzt werden muſs, daſs die jeder Symmetralen entsprechende Berührungs-Art wirklich Statt haben könne, nicht wie die früher gegebenen ohne alle Beschränkung gilt, und darin kommt er mit dem, von Monge in seiner descriptiven Geometrie gegebenen, überein.

Den in den letzten Entwicklungen enthaltenen Satz können wir in folgende Aussage einkleiden:

Wenn irgend drei Kreise gegeben sind, so sind die vier Symmetralen derselben die Chordalen der vier Paare möglicher Berührungs-Kreise.

202. In dem Bisherigen liegen die Elemente mehrerer Constructionen des Problems der Tactionen. Wir wollen deren drei hier aufstellen. Als erste Construction, die auf der Stelle einleuchtet, erhalten wir folgende:

„Man construire die vier Symmetralen, construire ferner denjenigen Kreis, der die „gegebenen alle drei rechtwinklig schneidet, und der, wie bekannt, aus dem Chordal-„Puncte mit einem Radius, der den, von diesem Puncte an die gegebenen Kreise gezoge-„nen, unter sich gleichen, Tangenten gleich ist, beschrieben wird. Dieser Kreis schnei-„det im Allgemeinen jede der Symmetralen in zwei Puncten. Construirt man nun die bei-„den Kreise, die durch jedes Paar dieser Durchschnitts-Puncte gehen, und zugleich einen „beliebigen der drei gegebenen berühren, so erhält man die acht möglichen Kreise, die „den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten."

„Wenn obiger Orthogonal-Kreis eine oder mehrere Symmetralen nicht schneidet, so „werden die bezüglichen Berührungs-Kreise deshalb nicht unmöglich. Die Construction „reducirt sich in diesem Falle auf die bekannte, einen Kreis zu beschreiben, der mit einem „gegebenen (dem Orthogonal-Kreise) eine gegebene gerade Linie (eine der Symmetra-„len) zur Chordalen hat und überdiefs einen zweiten gegebenen Kreis berührt (119)."

Die Möglichkeit der verschiedenen Auflösungen der Aufgabe hängt von der Möglichkeit der einzelnen, eben bezeichneten, Constructionen ab, auf welche dieselbe zurückgeführt worden ist.

203. Wenn zwei gegebene Kreise C und C' von einem dritten γ berührt werden, Fig. 59.
so geht diejenige gerade Linie, welche die beiden Berührungen, Q und Q' verbindet, durch einen der Symmetral-Puncte der beiden Kreise C und C', in dem Falle der 59. Figur durch den innern, durch P. Wenn drei Berührungs-Kreise γ, γ' und γ'', oder auch γ, γ' und $\varkappa$, welche, alle drei, die beiden gegebenen entweder gleichnamig oder ungleichnamig berühren, so können wir P, als den Chordal-Punct dieser Kreise, construiren. Legen wir ferner in den Berührungen des Kreises γ und der beiden gegebenen die gemeinschaftlichen Tangenten, so liegt der Durchschnitt derselben auf der Chordalen der beiden gegebenen Kreise (172), nach der Figur in T. Wenn wir also wiederum drei Berührungs-Kreise γ, γ' und γ'' oder γ, γ' und $\varkappa$ zusammenstellen, so erhalten wir eine gerade Linie, auf der T liegt, indem wir einmal die äufsere, das andere Mal eine der innern Symmetralen construiren.

Wenn wir ursprünglich von den Kreisen γ, γ' und γ'', um diesen einen Fall vorzugsweise zu betrachten, ausgehen, so können wir das Problem der Tactionen als aufgelöset betrachten, wenn wir entweder für jeden dieser Kreise diejenigen geraden Linien bestimmen, welche durch die jedesmaligen beiden Puncte gehen, in welchen derselbe von jedem Paare der gesuchten Kreise berührt wird, oder auch wenn wir nur die Puncte finden, in welchen die in je zwei jener Berührungs-Puncte gelegten Tangenten sich schneiden, die Pole, mit andern Worten, der eben bezeichneten Linien.

204. Betrachten wir nun wieder einen einzelnen Kreis γ und wollen wir die gerade Linie QQ' bestimmen, so kennen wir schon einen Punct, durch welchen dieselbe geht, nemlich den Chordal-Punct P der drei zu berührenden Kreise γ, γ' und γ''. Ferner wis-

sen wir, dafs der Pol T dieser geraden Linie QQ' auf der äufsern Symmetralen der gegebenen Kreise liegt, und folglich geht gegenseitig QQ' durch den Pol der äufsern Symmetralen, durch M; weil nemlich die Polare jedes Punctes der letztgenannten Linie, mithin auch die Polare des Punctes T, d. h. eben jene zu construirende gerade Linie QQ' durch den Pol derselben, durch M, geht. Die gerade Linie QQ' ist auf diese Weise durch die Puncte P und M bestimmt.

Nehmen wir die Kreise γ, γ' und $\varkappa$ für die gegebenen, und suchen wir, um uns auf dieselbe Figur beziehen zu können, diejenigen beiden Kreise, deren jeder von γ und γ' auf dieselbe, von $\varkappa$ aber auf die entgegengesetzte Weise berührt wird, so ist sogleich ersichtlich, dafs die eben angezeigte Construction von QQ' sich nur in soweit ändert, als wir mit der äufsern Symmetralen der zu berührenden Kreise, diejenige innere vertauschen müssen, welche den innern Symmetral-Punct von γ und $\varkappa$, so wie von γ' und $\varkappa$, mithin den äufsern von γ und γ' enthält.

Hiernach ergibt sich denn folgende allgemeine und leicht übersichtliche zweite Construction des Problems der Tactionen:

„Man construire den Chordal-Punct der drei gegebenen zu berührenden Kreise; con-„struire ferner die vier Symmetralen und für jede derselben den Pol auf jedem der gege-„benen Kreise. Auf diese Weise erhalten wir zwölf Puncte, und wenn wir dieselben mit „dem Chordal-Puncte verbinden, zwölf gerade Linien, welche im Allgemeinen die bezügli-„chen Kreise in vier und zwanzig Puncten schneiden, und diese vier und zwanzig Puncte „sind diejenigen, in welchen die acht möglichen Berührungs-Kreise die drei gegebenen „Kreise berühren."

Die Determination der Aufgabe liegt in der Realität der Durchschnitte der eben construirten dreimal vier geraden Linien mit den bezüglichen gegebenen Kreisen.

Fig. 59. 205. Die eben angezeigte Construction erleidet Modificationen nach den verschiedenen Methoden, den Pol einer gegebenen geraden Linie auf einem gegebenen Kreise zu bestimmen. Dieser Pol liegt z. B. in dem Durchschnitte des vom Mittelpuncte des Kreises auf die gerade Linie gefällten Perpendikels, (das wir als die Polare eines unendlich weit abstehenden Punctes der geraden Linie betrachten können) mit der Polaren irgend eines Punctes der gegebenen geraden Linie, oder auch im Durchschnitte der Polaren irgend zweier beliebiger Puncte derselben. Nehmen wir insbesondere für diese beiden Puncte, wenn wir z. B. QQ' auf dem Kreise γ construiren wollen, die äufsern Symmetral-Puncte von γ und γ' und von γ und γ'', so fallen wir auf die Construction des H. Gergonne zurück (194).

Wir können auch, mehr in dem Sinne der alten Geometrie, den Pol M construiren, indem wir auf dem Perpendikel, das von γ auf die äufsere Symmetrale gefällt werden kann, den Punct M so bestimmen, dafs γM die dritte Proportionale für γL oder a und dem Radius des Kreises oder ϱ ist, dafs also:

$$\gamma M = \frac{\varrho^2}{a},$$

oder wenn wir $\frac{\varrho}{a}$, wofür die in Beziehung auf γ' γ'' u. s. w. entsprechend gebildeten Ausdrücke einen constanten Werth haben, durch c bezeichnen:

$$\gamma M = c.\varrho = c^2.a.$$

Wir bemerken hier beigehend, dafs das Verhältnifs von γM zu dem Radius, oder

zum Abstande des Mittelpunctes von der äufsern Symmetrale für alle Kreise von denen C und C′ auf entsprechende Art berührt werden, ein constantes ist.

206. Wir erhalten eine dritte Construction des Problems der Tactionen, wenn wir, was oben schon bemerkt worden ist, nicht geradezu (wir beziehen uns wieder auf den Kreis γ in der Construction der 59. Figur) die gerade Linie QQ′ construiren, sondern den Pol derselben, den Punct T. Dieser Punct liegt zuvörderst auf der äufsern Symmetralen von γ, γ' und γ'' oder auf einer leicht zu unterscheidenden innern von γ, γ' und $\varkappa$; dann liegt er ferner auf der Polaren jedes Punctes der geraden Linie QQ′, deren Pol er ist, also auch auf der Polaren von P. Hiernach erhalten wir folgende Construction:

„Man construire die vier Symmetralen der drei gegebenen, zu berührenden Kreise; „construire ferner den Chordal-Punct und für dieselben auf jedem der drei gegebenen „Kreise die Polare. Die drei geraden Linien, welche wir auf diese Weise erhalten, schnei- „den jene vier Symmetralen in zwölf Puncten; ziehen wir von diesen Puncten Tangenten „an die bezüglichen Kreise, so erhalten wir vier und zwanzig Berührungs-Puncte. Diese „vier und zwanzig Puncte sind zugleich diejenigen, in welchen die acht gesuchten Kreise „die drei gegebenen berühren.“

Die Möglichkeit der vier Paare von Berührungs-Kreisen hängt davon ab, ob die dreimal vier eben construirten Pole aufserhalb oder innerhalb der drei gegebenen Kreise fallen.

Wir können noch bemerken, dafs die gemeinschaftlichen Chorden des Orthogonal-Kreises mit den drei gegebenen Kreisen die Polaren des Chordal-Punctes sind.

207. Die oben aufgestellten drei Constructionen des Problems der Tactionen für den Fall, dafs drei gegebene Kreise berührt werden sollen, liefert mehrere zierliche Constructionen für die andern Fälle, wo gerade Linien oder Puncte an die Stelle von Kreisen treten. Nach den früher gemachten, und durch Rechnung unterstützten, Bemerkungen (160, 168, 169) können wir die Constructionen für alle diese einzelnen Fälle unmittelbar herleiten.

Wenn zwei Kreise und ein Punct gegeben sind, so gehen die beiden Symmetralen durch den gegebenen Punct, durch welchen auch der Orthogonal-Kreis geht. Die erste Construction gibt uns also immer noch einen zweiten Punct auf jeder der beiden Symmetralen, durch welchen zwei der vier möglichen Berührungs-Kreise gehen. Nach der zweiten und dritten Construction können wir die Berührungs-Puncte auf den beiden gegebenen Kreisen bestimmen.

208. Wenn ein Kreis γ und zwei Puncte γ' und γ'' gegeben sind, so ist diejenige gerade Linie, welche durch diese beiden Puncte geht, als Symmetrale anzusehen. Die erste Construction gibt hier keinen neuen Punct, durch den die Berührungs-Kreise gehen. Nach der zweiten Construction erhalten wir die Berührungs-Puncte auf dem gegebenen Kreise γ, wenn wir den Pol, von $\gamma'\gamma''$ suchen, durch diesen Pol, durch M, und den Chordal-Punct eine gerade Linie legen, und die Durchschnitte derselben mit dem Kreise γ, nemlich Q und Q′, bestimmen. Statt des Chordal-Punctes können wir, ähnlich wie in der anfänglich von H. Gergonne gegebenen Construction (193), den Durchschnitt N zweier den Polaren von γ' und γ'' parallelen und durch diese Puncte gehenden geraden Linien suchen. Fig. 61.

Aus der so modificirten Construction ist sogleich ersichtlich, dafs wir die Puncte M und N durch den Durchschnitt derselben geraden Linien, nur in umgekehrter Ordnung, erhalten, wenn ursprünglich statt der Puncte γ' und γ'' ihre Pole $\varkappa'$ und $\varkappa''$ gegeben wären. Gleichviel also, ob uns irgend zwei Puncte oder ihre Pole auf dem Kreise, der berührt werden soll, gegeben sind, die Berührungs-Puncte sind in beiden Fällen dieselben. Die beiden durch γ' und γ'' und durch $\varkappa'$ und $\varkappa''$ gelegten geraden Linien schneiden sich in dem Pole von MN, der sowol auf der einen als der andern dieser Linien liegen mufs. Es ist hier der Ort nicht, hieran noch weitere Folgerungen anzuknüpfen.

Fig. 42. 209. Wenn zwei Kreise und eine gerade Linie die gegebenen zu berührenden Oerter sind, so finden alle drei Constructions-Arten ihre Anwendung. Die Stelle des Chordal-Punctes vertritt alsdann der Durchschnitt der gegebenen geraden Linie mit der Chordalen der beiden gegebenen Kreise. Man bestimmt, wie wir in dem Frühern ausführlich gezeigt haben, die vier Symmetralen durch die auf die gerade Linie von den Mittelpuncten der Kreise gefällten Perpendikel mit diesen Kreisen. In der 42. Figur, auf die wir hier zurückweisen, ist P der Chordal-Punct, K$\varkappa$, K$\varkappa'$, K$'\varkappa$ und K$'\varkappa'$ sind die vier Symmetralen. Die übrige Construction der Berührungs-Kreise ergibt sich hiernach von selbst, und sind überdiefs den auf den folgenden Fall sich beziehenden, die wir ausführlicher behandeln wollen, ganz analog.

Fig. 62. 210. Wenn ein Kreis, γ, ein Punct, γ', und eine gerade Linie, PG, gegeben sind, so liegt der Chordal-Punct des Systems der drei Oerter im Durchschnitte derjenigen geraden Linie, welche die von γ' an den Kreis γ gezogenen Tangenten halbirt, mit der gegebenen, PG. Dieser Durchschnitt fällt, nach der Figur, in der jene Halbirungs-Linie der leichtern Uebersichtlichkeit wegen fortgelassen ist, in P. Der Durchmesser Sσ des Kreises γ trifft, genugsam verlängert, die gegebene gerade Linie unter rechten Winkeln, demnach sind γ'S und $\gamma'\sigma$ die beiden Symmetralen des Systems. Hieraus ergeben sich folgende Constructionen der in Rede stehenden Aufgabe:

Erstens. Man beschreibe aus P einen Kreis, der durch γ' geht, und also den gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet. Dieser Kreis begegnet, aufser in γ' den beiden Symmetralen noch in R und ϱ. Zwei der Berührungs-Kreise, diejenigen nemlich, welche γ aufserhalb berühren, gehen durch R, die beiden andern durch ϱ.

Zweitens. Man suche die Pole der beiden Symmetralen, M und μ, und lege durch P und jeden dieser Pole eine gerade Linie. Die auf diese Weise gefundenen Linien schneiden den gegebenen Kreis in Q und Q$'$, in $\varkappa$ une $\varkappa'$: diefs sind diejenigen vier Puncte, in welchen derselbe von den gesuchten Kreisen berührt wird.

Drittens. Man suche die Polare von P; diese Linie ist keine andere als die gemeinsame Chorde des gegebenen und des schon eben bezeichneten Kreises, dessen Mittelpunct P ist, und der durch γ' geht. Die Durchschnitte dieser Polaren mit γ'S und $\gamma'\sigma$ sind T und ϑ, und wir erhalten wiederum die Puncte Q, Q$'$ und $\varkappa$, $\varkappa'$, wenn wir von T und ϑ Tangenten an den gegebenen Kreis ziehen.

Fig. 63. 64. 211. Sind endlich zwei gerade Linien, PG und PH, und ein Kreis gegeben, so spielt der Durchschnitt der erstern die Rolle des Chordal-Punctes, die vier Symmetralen bilden ein in den Kreis beschriebenes Viereck, dessen Winkel-Puncte σ, σ', S und S$'$ durch die Durchschnitte der vom Mittelpuncte des Kreises auf die gegebenen geraden Linien gefällten Perpendikel bestimmt werden. Wenn die gegebenen ge-

raden Linien sich innerhalb des gegebenen Kreises schneiden, so können wir die erste Construction nicht geradezu anwenden, weil aus dem Durchschnitte derselben, aus P, alsdann kein Orthogonal-Kreis beschrieben werden kann. Diefs ist der Fall der 63. Figur. In der 64. Figur schneidet der Orthogonal-Kreis die eine Symmetrale $\sigma\sigma'$ in den Puncten R und R', die beide aufserhalb des Kreises liegen; durch diese beiden Puncte gehen zwei der gesuchten Berührungs-Kreise. Zwei andere dieser Kreise haben mit dem Orthogonal-Kreise SS' zur gemeinschaftlichen Chordalen, und sind daher leicht zu construiren. Die andern beiden Symmetralen $S\sigma'$ und $S'\sigma$ werden von diesem Kreise jede in zweien Puncten geschnitten, von denen einer aufserhalb, der andere innerhalb des gegebenen Kreises liegt. Die bezüglichen beiden Paare von Berührungs-Kreisen werden also imaginär.

Am zierlichsten stellt sich hier die zweite Construction dar. Die Pole der vier Symmetralen bilden offenbar die Winkel-Puncte eines um den gegebenen Kreis beschriebenen Parallelogrammes MM'M''M''', dessen Seiten denselben in σ, σ', S und S' berühren und mithin den beiden gegebenen geraden Linien, paarweise genommen, parallel sind. Hiernach bestimmen sich die Berührungs-Puncte auf dem gegebenen Kreise folgendermaafsen: man beschreibe ein Parallelogramm um den gegebenen Kreis, dessen beide Paare gegenüberliegender Seiten mit den beiden gegebenen geraden Linien parallel sind, und ziehe von dem Durchschnitte der letztern vier gerade Linien nach den vier Winkel-Puncten jenes Parallelogrammes. Die acht Puncte Q, in welchen diese vier Linien den Kreis schneiden, sind die gesuchten. In dem Falle der 64. Figur begegnen zwei der eben bezeichneten geraden Linien, nemlich PM und PM dem Kreise nicht, es gibt also hier, was uns auf die frühere Constructions-Art zeigte, nur zwei Paare gesuchter Berührungs-Kreise.

Auch die dritte Construction läfst sich auf diesen Fall ohne alle Schwierigkeit übertragen.

212. Wir wollen nun einen Schritt weiter gehen. Seyen C und C' zwei gegebene Kreise, welche von zweien andern γ und γ' berührt werden, und zwar im Falle der Figur, auf den wir uns zunächst beziehen wollen, wird C von beiden Kreisen aufserhalb und C' von beiden innerhalb berührt. Aus dem innern Symmetral-Puncte von C und C' ist ein Kreis K beschrieben, der mit diesen Kreisen dieselbe Chordale hat, und, um das Entsprechende gleich neben einander zu stellen, aus dem äufsern Symmetral-Puncte der Kreise γ und γ' (von denen jeder von C und C' verschiedenartig berührt wird) ist ein Kreis $\varkappa$ beschrieben, der mit γ und γ' dieselbe Chordale hat. Der Kreis K schneidet alsdann (199) die Kreise γ und γ' und alle mögliche andere, welche C und C' auf entsprechende Weise berühren, unter rechten Winkeln, so wie der Kreis $\varkappa$ die Kreise C und C' und alle mögliche andere, welche γ und γ' auf entsprechende Weise berühren, unter rechten Winkeln schneidet. Fig. 65.

Die Durchschnitte der beiden Kreise C und C' mit einem beliebigem Kreise c, der durch irgend zwei Puncte, A und B, geht, die für den Kreis K zugeordnete Pole sind, und der also den letztgenannten Kreis rechtwinklig schneidet, liegen, paarweise genommen, Q und Q', q und q', mit dem Mittelpuncte dieses Kreises K in gerader Linie. Denn ein Kreis, der durch die beiden Pole A und B und durch den Punct Q oder q geht, geht auch durch den Pol von Q oder q, durch Q' oder q' (132). Da nun der Mittelpunct des Kreises K der (innere) Symmetral-Punct von C und C', ist, so folgt weiter, (179) dafs jener Kreis c die beiden Kreise C und C' unter gleichen Winkeln schneidet. Ebenso schneidet jener Kreis, der durch irgend zwei Puncte geht, die rücksichtlich des Krei-

ses $\varkappa$ zugeordnete Pole sind, die beiden Kreise γ und γ', im Falle, dafs er denselben überhaupt begegnet, unter gleichen Winkeln.

Da wir nach dem frühern die beiden Kreis-Paare C und C', γ und γ', conjugirte Kreise in Beziehung auf K und $\varkappa$ nennen, so können wir den eben bewiesenen Satz in folgende Aussage einkleiden:

Jeder Kreis, der einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet, oder, was hiermit einerlei ist, durch irgend zwei conjugirte Pole desselben geht, schneidet je zwei beliebige conjugirte Kreise unter gleichen Winkeln.

Fig. 65. 66. 213. Da die beiden Kreise K und γ' sich unter rechten Winkeln schneiden, so bestimmt jede gerade Linie, welche durch den Mittelpunct des Kreises K geht und den Kreis γ' schneidet, zwei Durchschnitte, die in Beziehung auf K zugeordnete Pole sind. Solche Pole seyen N und N'. Beschreibt man nun zwei Kreise k und k', die beide mit dem Kreise K ein und dieselbe gerade Linie zur Chordalen haben, und von welchen jeder überdiefs durch einen der beiden eben bezeichneten Durchschnitts-Puncte N und N' geht, so sind diese Kreise k und k' offenbar in Beziehung auf K conjugirte Kreise und werden also, nach der vorigen Nummer von γ' unter gleichen Winkeln geschnitten.

Fig. 66. Wir wollen nun sogleich drei Kreise γ, γ' und γ'' betrachten, die, alle drei, einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneiden, oder es seyen vielmehr ursprünglich jene drei Kreise gegeben, für welche wir den Orthogonal-Kreis K, der alsdann ein durchaus bestimmter ist, construiren. Zieht man ferner durch den Mittelpunct des letztgenannten Kreises K, oder, mit andern Worten, durch den Chordal-Punct von γ, γ' und γ'', irgend eine gerade Linie, welche einen beliebigen dieser drei Kreise, etwa γ', wie vorhin in N und N' schneidet, und construirt wiederum zwei Kreise k und k', welche mit K irgend eine gerade Linie SS zur gemeinschaftlichen Chordalen haben: so werden k und k' zunächst von γ', dann aber auch von den beiden andern Kreisen γ und γ'' unter gleichen Winkeln geschnitten (212). Wir sehen also hieraus, wie zwei Kreise k und k', welche drei gegebene γ, γ' und γ'' der Ordnung nach unter bestimmten Winkeln ω, ω' und ω'' schneiden, sich so zusammenordnen, dafs sie mit demjenigen Kreise, der die drei gegebenen Kreise alle drei unter rechten Winkeln schneidet, dieselbe Chordale haben, und dafs also ihre Mittelpuncte mit dem Chordal-Puncte in gerader Linie liegen.*)

*) Da im Durchschnitte zweier Kreis-Bogen jedesmal Scheitel-Winkel entstehen, so wollen wir, um alle Zweideutigkeit zu vermeiden, für den Durchschnitts-Winkel stets denjenigen nehmen, dessen (krummlinige) Schenkel einander ihre beiden convexen oder ihre beiden concaven Seiten zukehren. Nehmen wir bei dieser Bestimmung die Winkel ω, ω' und ω'' für diejenigen, unter welchen k die Kreise γ, γ' und γ'' schneidet, so schneidet k' (für den Fall der Construction der 66. Figur) dieselben Kreise unter folgenden Winkeln: $(\pi-\omega)$, $(\pi-\omega')$ und $(\pi-\omega'')$. Wenn zwei Kreise sich aufserhalb berühren, so ist der Durchschnitts-Winkel gleich Null; dieser Winkel ist hingegen gleich π, wenn die beiden Kreise sich so berühren, dafs einer den andern umschliefst.

Fig. 67. Wenn die Radien und der Abstand der Mittelpuncte zweier sich schneidender Kreise C und γ bekannt sind, so können wir leicht den Durchschnitts-Winkel derselben NMν, den wir ω nennen wollen, bestimmen. Die Schenkel dieses Winkels, MN un Mν, stehen nemlich auf den Radien beider Kreise, die durch den Durchschnitt M gehen, auf MC und Mγ, senkrecht; mithin ergänzen sich die Winkel ω und CMγ zu π, und ihre Cosinus sind also gleich,

214. Wir haben die beiden Kreise k und k', die durch N und N' gehen, in der vorigen Nummer dadurch näher bestimmt, dafs jeder derselben mit dem Orthogonal-Kreise K irgend eine gerade Linie, die als gegeben betrachtet worden ist, zur Chordalen hat. Wenn wir für diese gerade Linie eine der vier Symmetralen der drei gegebenen Kreise γ, γ' und γ'' nehmen, so werden diese gegebenen Kreise von k und k' unter denselben gleichen Winkeln geschnitten. Fig. 66.

Wir wollen, um diefs darzuthun, zunächst die drei Kreise γ, γ' und γ'' der 65. Figur betrachten, und als gemeinschaftliche Chordale die äufsere Symmetrale derselben nehmen, die den Orthogonal-Kreis K in M und M' wirklich schneidet. Wir erhalten also zwei, vorhin durch k und k' bezeichnete Kreise, wenn wir durch jeden zweier Durchschnitte N und N', die wir durch eine beliebige, durch den Chordal-Punct der gegebenen Kreise gehenden, geraden Linie auf γ' bestimmen, einen Kreis legen, der zugleich durch M und M geht. Fig. 65.

Beschreiben wir nun irgend einen Kreis, der mit den Kreisen γ und γ' dieselbe Chordale hat, in dem besondern Falle der Figur also durch μ und μ' geht, so wird derselbe von jedem Kreise, der γ und γ' rechtwinklig schneidet, wie der Kreis K es thut, ebenfalls rechtwinklig geschnitten. Ein solcher Kreis ist $\varkappa$, dessen Mittelpunct auf der äufsern Symmetralen, mithin mit M und M' in gerader Linie, liegt. Diese Puncte sind daher in Beziehung auf den Kreis $\varkappa$, der den Kreis K unter rechten Winkeln schneidet, zugeordnete Pole, und jeder Kreis, der durch diese Puncte, durch M und M' geht, schneidet die Kreise γ und γ' unter gleichen Winkeln. Es schneiden sich also γ, γ' und k, k' gegenseitig unter gleichen Winkeln.

Die Puncte M und M' sind ebenfalls zugeordnete Pole in Beziehung auf jeden derjenigen beiden Kreise, die, dem Kreise $\varkappa$ entsprechend, aus den äufsern Symmetral-Puncten von γ und γ'', so wie von γ' und γ'' beschrieben werden und mit den bezüglichen Kreisen dieselbe Chordale haben. Hieraus folgt denn unmittelbar, dafs jeder Kreis, der durch M und M', d. h. durch die Durchschnitts-Puncte des Orthogonal-Kreises mit der äufsern Symmetralen geht, alle drei gegebene Kreise unter gleichen Winkeln schneidet. Es ordnen sich die Kreise, welche durch M und M' gehen, paarweise zusammen, wie k und k', so dafs wenn ein Kreis jedes Paares die drei gegebenen Kreise unter irgend einem Winkel ω schneidet, der andere derselben unter dem Winkel $(\pi-\omega)$ schneidet, und beide Kreise in Beziehung auf den Orthogonal-Kreis zugeordnete Kreise sind.

Wenn die äufsere Symmetrale der drei gegebenen Kreise dem Orthogonal-Kreise K nicht begegnet, so brauchen wir die Construction der in Rede stehenden Kreise, nur dahin abzuändern, dafs wir statt Kreise zu beschreiben, die durch M und M' (Puncte, die bei jener Annahme imaginär werden) gehen, nun solche Kreise beschreiben, die mit dem Orthogonal-Kreise die äufsere Symmetrale zur gemeinschaftlichen Chordalen haben. Hiervon überzeugen wir uns auf der Stelle. Wir brauchen zu diesem Ende nur die beiden Kreise γ und γ' zu betrachten und zu zeigen, dafs jeder auf die eben angezeigte Art Fig. 68.

aber von entgegengesetztem Zeichen. Nennen wir nun die Radien beider Kreise R und ϱ den Abstand ihrer Mittelpuncte von einander $(C\gamma)$ ε, so ist:

$$\cos CM\gamma = \frac{R^2+\varrho^2-\varepsilon^2}{2R\varrho},$$

mithin:

$$\cos \omega = \frac{\varepsilon^2-(R^2+\varrho^2)}{2R\varrho},$$

beschriebene Kreis dieselben unter gleichem Winkel schneidet. Construiren wir, gerade wie vorhin, den Kreis $\varkappa$, so schneidet derselbe K rechtwinklig und also auch jeden andern Kreis k oder k', der mit K irgend eine gerade Linie, die durch den Mittelpunct des Kreises $\varkappa$ geht, wie die äufsere Symmmetrale es thut, zur Chordalen hat. γ und γ' sind in Beziehung auf $\varkappa$ zugeordnete Kreise, und werden von dem, $\varkappa$ rechtwinklig schneidenden, Kreis k oder k' unter gleichen Winkeln geschnitten. Diese Beweis-Art erstreckt sich auch auf den zuerst betrachteten Fall.

Fig. 69. Wir müssen ferner den Fall unterscheiden, wo der Orthogonal-Kreis imaginär wird, d. h. der Chordal-Punct der drei gegebenen Kreise γ, γ' und γ'' innerhalb dieser Kreise fällt. In diesem Falle, dem die 69. Figur entspricht, sind diejenigen Kreise, welche die drei gegebenen, alle drei, auf dieselbe Weise berühren, immer möglich. Der eine derselben C wird von jedem der gegebenen umhüllt, während der andere C' dieselben alle drei umhüllt. Offenbar schneiden C und C' einander nicht, mithin begegnet diesen Kreisen auch nicht die Chordale derselben, oder die äufsere Symmetrale der Kreise γ, γ' und γ''. Nehmen wir nun beliebig zwei der letztgenannten drei Kreise, etwa γ und γ', so können wir immer, da diese Kreise sich schneiden, zwei Kreise construiren, für welche dieselben zugeordnete Kreise sind; der eine dieser Kreise $\varkappa$ ist aus dem äufsern Symmetral-Punct von γ und γ', als Mittelpunct, beschrieben. Dieser Kreis, dessen Mittelpunct also auch auf der Chordalen der Berührungs-Kreise C und C' liegt, schneidet jeden dieser Berührungs-Kreise unter rechten Winkeln. Diefs ist sogleich ersichtlich. Denn, nehmen wir z. B. den Kreis C, so berührt derselbe γ und γ' in Q und Q'. Diejenige gerade Linie, welche durch diese Berührungen geht, geht auch durch den äufsern Symmetral-Punct von γ und γ' (171), durch den Mittelpunct des Kreises $\varkappa$. Da γ und γ' in Beziehung auf $\varkappa$ zugeordnete Kreise sind, so sind Q und Q' zugeordnete Pole, und ein Kreis, der wie C durch diese Pole geht, wird von $\varkappa$ rechtwinklig geschnitten. Hiernach schneidet denn ferner jeder andere Kreis (k, k'), der mit C zusammengestellt die äufsere Symmetrale zur Chordalen hat, oder was dasselbe heifst, der mit den beiden Berührungs-Kreisen C und C' dieselbe Chordale hat, den Kreis $\varkappa$ rechtwinklig und mithin (212) die Kreise γ und γ' unter gleichem Winkel.

Fig. 70. Es kann endlich noch der, aus dem äufsern Symmetral-Puncte zweier der gegebenen Kreise γ und γ' zu beschreibende, in dem Obigen $\varkappa$ genannte, Kreis imaginär werden, wenn nemlich einer der gegebenen Kreise γ' innerhalb des andern γ liegt. Wenn nun, bei dieser Voraussetzung, der dritte Kreis γ'' nicht ganz innerhalb des Kreises γ liegt, so können wir γ'' einmal mit γ, das andere Mal mit γ' zusammenstellen, und nach den obigen Verfahrungs-Arten darthun, dafs jeder Kreis, der mit dem Orthogonal-Kreise die äufsere Symmetrale zur Chordalen hat, die gegebenen Kreise γ, γ' und γ'' unter gleichen Winkeln schneidet. Doch wenn auch der dritte Kreis γ'' ganz innerhalb des Kreises γ liegt, so müssen wir in dem Beweise für diesen Fall nothwendig zwei Kreise zusammenstellen, für welche der, oben $\varkappa$ genannte, Kreis imaginär wird, und alsdann können die vorstehenden Beweis-Arten nicht mehr Statt finden. Wir können aber auf folgende Weise verfahren. Die beiden Kreise γ und γ' haben, mit γ'' zusammengestellt, K zum Orthogonal-Kreise. Es erhellt sogleich, dafs dieser Kreis, bei unserer Annahme, immer reell ist, während die bezüglichen Berührungs-Kreise imaginär sind. Der Kreis K begegnet immer der äufsern Symmetralen von γ, γ' und γ'' in zweien Puncten, die durch M und M' bezeichnet sind. (Wir überzeugen uns nemlich leicht, dafs, wenn von zweien Kreisen einer innerhalb des andern liegt, der äufsere Symmetral-Punct derselben immer innerhalb jedes beliebigen Kreises fällt, der die-

selben rechtwinklig schneidet, dafs $\gamma\varkappa$ gröfser ist als γO und kleiner als γO'.) Wenn wir irgend eine gerade Linie durch $\varkappa$, den äufsern Symmetral-Punct von γ und γ', legen, so schneiden sich die Tangenten in N und N', in welchen Puncten diese Linien den Kreisen γ und γ' begegnet, auf der Chordalen dieser Kreise, im § (172). Es läfst sich also durch N und N', ein Kreis ξ legen, der γ und γ' rechtwinklig schneidet, und mithin die Centrale derselben (da nemlich γ und γ' sich nicht schneiden) in denselben Puncten O und O' trifft, in welchen ihr der Orthogonal-Kreis K begegnet. Es ist also, um kurz zu seyn, nach einem bekannten Satze der Elementar-Geometrie:

$$\varkappa O.\ \varkappa O' = \varkappa N.\ \varkappa N',$$

$$\varkappa O.\ \varkappa O' = \varkappa M.\ \varkappa M',$$

und also auch:

$$\varkappa N.\ \varkappa N' = \varkappa M.\ \varkappa M',$$

woraus denn ersichtlich ist, dafs durch die vier Puncte M, M', N und N' sich ein Kreis legen läfst, der, wie überhaupt jeder Kreis, der durch die letztgenannten beiden Puncte geht, die Kreise γ und γ' unter gleichen Winkeln schneidet. Da nun die gerade Linie NN' jede beliebige Richtung haben kann, so ist allgemein bewiesen, dafs jeder Kreis, der durch M und M' geht, γ und γ' und demnach alle drei Kreise γ, γ' und γ'', unter gleichen Winkeln schneidet.

215. Diejenigen Kreise, welche drei gegebene unter gleichen Winkeln schneiden, ordnen sich immer paarweise so zusammen, dafs der Durchschnitts-Winkel für die Kreise jedes Paares gleich sind oder einander zu π ergänzen. Je mehr der Durchschnitts-Winkel sich einem rechten nähert, desto näher rücken einander die beiden Kreise solcher Paare, bis sie endlich im Orthogonal-Kreise zusammenfallen. Als solche Kreis-Paare sind auch die Berührungs-Kreise C und C' der 65. 68. und 69. Figur anzusehen; in der Construction der letztgenannten Figur sind die Durchschnitts-Winkel dieser Kreise beide gleich π, in den andern Constructionen einmal gleich Null, das andere Mal gleich π zu nehmen.

In den Constructionen der 65. und 68. Figur sind die beiden Berührungs-Kreise und zugleich der Orthogonal-Kreis reell und der Mittelpunct des letztern liegt zwischen den Mittelpuncten der beiden erstern. Der Durchschnitts-Winkel kann hier jeder beliebige seyn. In der 69. Figur, wo der Orthogonal-Kreis imaginär wird (der Mittelpunct desselben fällt nicht zwischen C und C'), gibt es offenbar ein Minimum der möglichen Durchschnitts-Winkel, und hierdurch ist ein Kreis bestimmt, in dem zwei jener Schneidungs-Kreise zusammenfallen. Zwei zusammengehörige dieser Kreise sind immer noch als conjugirte Kreise zu betrachten, aber rücksichtlich eines Kreises, der, weil ihr äufserer Symmetral-Punct innerhalb derselben liegt, imaginär wird (184). Je zwei solcher conjugirter Kreise haben denselben Punct K zum äufsern Symmetral-Puncte, und alle haben dieselbe Chordale. Nehmen wir nun als erste Axe die gerade Linie, welche die Mittelpuncte alle derjenigen Kreise enthält, welche die drei gegebenen unter gleichen Winkeln schneiden, und als Anfangs-Punct den Punct K, so haben die Gleichungen zweier conjugirter Kreise, für welche wir C und C' nehmen mögen, folgende Form:

$$\left.\begin{aligned} y^2+(x-\alpha)^2 &= \varrho^2, \\ y^2+(x-\alpha')^2 &= \varrho'^2, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

und zugleich ist:

$$\alpha\varrho' \pm \alpha'\varrho = 0, \quad (2)$$

wo wir, da K in der Construction der 69. Figur äufserer Symmetral-Punct ist, das negative Zeichen nehmen müssen.

Fig. 65. Wenn wir in der 65. Figur durch K irgend eine gerade Linie legen, die irgend zweien conjugirten Schneidungs-Kreisen k und k' in A und B (Puncte, in denen die Tangenten nicht parallel sind) begegnet, so ist das Product (KA. KB) constant und gleich dem Quadrate des Radius des Orthogonal-Kreises K, wie wir auch die beiden conjugir-
Fig. 69. ten Kreise k und h' nehmen mögen. Für die Construction der 69. Figur, wo wir für die willkührlich durch K gelegte gerade Linie die erste Axe, und für die conjugirten Kreise die beiden Berührungs-Kreise C und $C_{\prime}$ nehmen, ist jenes constante Product negativ, der Orthogonal-Kreis imaginär. Es ist aber, wenn wir die positiven x von A' nach A rechnen:

$$KA.\ KB = (\alpha+\varrho)(\alpha'-\varrho'),$$

und wenn wir entwickeln und zugleich die Bedingungs-Gleichung (2) berücksichtigen:

$$KA.\ KB = \alpha\alpha'-\varrho\varrho'.$$

Statt des Productes (KA. KB) können wir auch das Product (KA'. KB') nehmen und statt beider, jedoch mit negativem Zeichen das Quadrat derjenigen Ordinate KL, welche auf der zweiten Axe durch einen beliebigen der beiden, (in der Figur punctirten) Kreise bestimmt wird, die über AB und A'B' als Durchmesser beschrieben werden können und die ebenfalls von C und C' berührt werden. Wie wir nur zwei conjugirte Kreise nehmen mögen, derjenige Ausdruck, welcher $(\alpha\alpha'-\varrho\varrho')$ ähnlich gebildet wird, ist ein constanter und gleich $(-\overline{KL}^2)$. Sollen die beiden Kreise in einen einzigen zusammenfallen, für dessen Gleichung wir folgende nehmen wollen:

$$y^2+(x-a)^2 = r^2,$$

so entspricht obigem Ausdrucke (a^2-r^2) und wir haben $-$ 2 mithin:

$$r^2-a^2 = \overline{KL}^2.$$

Hieraus ist ersichtlich, dafs der zu bestimmende Kreis, k, die zweite Axe ebenfalls im Puncte L schneidet und mithin durch die Durchschnitts-Puncte der, in der Figur punctirten, Kreise geht, und da er überdiefs mit C und C' die Symmetrale SS zur gemeinschaftlichen Chordalen hat, so ist er leicht zu construiren. Die beiden punctirten Kreise werden, da sie von C und C' berührt werden, von k unter demselben Winkel geschnitten, als die gegebenen γ, γ' und γ''. Wenn wir den Winkel des Durchschnittes jener punctirten Kreise unter sich durch ω bezeichnen, so ergibt sich für das gesuchte *Minimum* der in Rede stehenden Durchschnitts-Winkel: $\left(\frac{\pi+\omega}{2}\right)$.

Fig. 70. Wir wollen nun die Construction der 70. Figur, in der es einen Orthogonal-Kreis, aber keine Berührungs-Kreise gibt, näher betrachten. Zunächs ist offenbar, dafs hier die äufsere Symmetrale SS der drei gegebenen Kreise γ, γ' und γ'' sich, als ein Kreis von immer gröfser werdendem Radius, unter diejenigen Kreise ordnet, welche die gegebenen alle drei unter gleichem Winkel schneiden. Als zugeordneter Kreis ist derjenige Kreis k'' zu betrachten, der durch den Mittelpunct des Orthogonal-Kreises K geht. Dieser Kreis k'' bezeichnet eine Gränze; nehmen wir nemlich den Mittelpunct eines Schneidungs-Kreises, von k'' aus nach derjenigen Seite hin, auf welcher der Mittelpunct des Orthogonal-Kreises K liegt, beliebig an, so fällt der Mittelpunct des conjugirten Kreises nach derselben Seite hin und zwar so, dafs K zwischen den Mittelpuncten der beiden conjugirten Kreise sich befindet und der innere Symmetral-Punct ist. Solche zwei zugeordnete Kreise schneiden also jeden der drei gegebenen unter Winkeln, die sich zu π ergänzen. Das *minimum* des Durchschnitts-Winkels ist der kleinere der Nebenwinkel, unter welchen die Symmetrale SS den gegebenen Kreisen begegnet; diesen Win-

kel wollen wir ω nennen. Nehmen wir den Mittelpunct eines Schneidungs-Kreises von k'' aus, nach derjenigen Seite hin, auf welcher K nicht liegt, beliebig an, so fällt der Mittelpunct des conjugirten Kreises nach derselben Seite hin, so dafs K äufserer Symmetral-Punct wird. Je zwei solcher conjugirter Kreise schneiden mithin jeden der gegebenen unter gleichem Winkel. Solche Kreise sind k und k'. Der Durchschnitts-Winkel wächst, indem wir den Mittelpunct des Schneidungs-Kreises sich immer weiter von K entfernen lassen bis zu einer gewissen Gränze und nimmt dann wieder ab, indem er sich immer mehr $(\pi-\omega)$ nähert. Jenem *Maximum* entsprechen zwei conjugirte Kreise, welche in einen einzigen zusammenfallen. Dieser Kreis, k''', ist offenbar derjenige, welcher den Orthogonal-Kreis K rechtwinklig schneidet, und daher leicht zu construiren; sein Mittelpunct liegt in dem zweiten Durchschnitte des Kreises k'' mit der gemeinschaftlichen Centralen aller Schneidungs-Kreise.

216. Wenn wir in den bisherigen Entwicklungen die äufsere Symmetrale dreier ge- Fig. 65. gebener Kreise mit einer der innern vertauschen, so kommen wir zu ähnlichen Constructionen. Wir brauchen hier nur anzudeuten, und wollen nur einen speciellen Fall hervorheben. In der 65. Figur ist mit den Kreisen γ und γ' ein Kreis γ''' zusammengestellt, der jeden der Berührungs-Kreise C und C' auf entgegengesetzte Weise berührt als die beiden erstgenannten Kreise. Alsdann schneiden sich C und C' und der Orthogonal-Kreis K in denselben beiden Puncten M und M'. Durch diese Puncte geht diejenige innere Symmetrale von γ, γ' und γ''', welche den äufsern Symmetral-Punct von γ und γ' enthält. Der Kreis k' schneidet die beiden Kreise γ und γ' in zwei Puncten N' und N, die mit dem äufsern Symmetral-Puncte dieser Kreise, $\varkappa$, in gerader Linie liegen. Hiernach schneidet k' die Kreise γ und γ' unter gleichem Winkel, den wir ω nennen wollen, während er γ''' unter einem Winkel schneidet, der jenen Winkel ω zu π ergänzt. Der zugeordnete Kreis k schneidet, im besondern Falle der Figur, die Kreise γ und γ' unter einem Winkel $(\pi-\omega)$ und den Kreis γ''' unter einem Winkel ω.

Bei einer andern Gröfse und gegenseitigen Lage der drei gegebenen Kreise zu einander, können zwei conjugirte Kreise, wie k und k' jeden der gegebenen statt unter Winkeln, die sich zu π ergänzen, unter gleichen Winkeln schneiden.

217. Wir wollen hier nun gleich die Construction folgender Aufgabe anschliefsen: Fig. 71.

Einen Kreis zu beschreiben, der vier gegebene unter gleichem Winkel schneidet.

Seyen γ, γ', γ'' und γ''' die vier gegebenen Kreise; $M'''M_{'''}$, $M''M_{''}$, $M'M_{'}$ und MM die äufsern Symmetralen von γ, γ' und γ''; γ, γ' und γ'''; γ, γ'' und γ'''; und von γ' γ'' und γ'''; K''', K'', K', und K die Orthogonal-Kreise jener vier Systeme von drei Kreisen. Die Symmetrale von γ, γ' und γ'' schneide den bezüglichen Orthogonal-Kreis K''' in M''' und $M_{'''}$: diese Puncte sind alsdann zugeordnete Pole für den, in der Figur punctirten, Kreis $\varkappa$, der aus dem äufsern Symmetral-Puncte von γ und γ' so beschrieben worden ist, dafs er mit diesen Kreisen dieselbe Chordale hat. Die Symmetrale von γ, γ' und γ''' schneide den bezüglichen Orthogonal-Kreis K'' in M'' und $M_{''}$; diese Puncte sind alsdann, wie eben, zugeordnete Pole für den Kreis $\varkappa$. Durch M''', $M_{'''}$, M'' und $M_{''}$ läfst sich also ein Kreis legen: dieser Kreis schneidet die gegebenen alle vier unter gleichem Winkel. Die Construction dieses Kreises, auf die wir später zurückkommen, ergibt sich hiernach auf der Stelle.

218. Nachdem wir uns in den letzten Nummern in einem Cyclus von Aufgaben und Constructionen orientirt haben, wollen wir nun den Gegenstand durch Rechnung geradezu angreifen. Zunächst nehmen wir die Aufgabe:

Einen Kreis zu beschreiben, der jeden von drei gegebenen Kreisen unter einem gegebenen Winkel schneidet.

Seyen:

$$\begin{aligned}(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 &= \varrho^2,\\ (y-b)^2+(x-a)^2 &= r^2,\\ (y-B)^2+(x-A)^2 &= R^2;\end{aligned} \qquad (1)$$

die Gleichungen der drei gegebenen Kreise, die der Ordnung nach unter den Winkeln ω, ω' und ω'' geschnitten werden sollen. Der Mittelpunct des gesuchten Kreises, dessen unbekannten Radius wir φ nennen wollen, liegt alsdann (214, Anm.) zugleich auf folgenden drei Kreisen:

$$\begin{aligned}(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 &= \varrho^2+\varphi^2+2\varrho\varphi \cos\omega,\\ (y-b)^2+(x-a)^2 &= r^2+\varphi^2+2r\varphi \cos\omega',\\ (y-B)^2+(x-A)^2 &= R^2+\varphi^2+2R\varphi \cos\omega'',\end{aligned} \qquad (2)$$

er ist, mit andern Worten, der Chordal-Punct dieser drei Kreise. Nehmen wir für φ nach einander jeden beliebigen Werth, so stellen die Gleichungen (2) verschiedene Systeme dreier Kreise dar. Die Chordal-Puncte aller dieser verschiedener Systeme liegen in gerader Linie. Um diefs zu zeigen und zugleich die Gleichung dieser geraden Linie zu entwickeln, wollen wir

$$\varrho^2-(\alpha^2+\beta^2) = r^2-(a^2+b^2) = R^2-(A^2+B^2) \qquad (3)$$

setzen, d. h. den Anfangs-Punct der Coordinaten im Chordal-Puncte der drei gegebenen Kreise (1) annehmen. Ziehen wir nun von der ersten der drei Kreis-Gleichungen (2) nach einander die zweite und dritte ab, so ergibt sich mit Berücksichtigung der Bedingungs-Gleichung (3):

$$\begin{aligned}(b-\beta)y+(a-\alpha)x &= (\varrho \cos\omega - r\cos\omega')\varphi,\\ (B-\beta)y+(A-\alpha)x &= (\varrho \cos\omega - R\cos\omega'')\varphi;\end{aligned}$$

und, wenn wir φ eliminiren, kommt als gesuchte Gleichung:

$$y = -\frac{\varrho(a-A)\cos\omega+r(A-\alpha)\cos\omega'+R(\alpha-a)\cos\omega''}{\varrho(b-B)\cos\omega+r(B-\beta)\cos\omega'+R(\beta-b)\cos\omega''}\,x. \qquad (4)$$

Auf der durch diese Gleichung dargestellten geraden Linie liegt der Mittelpunct des gesuchten Kreises. Solcher Kreise sind zwei möglich, nur müssen wir hierbei nicht aufser Acht lassen, dafs einer dieser Kreise oder auch alle beide solche seyn können, welche die gegebenen Kreise unter Winkeln schneiden, die alle drei Winkel ω, ω' und ω'' zu π ergänzen, denn die Gleichung (4) ändert sich nicht, wenn wir zugleich die Zeichen aller Cosinus ändern.

Setzen wir $\omega = \omega' = \omega''$, so verschwinden aus der letzten Gleichung die Winkel-Functionen ganz, und wir erhalten die 5. Gleichung der 153. Nummer, die Gleichung derjenigen geraden Linie, welche die Mittelpuncte zweier Berührungs-Kreise enthält. Diese gerade Linie ist also der geometrische Ort für die Mittelpuncte aller Kreise, welche die drei gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln schneiden.

Wenn wir Nenner und Zähler des Coefficienten von x in der Gleichung (4) durch $\cos\omega$ dividiren, so kommen wir zu einer Gleichung, die, rücksichtlich der Winkel-Functionen, nur die Quotienten $\frac{\cos\omega'}{\cos\omega}$ und $\frac{\cos\omega''}{\cos\omega}$ enthält: Hieraus erhellt, dafs die Gleichung dieselbe bleibt, wie wir auch die Winkel ω, ω' und ω'' annehmen mögen, so lange nur

mögen, so lange nur jene Quotienten, die wir durch μ und ν bezeichnen wollen, sich nicht ändern. Die Gleichung (4) ist also der Ort für die Mittelpuncte aller derjenigen Kreise, welche die drei gegebenen Kreise unter Winkeln scheiden, deren Cosinus sich verhalten wie $1:\mu:\nu$.

219. Wenn wir, ähnlich wie in der 195. Nummer, als erste Axe diejenige gerade Linie nehmen, welche durch die Mittelpuncte der beiden zu construirenden Kreise geht, so sind die Gleichungen dieser Kreise von folgender Form:

$$\begin{aligned} y^2+(x-A)^2 &= R^2, \\ y^2+(x-A')^2 &= R'^2; \end{aligned} \qquad (1)$$

und wenn wir als zweite Axe der Chordale dieser Kreise nehmen, so findet zwischen den Constanten ihrer Gleichungen überdiefs noch folgende Beziehung Statt:

$$R^2-A^2 = R'^2-A'^2. \qquad (2)$$

Es seyen ferner die Gleichungen der drei gegeben Kreise, die wir in der vorigen Nummer durch (1) dargestellt haben, nun folgende:

$$\begin{aligned} (y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 &= \varrho^2, \\ (y-\beta')^2+(x-\alpha')^2 &= \varrho'^2, \\ (y-\beta'')^2+(x-\alpha'')^2 &= \varrho''^2. \end{aligned} \qquad (3)$$

Diese drei Kreise werden in einem Falle von beiden Kreisen (1) unter den gegebenen Winkeln ω, ω' und ω'', oder von beiden unter denjenigen Winkeln geschnitten, die die gegebenen zu π ergänzen; im andern Falle werden sie von einem der Kreise (1) unter den gegebenen Winkeln, von dem andern unter den Ergänzungs-Winkeln geschnitten. In dem einen Falle haben wir, wenn wir den ersten der Kreise (3) betrachten:

$$\begin{aligned} \beta^2+(\alpha-A)^2 &= R^2+\varrho^2\pm 2R\varrho\cos\omega, \\ \beta^2+(\alpha-A')^2 &= R'^2+\varrho^2\pm 2R'\varrho\cos\omega, \end{aligned}$$

und wenn wir abziehen und auf (2) Rücksicht nehmen, kommt:

$$(A'-A)\alpha = \mp(R'-R)\varrho\cos\omega.$$

In dem andern Falle ergibt sich auf ähnliche Weise:

$$(A'-A)\alpha = \mp(R'+R)\varrho\cos\omega,$$

und wir haben also, indem wir beide Fälle zusammenfassen:

$$\frac{\varrho\cos\omega}{\alpha} = \mp\frac{A'-A}{R'\mp R}.$$

In Beziehung auf den zweiten und dritten der Kreise (3) finden wir für $\frac{\varrho'\cos\omega'}{\alpha'}$ und $\frac{\varrho'\cos\omega''}{\alpha''}$ denselben Ausdruck, so dafs also:

$$\frac{\varrho\cos\omega}{\alpha} = \frac{\varrho'\cos\omega'}{\alpha'} = \frac{\varrho''\cos\omega''}{\alpha''}.$$

Hieraus folgt:

$$\alpha\varrho'\cos\omega' = \alpha'\varrho\cos\omega, \quad \alpha\varrho''\cos\omega'' = \alpha''\varrho\cos\omega, \quad \alpha'\varrho''\cos\omega'' = \alpha''\varrho'\cos\omega',$$

und mithin verschwinden die Ausdrücke:

$$\frac{\alpha\varrho'\cos\omega'-\alpha'\varrho\cos\omega}{\varrho'\cos\omega'-\varrho\cos\omega}, \quad \frac{\alpha\varrho''\cos\omega''-\alpha''\varrho\cos\omega}{\varrho''\cos\omega''-\varrho\cos\omega}, \quad \frac{\alpha'\varrho''\cos\omega''-\alpha''\varrho'\cos\omega'}{\varrho''\cos\omega''-\varrho'\cos\omega'}, \qquad (4)$$

d. h. die Abscissen dreier Symmetral-Puncte derjenigen drei Kreise, die aus den Mittelpuncten der gegebenen mit den Radien $\varrho\cos\omega$, $\varrho'\cos\omega'$ und $\varrho''\cos\omega''$ beschrieben werden können. Diese Symmetral-Puncte liegen also auf der Chordalen der beiden Kreise (1), die mithin eine Symmetrale der eben bezeichneten drei Kreise ist. Im Falle dafs die Winkel ω, ω' und ω'' alle drei gröfser oder alle drei kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind, ist diese Symmetrale eine äufsere, sonst eine der innern, die wir sogleich unterscheiden.

Aehnlich wie in der vorigen Nummer, erkennen wir, dafs auch die Ausdrücke (4) dieselben bleiben, so lange das Verhältnifs der Cosinus der Schneidungs-Winkel sich nicht ändert. Dieses Verhältnifs sey:

$$1:\ \mu:\ \nu,$$

so dafs die drei Cosinus durch folgende Werthe dargestellt werden können:

$$\varepsilon,\ \varepsilon\mu,\ \varepsilon\nu,$$

indem wir durch ε beliebige Werthe bezeichnen. Nehmen wir ε immer kleiner, so nähert sich der Schneidungs-Kreis immer mehr dem Orthogonal-Kreise, der dem Uebergange von positiven Werthen von ε zu negativen Werthen entspricht. Dieser Kreis hat also mit allen in Rede stehenden Schneidungs-Kreisen die eben näher bestimmte Symmetrale zur gemeinschaftlichen Chordalen. Hiernach ergibt sich folgende Construction der Aufgabe, einen Kreis zu beschreiben, der jeden von drei gegebenen Kreisen unter einem gegebenen Winkel schneidet (wobei auch an die Stelle aller drei gegebenen Winkel die Nebenwinkel derselben treten können):

„Man verkürze den Radius jedes der drei gegebenen Kreise im Verhältnisse von Eins „zum Cosinus desjenigen Winkels, unter welchem derselbe geschnitten werden soll. Für „die drei neuen, auf diese Art bestimmten, Kreise construire man die äufsere Symmetrale, „wenn die gegebenen Winkel alle drei gröfser oder alle drei kleiner sind als $\frac{\pi}{2}$, sonst die„jenige innere Symmetrale, welche durch den äufsern Symmetral-Punct derjenigen beiden „(zuvor verkleinerten) Kreise geht, die unter den beiden der gegebenen Winkel geschnit„ten werden sollen, welche beide kleiner oder beide gröfser sind als $\frac{\pi}{2}$. Man construire „ferner für die drei ursprünglich gegebenen Kreise den Orthogonal-Kreis. Diejenigen bei„den Kreise, welche alsdann mit diesem Orthogonal-Kreise jene Symmetrale zur gemein„schaftlichen Chordalen haben, und überdiefs einen beliebigen der drei gegebenen Kreise „unter dem gegebenen Winkel schneiden, sind die gesuchten."

Die Determination liegt in der Möglichkeit derjenigen Aufgabe, auf welche die ursprüngliche zurückgeführt worden ist. *) Der Orthogonal Kreis kann imaginär werden (sein Radius unter der Form $R\sqrt{-1}$ erscheinen) und doch die Aufgabe möglich bleiben.

*) Um uns nicht zu unterbrechen, deute ich die Construction dieser Aufgabe nur beiläufig nach der gewöhnlichen analytischen Behandlungs-Weise an. Setzen wir nemlich den Anfangs-Punct der Coordinaten in den Fufs-Punct des vom Chordal-Puncte der gegebenen Kreise auf die im Texte bezeichnete Symmetrale, gefällten Perpendikels und nehmen die Symmetrale selbst zur zweiten Axe, so ist die Gleichung des Orthogonal-Kreises folgende:

$$y^2+(x-A)^2 = R^2,$$

wo A die Abscisse des Chordal-Punctes bezeichnet, und R^2 sich auf bekannte Weise bestimmt, der Orthogonal-Kreis mag reell oder imaginär seyn. (Einmal ist R^2 das Quadrat einer Tangente, das andere Mal ($-R^2$) das Quadrat einer halben Chorde). Die Gleichung eines Kreises, der mit dem Orthogonal-Kreise die zweite Axe zur Chordalen hat, ist von derselben Form:

$$y^2+(x-a)^2 = r^2, \qquad \text{(a)}$$

und zugleich ist, ganz allgemein und auch für den Fall, dafs der Orthogonal-Kreis imaginär wird:

$$R^2-A^2 = r^2-a^2. \qquad \text{(b)}$$

220. Wir können die eben behandelte Aufgabe auch dahin ausdehnen, dafs die Durchschnitte des gesuchten Kreises mit den gegebenen, zum Theil oder alle, imaginär werden; indem wir nemlich die Cosinus der gegebenen Durchschnitts-Winkel gröfser als Eins nehmen, ihnen aber immer noch einen bestimmten Werth beilegen. Hierdurch wird eine Beziehung der Lage und Gröfse des verlangten Kreises zu der Lage und Gröfse jedes der gegebenen Kreise angegeben, die wir nach der Note zur 213. Nummer geometrisch leicht näher bezeichnen können. So lange das Verhältnifs der Cosinus, sie mögen alle oder zum Theil auch gröfser als Eins, mithin blofs fictiv seyn, folgendes bleibt:

$$1 : \mu : \nu,$$

so lange liegen die Mittelpuncte der gesuchten Kreise auf der durch die in der 218. Nummer entwickelten Gleichung dargestellten geraden Linie.

In die auf diese Weise erweiterte Reihe von gesuchten Kreisen ordnet sich jedesmal auch die in der vorigen Nummer bezeichnete Symmetrale, und wenn diese den Orthogonal-Kreis nicht schneidet, gehören hierhin auch zwei Puncte.

221. Wir wenden uns schliefslich nun zu folgender Aufgabe:

Einen Kreis zu beschreiben, der vier gegebene Kreise unter Winkeln schneidet, deren Cosinus in einem gegebenen Verhältnisse $1 : \mu : \nu : \varrho :$ *stehen.*

Seyen:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = \varrho^2,$$
$$(y-\beta')^2+(x-\alpha')^2 = \varrho'^2,$$
$$(y-\beta'')^2+(x-\alpha'')^2 = \varrho''^2,$$
$$(y-\beta''')^2+(x-\alpha''')^2 = \varrho'''^2,$$

die Gleichungen der vier gegebenen Kreise. Wir wollen ferner den Radius des gesuchten Schneidungs-Kreises durch φ, und die Winkel, für welche das Verhältnifs der Cosinus gegeben ist, durch ω, ω', ω'' und ω''' bezeichnen. Alsdann liegt der Mittelpunct des zu construirenden Kreises zugleich auf folgenden vier Oertern:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 + \varrho^2+\varphi^2+2\varrho\varphi\cos\omega,$$
$$(y-\beta')^2+(x-\alpha')^2 = \varrho'^2+\varphi^2+2\varrho'\varphi\cos\omega',$$
$$(y-\beta'')^2+(x-\alpha'')^2 = \varrho''^2+\varphi^2+2\varrho''\varphi\cos\omega'',$$
$$(y-\beta''')^2+(x-\alpha''')^2 = \varrho'''^2+\varphi^2+2\varrho''\varphi\cos\omega'''.$$

Nehmen wir die Differenz je zweier dieser vier Gleichungen, und setzen zugleich der Kürze halber:

$$\varrho^2-(\alpha^2+\beta^2) = \xi, \quad \varrho'^2-(\alpha'^2+\beta'^2) = \xi', \quad \varrho''^2-(\alpha''^2+\beta''^2) = \xi'', \quad \varrho'''^2-(\alpha'''^2+\beta'''^2) = \xi''',$$

so kommen wir zu folgenden sechs linearen Gleichungen:

$$2(\beta'-\beta)y+2(\alpha'-\alpha)x+\xi'-\xi = 2(\varrho\cos\omega-\varrho'\cos\omega')\varphi,$$
$$2(\beta''-\beta)y+2(\alpha''-\alpha)x+\xi''-\xi = 2(\varrho\cos\omega-\varrho''\cos\omega'')\varphi,$$
$$2(\beta'''-\beta)y+2(\alpha'''-\alpha)x+\xi'''-\xi = 2(\varrho\cos\omega-\varrho'''\cos\omega''')\varphi,$$
$$2(\beta''-\beta')y+2(\alpha''-\alpha')x+\xi''-\xi' = 2(\varrho'\cos\omega'-\varrho''\cos\omega'')\varphi,$$
$$2(\beta'''-\beta')y+2(\alpha'''-\alpha')x+\xi'''-\xi' = 2(\varrho'\cos\omega'-\varrho'''\cos\omega''')\varphi,$$
$$2(\beta'''-\beta'')y+2(\alpha'''-\alpha'')x+\xi'''-\xi'' = 2(\varrho''\cos\omega''-\varrho'''\cos\omega''')\varphi.$$

Soll ferner der durch (a) dargestellte Kreis, den ersten der gegebenen (3) unter dem gegebenen Winkel ω schneiden, so ist:

$$\beta^2+(\alpha-a)^2 = r^2+\varrho^2+2r\varrho\cos\omega. \qquad (c)$$

Die beiden Gleichungen (b) und (c) führen, um r und a zu bestimmen, zu leicht construirbaren quadratischen Gleichungen.

Wir wollen, zum Behuf der Kürze, die Ausdrücke in y, x und gegebenen Gröſsen, die wir für φ aus den letzten sechs Gleichungen erhalten, durch A, A_1, A_2, A_3, A_4 und A_5 darstellen. Diese sechs Symbole können $\frac{6.5}{1.2} = 15$ Mal, paarweise genommen, einander gleich gesetzt werden, und so kommen wir zu folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} A - A_1 = 0, & A - A_3 = 0, & A_1 - A_3 = 0; \\ A - A_2 = 0, & A - A_4 = 0, & A_2 - A_4 = 0; \\ A_1 - A_2 = 0, & A_1 - A_5 = 0, & A_2 - A_5 = 0; \\ A_3 - A_4 = 0, & A_3 - A_5 = 0, & A_4 - A_5 = 0; \\ A - A_5 = 0, & A_1 - A_4 = 0, & A_2 - A_3 = 0. \end{array} \quad (1)$$

Die in diesem Schema zusammengestellten Gleichungen enthalten nicht mehr φ, sind nicht mehr unmittelbar von den Cosinus der Winkel ω, ω', ω'' und ω''', sondern bloſs von den Quotienten je zweier derselben abhängig, und stellen also, da diese Quotienten gegeben sind, construirbare gerade Linien dar.

Die in jeder der vier ersten Reihen des letzten Schema's enthaltenen drei Gleichungen sind identisch und haben, entwickelt, die Form der 4. Gleichung der 218. Nummer. Sie stellen die vier Oerter für die Mittelpuncte derjenigen Kreise dar, welche den ersten, zweiten und dritten; den ersten, zweiten und vierten; den ersten, dritten und vierten; den zweiten, dritten und vierten gegebenen Kreis, der Ordnung nach, unter Winkeln schneiden, deren Cosinus sich verhalten wie:

$$1 : \mu : \nu, \qquad 1 : \mu : \varrho, \qquad 1 : \nu : \varrho, \qquad \mu : \nu : \varrho.$$

Diese vier Oerter, die gerade Linien sind, schneiden sich in demselben Puncte. Dieſs ist sogleich ersichtlich, denn, in folgenden Zusammenstellungen z. B:

$$\begin{array}{lll} A - A_1 = 0, & A - A_2 = 0, & A_1 - A_2 = 0; \\ A - A_3 = 0, & A - A_4 = 0, & A_3 - A_4 = 0; \end{array}$$

bedingen zwei Gleichungen die dritte; es gehen also die bezüglichen geraden Linien, einmal die erste, zweite und dritte; das andere Mal die erste, zweite und vierte, mithin alle vier durch denselben Punct. Dieser Punct ist der Mittelpunct des gesuchten Kreises, der die gegebenen unter Winkeln schneidet, deren Cosinus sich verhalten wie $1 : \mu : \nu : \varrho$. Denn ein Kreis, der aus diesem Puncte, als Mittelpuncte, beschrieben wird und die drei ersten Kreise unter Winkeln schneidet, deren Cosinus sich verhalten wie $1 : \mu : \nu$, schneidet, weil er ebenfalls auf der letzten der vier zusammenlaufenden geraden Linien liegt und schon den zweiten und dritten Kreis unter Winkeln schneidet, deren Verhältniſs $\mu : \nu$ ist, den vierten gegebenen Kreis so, daſs die Cosinus der Schneidungs-Winkel für die letzten drei Kreise sich verhalten wie $\mu : \nu : \varrho$.*)

Der gesuchte Kreis selbst ist hiernach leicht zu construiren, es kommt nur noch darauf an, aus einem bestimmten Puncte derjenigen geraden Linie, welche die Mittelpuncte aller Kreise enthält, welche drei der gegebenen unter Winkeln schneiden, deren Cosinus in gegebenem Verhältnisse stehen, einen dieser Kreise zu beschreiben, und die 219. Nummer führt diese Construction auf folgende zurück: aus einem gegebenen Puncte, als Mittelpuncte, einen Kreis zu beschreiben, der mit einem gegebenen Kreise eine be-

*) Die in der 5. Reihe des Schema's (1) zusammengestellten drei Gleichungen bezeichnen gerade Linien, deren geometrische Bedeutung sogleich erhellt, und die sich leicht, durch Bestimmung von zwei Puncten, construiren lassen. Diese drei Linien gehen ebenfalls durch den Mittelpunct des gesuchten Schneidungs-Kreises.

kannte gerade Linie zur Chordalen hat. In der Möglichkeit dieser letzten Construction liegt die Determination unserer Aufgabe. Da wir auf vierfache Weise die vier gegebenen Kreise zu drei zusammenstellen können, so können wir auch vier Kreise bestimmen und vier gerade Linien, welche die Chordalen dieser vier Kreise und des gesuchten Kreises sind. Im Falle lauter wirklicher Durchschnitte können wir also acht Puncte bestimmen, die auf demselben, dem gesuchten, Kreise liegen. Dieser Kreis ist immer reell, wenn auch nur eine einzige jener Chordalen dem bezüglichen Orthogonal-Kreise begegnet.

Wir müssen ferner auch darauf aufmerksam seyn, dafs der gesuchte Kreis reell seyn kann, ohne dafs er den gegebenen allen oder auch nur irgend einem derselben begegnet (220).

In dem Bisherigen liegen die Elemente zu verschiedenfach modificirten Constructionen unserer Aufgabe. Wir heben die folgende hervor:

„Man construire für zweimal irgend drei der gegebenen vier Kreise den Orthogonal-„Kreis; man verkürze ferner, indem man den Radius des ersten gegebenen Kreises beibe-„hält, die Radien des zweiten, dritten und vierten Kreises in den Verhältnissen $1:\mu$, „$1:\nu$ und $1:\varrho$; und construire für die beiden Systeme von drei neuen Kreisen, die den-„jenigen entsprechen, für welche wir eben den Orthogonal-Kreis construirt haben, die „äufsern Symetralen. Derjenige Kreis, welcher alsdann mit den beiden Orthogonal-„Kreisen diese beiden Symetralen zu Chordalen hat, ist der gesuchte."

222. Die in der vorigen Nummer behandelte Aufgabe gestattet nur eine einzige Auflösung, so lange wir die Durchschnitts-Winkel stets auf die früher festgesetzte Weise nehmen. Nehmen wir aber willkührlich jene Durchschnitts-Winkel oder ihre Nebenwinkel, so erhalten wir acht Auflösungen, weil das gegebene Verhältnifs:

$$1:\ \mu:\ \nu:\ \varrho,$$

durch Zeichenänderung der einzelnen Glieder acht Fälle einschliefst. Einmal können wir nemlich alle Glieder mit demselben Zeichen nehmen, viermal drei mit demselben und das vierte mit verschiedenem Zeichen, und dreimal zwei und zwei mit gleichem Zeichen. Die Modification obiger Construction für die einzelnen Fälle bestehen einzig in der Vertauschung äufserer Symmetralen mit innern.

223. Die Construction der 221. Nummer schliefst, als besondern Fall die Construction desjenigen Kreises in sich, der vier gegebene unter gleichen Winkeln schneidet, und kommt alsdann auf die 217. Nummer hinaus. Hier können wir auch auf folgende Weise verfahren:

„Man construire für jedes zweier Systeme von drei gegebenen, beliebig zusammenge-„stellten, Kreise die beiden bezüglichen Berührungs-Kreise. Der gesuchte Kreis hat als-„dann mit den beiden Berührungs-Kreisen jedes Paares dieselbe Chordale, und ist mit-„hin leicht zu beschreiben."

Die Lage des Mittelpunctes des gesuchten Kreises, rücksichtlich der Mittelpuncte der Berührungs-Kreise jedes beliebigen Paares, bestimmt, ob der Durchschnitts-Winkel ein reeller ist oder nicht.

224. Wenn wir, indem wir bei der Construction der 71. Fig. stehen bleiben, aus dem äufsern Symmetral-Puncte der Kreise γ und γ' einen Kreis $\varkappa$ beschreiben, der mit diesen beiden Kreisen dieselbe Chordale hat, so schneidet derselbe den Orthogonal-Kreis K''' von γ, γ' und γ'' unter rechten Winkeln, und ebenso jeden andern Kreis, der mit K''' Fig. 71.

eine gerade Linie, die, wie $M'''M_{,,,}$, durch jenen Symmetral-Punct geht, zur Chordalen hat, also auch den gesuchten Kreis C. Solcher Kreise, die dem Kreise $\varkappa$ entsprechen, gibt es im Allgemeinen $\frac{4.3}{1.2} = 6$, und diese sechs Kreise können wir auf $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ verschiedene Weisen zu drei combiniren. Die drei Kreise von vier dieser Combinationen haben eine gemeinschaftliche Chordale, welche durch den Mittelpunct des gesuchten Kreises geht; für jede der übrigen Combinationen von drei Kreisen, können wir den gesuchten Kreis, als Orthogonal-Kreis, construiren. Nicht auf der Realität des Kreises $\varkappa$ und der entsprechenden, sondern in der Realität des Orthogonal-Kreises, beruht die Möglichkeit der Aufgabe, die sogar immer Statt hat, wenn einer oder mehrere Kreise, die $\varkappa$ entsprechen, imaginär werden. Hieraus ergibt sich folgende Construction eines Kreises, der vier gegebene unter gleichen Winkeln schneidet:

„Aus den äufsern Symmetral-Puncten von drei, beliebig unter den gegebenen Kreisen „zusammengestellten, Paaren, die jedoch alle vier gegebene Kreise enthalten müssen, „beschreibe man drei Kreise, die mit den bezüglichen gegebenen dieselbe Chordale haben. „Der Orthogonal-Kreis des Systems dieser drei Kreise ist alsdann der gesuchte Kreis.“

225. Wir können die letzten Constructionen ganz auf dieselbe Weise, wie wir es in Beziehung auf das Problem der Tactionen gethan haben, unmittelbar auf die entsprechenden Aufgaben übertragen, wo Puncte und gerade Linien an die Stelle eines oder mehrerer der gegebenen, unter gleichen Winkeln zu schneidenden, Kreise treten. Wir verweilen hier nicht bei diesen leichten Uebertragungen.

Dritter Abschnitt.

Zur Theorie der Linien zweiter Ordnung.

226. Jede einzelne Linie, die durch eine Gleichung vom zweiten Grade zwischen zweien veränderlichen Gröſsen dargestellt wird, pflegt man mit dem Namen: „Linie des zweiten Grades“ oder „der zweiten Ordnung“ zu bezeichnen. In der analytischen Behandlung können wir daher alle diese einzelnen Linien, die eine besondere Classe von Curven bilden, durch die allgemeine Gleichung vom zweiten Grade zwischen y und x vertreten lassen, also durch folgende Gleichung:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = o,$$

wo A, B, C, D, E und F unbestimmte constante Coefficienten bedeuten, denen wir erst bestimmte Werthe beilegen für eine bestimmte, für eine gegebene Curve. Indem wir nun diese Gleichung behandeln und die Resultate, zu denen wir kommen, geometrisch deuten, gelangen wir zu den Eigenschaften der Linien zweiter Ordnung. Diese Eigenschaften erscheinen unter sehr verschiedenen Modificationen, je nachdem wir die Coefficienten obiger Gleichung bestimmen; da aber alle besondern Gleichungen desselben Grades gewisse characteristische Eigenschaften (was z. B. die Zahl der Wurzeln und die Beziehung derselben zu einander betrifft) gemein haben und diesen Eigenschaften eine geometrische Bedeutung entspricht, so durchblickt man leicht den Grund, warum die Eintheilung der Curven nach dem Grade der Gleichungen, durch welche sie analytisch ausgedrückt werden, eine der Natur der Curven selbst angemessene ist. Diese Eigenschaften der Curven sind unabhängig von irgend einem bestimmten Coordinaten-Systeme, und so ist denn auch aus dem eben Erwähnten a priori ersichtlich, daſs der Grad der Gleichung ein und derselben Curve sich nicht ändern kann, wenn wir dieselbe auf verschiedene Systeme geradliniger Coordinaten-Axen beziehen.

227. Den Eintheilungs-Grund für die Linien des zweiten Grades in Arten wollen wir wiederum in den besondern Formen aufsuchen, unter welche dieselben vermittelst Coordinaten-Umformung gebracht werden können. Diese Methode scheint mir vor allen andern den Vorzug zu behaupten.

Die Verwandlung der Coordinaten zerfällt in zwei wesentlich von einander unabhängige Operationen: in die Verlegung des Anfangs-Punctes der Coordinaten mit Beibehaltung der Richtung der Axen, und in Veränderung der Axen-Richtung, indem der Anfangs-Punct der Coordinaten unverrückt bleibt. Wir wollen also sehen, welche For-

men die allgemeine Gleichung des zweiten Grades annehmen kann, vermittelst jener zwiefachen Coordinaten-Veränderung.

Statt der obigen allgemeinen Gleichung des zweiten Grades wollen wir in der Folge uns vorzugsweise der folgenden bedienen:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

die, indem wir den Coefficienten des ersten Gliedes durch Division fortgeschafft haben, nichts von ihrer Allgemeinheit verloren hat, und in der 2α, β, 2γ, 2δ und ε wiederum unbestimmte Coefficienten sind, wo der Factor 2, wo er vorkommt, nur der Symmetrie in den folgenden Entwicklungen wegen, hinzugefügt worden ist.

§. 1.

Verlegung des Anfangs-Punctes der Coordinaten. Discussion aller einzelnen Fälle, welche die allgemeine Gleichung umfaſst.

228. Sey also:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0 \qquad (1)$$

die allgemeine Gleichung der Linien zweiter Ordnung auf irgend ein beliebiges, rechtwinkliges oder schiefwinkliges, Coordinaten-System bezogen. Sind alsdann y' und x' die Coordinaten eines Punctes, über dessen Lage wir einstweilen noch keine nähere Bestimmung machen, so brauchen wir bloſs in die Gleichung (1)

$$y+y' \text{ statt } y, \quad \text{und} \quad x+x' \text{ statt } x,$$

zu substituiren, um die bezügliche Curve auf ein neues Coordinaten-System zu beziehen, dessen Axen den frühern parallel bleiben, dessen Anfangs-Punct aber in den Punct (y', x') verlegt ist. Auf diese Weise erhalten wir:

$$\begin{aligned} y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2(y'+\alpha x'+\gamma)y+2(\alpha y'+\beta x'+\delta)x \\ +(y'^2+2\alpha x'y'+\beta x'^2+2\gamma y'+2\delta x'+\varepsilon) = 0. \qquad (2) \end{aligned}$$

Wir bemerken zuvörderst, daſs diese Aufforderung sich nur auf die Coefficienten von y und x und auf das constante Glied erstreckt. Durch eine schickliche Annahme von y' und x', d. h. indem wir die Lage des neuen Anfangs-Punctes gehörig wählen, können wir im Allgemeinen jene beiden Coefficienten, oder auch jeden einzelnen derselben und das constante Glied verschwinden lassen.

229. Damit die Coefficienten von y und x in der umgeformten Gleichung verschwinden, müssen wir y' und x' so nehmen, daſs die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y'+\alpha x'+\gamma &= 0, \\ \alpha y'+\beta x'+\delta &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

befriedigt werden. Da diese beiden Gleichungen linear sind, so gibt die Elimination niemals imaginäre Werthe für y' und x'; diese Werthe können aber unendlich und unbestimmt werden. Eliminiren wir wirklich, so kommt:

$$y' = \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\alpha^2-\beta}, \qquad x' = \frac{\delta-\alpha\gamma}{\alpha^2-\beta}. \qquad (4)$$

Weil wir den Coefficienten des ersten Gliedes der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades auf Eins gebracht haben, ist nicht sogleich ersichtlich, welche Form die letzten Ausdrücke annehmen, wenn jenes erste Glied fehlt. Für diesen Fall ist die allgemeine

Gleichung, nachdem wiederum alle Glieder derselben durch den Coefficienten von xy dividirt worden, unter folgender Form:

$$xy+\beta x^2+\gamma y+\delta x+\varepsilon,$$

die Gleichungen (3) verwandeln sich hiernach in:

$$x'+\gamma=o, \qquad y'+2\beta x'+\delta=o,$$

und mithin kommt:

$$x'=-\gamma, \qquad y'=2\beta\gamma-\delta.$$

Wenn endlich auch β Null ist, also auch das mit x^2 behaftete Glied ausfällt und die Form der Gleichung folgende ist:

$$xy+\gamma y+\delta x+\varepsilon=o,$$

so ergibt sich:

$$x'=-\gamma, \qquad y'=-\delta.$$

230. Für die in der vorigen Nummer bestimmten Werthe von y' und x' verschwinden aus der Gleichung (2) diejenigen beiden Glieder, welche die ersten Potenzen der veränderlichen Gröſsen enthalten. Zugleich bekommt das von denselben unabhängige Glied einen bestimmten Werth, den wir durch die Coefficienten der ursprünglichen Gleichung (1) ausdrücken können. Addiren wir zu diesem Ende die ersten Theile der beiden Gleichungen (3), nachdem wir zuvor die eine mit y', die andere mit x' multiplicirt haben, und ziehen den auf diese Weise erhaltenen Ausdruck von jenem constanten Gliede, nemlich von:

$$y'^2+2\alpha x'y'+\beta x'^2+2\gamma y'+2\delta x'+\varepsilon$$

ab, so vereinfacht sich dasselbe, so daſs wir bloſs:

$$\gamma y'+\delta x'+\varepsilon$$

übrig behalten.

Substituiren wir in diesem Ausdruck die eben entwickelten Werthe von y' und x', so kommt, wenn wir Alles auf gemeinschaftlichen Nenner bringen:

$$\frac{\delta^2-2\alpha\delta\gamma+\beta\gamma^2+(\alpha^2-\beta)\varepsilon}{\alpha^2-\beta},$$

und diesem Ausdrucke können wir auch folgende Form geben:

$$\frac{(\delta-\alpha\gamma)^2+(\alpha^2-\beta)(\varepsilon-\gamma^2)}{\alpha^2-\beta}.$$

Es verwandelt sich also die Gleichung (1), indem wir den Anfangs-Punct der Coordinaten in den Punct (y', x') verlegen und, der Kürze halber:

$$\frac{(\delta-\alpha\gamma)^2+(\alpha^2-\beta)(\varepsilon-\gamma^2)}{\alpha^2-\beta}=\varepsilon'$$

setzen, in folgende Gleichung:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+\varepsilon'=o. \qquad (5)$$

Diese Umformung kann immer Statt finden und die ungeformte Gleichung dieselbe Curve noch immer wirklich darstellen, wenn die Werthe von y' und x' nicht unendlich werden, und sie kann immer nur auf eine einzige Weise geschehen, wenn diese Werthe nicht unbestimmt werden. Diese beiden Fälle, denen beiden die Bedingung:

$$\alpha^2-\beta=o,$$

entspricht, wollen wir für den Augenblick ausschlieſsen und später besonders betrachten.

231. Ziehen wir durch den neuen Anfangs-Punct der Coordinaten irgend eine gerade Linie, deren Gleichung also von der Form:

$$y=\varkappa x,$$

ist, so finden wir für die gleichnamigen Coordinaten der Durchschnitte dieser geraden Linie mit der Linie zweiter Ordnung gleiche und entgegengesetzte Werthe. Substituiren

wir den Werth von y, den die letzte Gleichung gibt, in die umgeformte Gleichung Curve (5), so finden wir

$$x = \pm\left(\frac{-\varepsilon'}{\varkappa^2+2\alpha\varkappa+\beta}\right)^{\frac{1}{2}},$$

für die Abscissen der Durchschnitts-Puncte, und hieraus die entsprechenden Werthe von y, indem wir mit $\varkappa$ multipliciren. Es wird also im Allgemeinen jede, von der Curve begränzte gerade Linie, die durch den neuen Anfangs-Punct der Coordinaten geht, in diesem Puncte halbirt. Dieser Punct, mit andern Worten, ist der Mittelpunct der Curve. Jede gerade Linie, die durch den Mittelpunct geht, heifst ein Durchmesser.

232. Die eben gefundenen beiden gleichen und entgegesetzten Werthe von x sind nicht immer reell. Wir wollen die einzelnen Fälle, denen eben so viele Unterarten von Linien der zweiten Ordnung entsprechen, ausführlicher behandeln. Es kommt hierbei Alles auf das Zeichen des Ausdrucks an, aus dem die Quadrat-Wurzel gezogen werden mufs, und also zunächst auf das Zeichen des Nenners

$$\varkappa^2+2\alpha\varkappa+\beta,$$

dessen Werth sich ändert, wie wir die Richtung der geraden Linie, die durch $\varkappa$ bestimmt wird, sich ändern lassen. Nach einem, aus der Theorie der quadratischen Gleichungen bekanntem, Satze bleibt dieser Ausdruck, wie wir auch $\varkappa$ annehmen mögen, immer positiv und kann auch nicht Null werden, wenn die Factoren vom ersten Grade, in die sich derselbe zerlegen läfst, imaginär sind. In seine Factoren zerlegt, nimmt aber dieser Ausdruck folgende Form an:

$$(\varkappa+\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta})(\varkappa+\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta}),$$

und die Imaginarität der Factoren wird durch die Bedingung:

$$\alpha^2-\beta < 0$$

angezeigt. In diesem Falle entscheidet also blofs das Zeichen des Zählers über die Realität von x. Ist ε' positiv, also:

$$(\delta-\alpha\gamma)^2+(\alpha^2-\beta)(\varepsilon-\gamma^2) < 0,$$

so begegnet keine einzige gerade Linie, die durch den neuen Anfangs-Punct der Coordinaten geht, der Curve; diese Curve ist also imaginär. Ist ε' negativ, also

$$(\delta-\alpha\gamma)^2+(\alpha^2-\beta)(\varepsilon-\gamma^2) > 0,$$

so begegnet jeder Durchmesser der Curve, welche Richtung er auch haben mag, und zwar immer, da der Nenner des Werthes von x nicht Null werden kann, in einer endlichen Entfernung. Die auf diesen Fall sich beziehende Curve ist also eine nach allen Seiten hin begränzte, in einem endlichen Raume enthaltene, und heifst Ellipse.

233. Dem andern Falle, dafs die Factoren des quadratischen Ausdrucks:

$$\varkappa^2+2\alpha\varkappa+\beta$$

reell sind, entspricht die Bedingung:

$$\alpha^2-\beta > 0.$$

Bei dieser Voraussetzung gibt es für $\varkappa$ zwei Werthe, nemlich

$$-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta}, \quad -\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta},$$

von welchen jeder jenen Ausdruck auf Null reducirt, so dafs also die Abscissen und Ordinaten der bezüglichen Durchschnitte unendlich werden. Nimmt man den Werth von $\varkappa$ so an, dafs er zwischen jene beiden eben bezeichneten Werthe fällt, so wird der Nenner im Ausdrucke für x negativ; nimmt man hingegen $\varkappa$ entweder kleiner als jene beiden Werthe, oder gröfser als beide, so wird derselbe positiv. Bei der ersten Annahme gibt es reelle Durchschnitte, wenn ε' positiv, bei der zweiten Annahme, wenn ε' negativ ist.

Wir sehen hieraus dafs es zwei gerade Linien gibt, deren Gleichungen, auf den neuen Anfangs-Punct bezogen, in folgender enthalten sind:

$$y+(\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\beta})\,x=0,$$

welche den Uebergang von denjenigen Durchmessern, die der Curve begegnen, zu denjenigen, die ihr nicht begegnen, anzeigen. Dieser Uebergang geschieht, indem die Abstände der Durchschnitte durchs Unendliche gehen. Die so bestimmten beiden geraden Linien heifsen Asymptoten. Aus dem eben Bemerkten ist ferner ersichtlich, dafs für den in Rede stehenden Fall, dafs nemlich:

$$\alpha^2-\beta>0$$

die Curve immer möglich ist, dafs sie ganz in ein und dasselbe Paar der am Durchschnitte der Asymptoten gebildeten Scheitel-Winkel fällt, und zwei ganz von einander abgesonderte, sich ins Unendliche erstreckende, Zweige bildet. Diese Curve heifst Hyperbel. Das Zeichen von ε' entscheidet darüber, in welchem jener beiden Paare Scheitel-Winkel die Hyperbel liegt.

234. Wir haben in den beiden letzten Nummern auf den Fall nicht Rücksicht genommen, dafs ε' verschwindet, oder, was hiermit gleich viel sagen will, dafs die beiden Gleichungen:

$$y'+\alpha x'+\gamma=0,$$

$$\alpha y'+\beta x'+\delta=0,$$

folgende dritte bedingen:

$$y'^2+2\alpha x'y'+\beta x'^2+2\gamma y'+2\delta x'+\varepsilon=0.$$

Die beiden ersten Gleichungen drücken, indem wir y' und x' als veränderliche Gröfsen ansehen, zwei Durchmesser der Curve aus; denn wir haben ja den Mittelpunct derselben eben durch den Durchschnitt dieser beiden Linien analytisch construirt. Wenn wir die letzte Gleichung allein für sich nehmen, und auch hier y' und x' als veränderlich betrachten, so geht dieselbe in die Gleichung der gegebenen Curve selbst über, was leicht *a priori* ersichtlich ist; weil, wenn wir den Anfangs-Punct der Coordinaten auf der Curve selbst nehmen, y und x zu gleicher Zeit verschwinden, und also das von y und x unabhängige Glied in der umgeformten Gleichung fehlen mufs. Aus der Gleichung jeder reellen Curve können wir das constante Glied fortschaffen und, umgekehrt, wenn das constante Glied fehlt oder durch Coordinaten-Verwandlung sich wegbringen läfst, so ist die Curve reell. Diefs findet jedesmal Statt, wenn obige drei Gleichungen zugleich Statt finden sollen, oder wenn mit andern Worten der Mittelpunct der Curve auf der Curve selbst liegt; denn vermittelst der beiden ersten Gleichungen reducirt sich die dritte auf folgende lineare Gleichung:

$$\gamma y'+\delta x'+\varepsilon=0,$$

die in Verbindung mit jenen beiden ersten Gleichungen die Bedingungs-Gleichung:

$$(\delta-\alpha\gamma)^2+(\alpha^2-\beta)(\varepsilon-\gamma^2)=0,$$

gibt, welche auf die Fälle, die wir eben betrachten wollen, sich bezieht. In diesen Fällen verschwinden also aus der gegebenen Gleichung durch Verlegung des Anfangs-Punctes der Coordinaten in den Punct (y', x') die drei letzten Glieder und es bleibt blofs:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2=0. \qquad (1)$$

Diese Gleichung läfst sich folgender Gestalt in ihre beiden Factoren vom ersten Grade zerlegen:

$$(y+(\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta})x)(y+(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta})x)=0, \qquad (2)$$

und drückt also ein System zweier, im neuen Anfangs-Puncte der Coordinaten, d. h.

im Mittelpuncte, sich schneidender, gerader Linien aus. Diese beiden Linien sind nur dann reell und von einander verschieden, wenn:

$$\alpha^2-\beta > 0.$$

Ihre Gleichungen erscheinen hingegen unter imaginärer Form, wenn

$$\alpha^2-\beta < 0,$$

geben alsdann aber, ganz den Bemerkungen im Anfange dieser Nummer gemäfs, einen reellen Punct, denn, wenn wir in der Gleichung (2) x gleich Null setzen, so wird y ebenfalls gleich Null, und wir erhalten also den neuen Anfangs-Punct. (Dieser Punct spielt die Rolle des Mittelpunctes, der immer als reell zu betrachten ist, auch dann, wenn die Curve selbst imaginär wird.) Dafs im zuletzt betrachteten Falle die Gleichung (1) einen Punct darstellt, erhellet sogleich, wenn wir ihr folgende Form geben:

$$(y-\alpha x)^2+(\beta-\alpha^2)x^2 = 0,$$

welche Gleichung nur dann befriedigt wird, wenn

$$x^2 = 0 \quad \text{und} \quad (y-\alpha x)^2 = 0,$$

mithin nur wenn x, und demnach auch y, Null sind.

Für den Fall, auf den wir noch zurückkommen werden, dafs

$$\alpha^2-\beta = 0,$$

fallen die beiden geraden Linien in eine einzige zusammen.

235. Es bleiben uns jetzt nur noch diejenigen Fälle zu betrachten übrig, in welchen

$$\alpha^2-\beta = 0,$$

wohin zunächst derjenige gehört, wo der Mittelpunct unendlich weit liegt, d. h. wo die beiden geraden Linien, durch deren Durchschnitt wir denselben construiren, nemlich die Durchmesser:

$$y+\alpha x+\gamma = 0,$$
$$\alpha y+\beta x+\delta = 0,$$

parallel sind. In diesem Falle können aus der allgemeinen Gleichung die mit y und x behafteten Glieder, beide zugleich nicht mehr verschwinden, wir können aber ein beliebiges derselben, zugleich mit dem constanten Gliede, fortschaffen.

Um überhaupt aus der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades das constante Glied zugleich mit demjenigen, in welchem die erste Potenz einer der Veränderlichen, für welche wir hier y nehmen wollen, fortzuschaffen, müssen wir y' und x' vermittelst der beiden Gleichungen:

$$y'^2+2\alpha x'y'+\beta x'^2+2\gamma y'+2\delta x'+\varepsilon = 0, \qquad (1)$$
$$y'+\alpha x'+\gamma = 0, \qquad (2)$$

bestimmen. Betrachten wir diese Gleichungen als geometrische Oerter, so mufs, damit die Elimination wirklich Statt finden können, da der zweite derselben, der Durchmesser, immer reell ist, auch der erste, nemlich die gegebene Curve, immer seyn, und überdiefs mufs jener Durchmesser der Curve wirklich begegnen. Die Bedingungen, dafs beides Statt finde, ergeben sich aus der Verbindung jener beiden Gleichungen. Multipliciren wir zu diesem Ende die Gleichung (2) mit 2y' und ziehen alsdann dieselbe von (1) ab, so kommt:

$$-y'^2+\beta x'^2+2\delta x'+\varepsilon = 0,$$

und wenn wir in diese Gleichung den aus (2) gezogenen Werth für y' substituiren und ordnen, so kommt:

$$(\beta-\alpha^2)x'^2+2(\delta-\alpha\gamma)x'+(\varepsilon-\gamma^2) = 0. \qquad (3)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich sogleich die Bedingung für die Möglichkeit der Umformung der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades in eine Gleichung von folgender Form:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta'x = 0, \qquad (4)$$

wenn wir, der Kürze wegen:

$$\alpha y'+\beta x'+\delta = \delta' \qquad (5)$$

setzen. Wir erhalten im Allgemeinen aus der Gleichung (3) zwei verschiedene Werthe für x', denen eine zwiefache Weise jener Umformung entspricht. Diese ist immer, aber nur auf eine einzige Weise möglich, wenn die Gleichung (3) sich auf den ersten Grad reducirt, wenn nemlich:

$$\alpha^2-\beta = 0.$$

In diesem Falle können wir der umgeformten Gleichung (4) auch noch folgende Form geben:

$$(y+\alpha x)^2+2\delta' x = 0, \qquad (6)$$

und der Ausdruck, den wir nach allen Reductionen für δ' erhalten, ist:

$$\delta' = \delta-\alpha\gamma.$$

Wenn wir in der Gleichung (6) x gleich Null setzen, d. h. die beiden Durchschnitte der Curve mit der zweiten Axe suchen, so kommt auch y^2 gleich Null, es fallen also jene Durchschnitte im Anfangs-Puncte der Coordinaten zusammen: die Curve wird in diesem Puncte von der zweiten Axe berührt. Weil das erste Glied der besagten Gleichung ein vollständiges Quadrat, mithin nothwendig positiv ist, so muſs, um fernere reelle Werthe für y zu erhalten, das Zeichen von x in Beziehung auf das Zeichen von δ' entgegengesetzt genommen werden. Es gibt also Puncte der Curve immer nur nach einer Seite der x hin, nach der positiven oder negativen, je nachdem δ', umgekehrt, negativ oder positiv ist, d. h. je nachdem:

$$\delta-\alpha\gamma < 0, \qquad \text{oder} \qquad \delta-\alpha\gamma > 0.$$

Bei dieser Beschränkung kann der Werth von x jeder beliebige seyn: die Curve erstreckt sich nach der einen Seite hin ins Unendliche. Diese Curve heiſst **Parabel**.

Den Fall, daſs

$$\delta-\alpha\gamma = 0,$$

umfaſst die folgende Nummer.

236. Es können zuletzt noch die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y'+\alpha x'+\gamma &= 0, \\ \alpha y'+\beta x'+\delta &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

identisch seyn, und also die Durchmesser, welche sie bedeuten, indem wir y' und x' als veränderlich betrachten, in eine einzige gerade Linie zusammenfallen. Alsdann lassen sich aus der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades auf unendlich viele Weisen, die mit den ersten Potenzen von y und x behafteten Glieder fortschaffen: die Curve hat unendlich viele Mittelpuncte, deren geometrischer Ort jene beiden zusammenfallenden Durchmesser sind. Für die, diesem Falle entsprechenden, Bedingungs-Gleichungen erhalten wir sogleich aus obigen Gleichungen (1):

$$\alpha^2-\beta = 0, \qquad \alpha\gamma-\delta = 0.$$

Der Gleichung, die sich bei der angezeigten Umformung ergibt, können wir, mit Berücksichtigung der ersten dieser Bedingungs-Gleichungen, folgende Form geben:

$$(y-\alpha x)^2+\varepsilon' = 0,$$

woraus wir denn sogleich ersehen, daſs die bezügliche Linie zweiter Ordnung **ein System zweier Parallelen** ist. Für ε' erhalten wir, wie in der 230. Nummer folgenden Ausdruck:

$$\varepsilon' = \gamma y'+\delta x'+\varepsilon;$$

substituiren wir in denselben den Werth für y', den wir aus einer der beiden Gleichungen

(1) ziehen, so fällt nach der zweiten Bedingungs-Gleichung x' von selbst aus, und es bleibt bloſs:

$$\varepsilon' = \varepsilon - \gamma^2.$$

Je nachdem also dieser Ausdruck negativ, Null oder positiv ist, sind jene beiden Parallelen reell und verschieden, fallen zusammen oder werden imaginär.

§. 2.

Veränderung der Richtung der Coordinaten-Axen. Beziehung der constanten Gröſsen ein und derselben Curve zu einander für verschiedene Systeme.

237. Sey wiederum:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0 \qquad (1)$$

die allgemeine Gleichung der Linien zweiter Ordnung, bezogen auf irgend ein beliebiges Axen-System. Wir wollen den Coordinaten Winkel ϑ nennen. Um dieselbe Curve auf ein anderes, ebenfalls beliebiges, Coordinaten-System, dessen Anfangs-Punct derselbe ist, zu beziehen, brauchen wir nur, nach der 90. Nummer:

$$\frac{y\,\sin\varphi'+x\,\sin\varphi}{\sin\vartheta} \text{ und } -\frac{y\,\sin\psi'+x\,\sin\psi}{\sin\vartheta},$$

an die Stelle von y und x in obige Gleichung zu setzen; wobei wir durch φ und φ' diejenigen Winkel bezeichnen, welche die erste und zweite der neuen Axen mit der ersten ursprünglichen, und durch ψ und ψ' diejenigen Winkel, welche dieselben erstgenannten Axen mit der zweiten ursprünglichen bilden. Durch diese Substitutionen erhalten wir, wenn wir ordnen:

$$\begin{aligned}&\frac{\sin^2\varphi'-2\alpha\sin\varphi'\sin\psi'+\beta\sin^2\psi'}{\sin^2\vartheta}\cdot y^2\\ &+2\,\frac{\sin\varphi'\sin\varphi-\alpha(\sin\varphi'\sin\psi+\sin\varphi\sin\psi')+\beta\sin\psi\sin\psi'}{\sin^2\vartheta}\cdot xy\\ &+2\,\frac{\sin^2\varphi-2\alpha\sin\varphi\sin\psi+\beta\sin^2\psi}{\sin^2\vartheta}\cdot x^2\\ &+2\,\frac{\gamma\sin\varphi'-\delta\sin\psi'}{\sin\vartheta}\,y+2\,\frac{\gamma\sin\varphi-\delta\sin\psi}{\sin\vartheta}\cdot x+\varepsilon=0. \qquad (2)\end{aligned}$$

Wir wollen die verschiedenen Formen, welche die auf diese Weise umgeformte Gleichung, bei einer schicklichen Bestimmung der Richtung der beiden neuen Axen, annehmen kann, umständlicher erörtern. Diese Discussion scheint auf den ersten Blick nicht ganz einfach zu seyn; sie wird es aber, indem wir auf folgende Art dieselbe angreifen.

Seyen

$$y = ax, \qquad y = a'x \qquad (3)$$

die Gleichungen der ersten und zweiten neuen Coordinaten-Axe, bezogen auf das ursprüngliche System, alsdann ist, nach obiger Bezeichnung:

$$a = \frac{\sin\varphi}{\sin(\vartheta-\varphi)}, \qquad a' = \frac{\sin\varphi'}{\sin(\vartheta-\varphi')},$$

welche Ausdrücke, vermittelst der Gleichung:

$$\vartheta = \varphi - \psi = \varphi' - \psi',$$

in folgende übergehen:

$$a = -\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}, \quad a' = -\frac{\sin\varphi'}{\sin\psi'}.$$

Hiernach können wir nun die Gleichung (2) folgender Gestalt schreiben:

$$\frac{\sin^2\psi'}{\sin^2\vartheta}(a'^2+2\alpha a'+\beta).\,y^2$$
$$+2\frac{\sin\psi\sin\psi'}{\sin^2\vartheta}(aa'+\alpha(a+a')+\beta).\,xy$$
$$+\frac{\sin^2\psi}{\sin^2\vartheta}(a^2+2\alpha a+\beta).\,x^2$$
$$-2\frac{\sin\psi'}{\sin\vartheta}(a'\gamma+\delta)y-2\frac{\sin\psi}{\sin\vartheta}(a\gamma+\delta).\,x+\varepsilon=0. \quad (4)$$

238. Betrachten wir zuerst den Coefficienten von y^2 und x^2, nemlich:

$$\frac{\sin^2\psi'}{\sin^2\vartheta}(a'^2+2\alpha a'+\beta),$$
$$\frac{\sin^2\psi}{\sin^2\vartheta}(a^2+2\alpha a+\beta),$$

so hat offenber eine einzige Gleichung vom zweiten Grade, deren Form folgende ist:

$$z^2+2\alpha z+\beta = 0, \quad (5)$$

diejenigen Werthe von a und a' zu Wurzeln, für welche jene beiden Coefficienten verschwinden. Nur in dem Falle, dafs die Wurzeln dieser Gleichung reell und verschieden sind, das heifst, wenn:

$$\alpha^2-\beta > 0,$$

lassen sich aus der gegebenen Gleichung (1) die mit y^2 und x^2 behafteten Glieder durch Coordinaten-Verwandlung fortschaffen, so dafs dieselbe folgende Form annimmt:

$$xy+2\gamma'y+2\delta'x+\varepsilon' = 0. \quad (6)$$

Eine solche Umformung kann, im Falle imaginärer Wurzeln, gar nicht Statt finden, und auch im Falle gleicher Wurzeln, wird die umgeformte Gleichung illusorisch, denn, dafs a gleich a' wird, heifst, dafs die neuen Coordinaten-Axen in eine einzige zusammenfallen.

Da die Werthe von a und a' Wurzeln ein und derselben quadratischen Gleichung sind, so ist, wenn eines der beiden mit y^2 und x^2 behafteten Glieder verschwinden kann, dadurch zugleich auch die Möglichkeit für das Verschwinden des andern gegeben. Diefs ist auch *a priori* daraus ersichtlich, dafs wir beliebig die beiden Axen mit einander vertauschen können; und eben hierin finden wir den Grund, warum die beiden Werthe von a und a' Wurzeln ein und derselben Gleichung seyn müssen.

239. Durch Verlegung des Anfangs-Punctes der Coordinaten in den Mittelpunct der Curve, die, weil der Ausdruck $(\alpha^2-\beta)$ einen positiven Werth hat, für unsern Fall eine Hyperbel ist, nimmt die Gleichung (6) folgende Form an:

$$xy+\varepsilon'' = 0, \quad (7)$$

wo wir durch ε'' eine neue Constante bezeichnen. Aus dieser Gleichung springt der asymptotische Character der Hyperbel sogleich in die Augen; denn, je gröfser wir y nehmen, desto kleiner wird x, und desto mehr nähert sich die Curve der zweiten Axe; je gröfser wir x nehmen, desto mehr nähert sie sich der ersten Axe. Die Gleichung (9) ist die Gleichung einer, auf ihre Asymptoten bezogenen, Hyperbel. Je nachdem ε''

negativ oder positiv wird, liegen die beiden Hyperbel-Zweige in dem ersten und dritten, oder in dem zweiten und vierten Coordinaten-Winkel. Die Gleichung (6) ist die Gleichung einer Hyperbel, deren Asymtoten den Coordinaten-Axen parallel sind.

Wenn wir nur für einen der beiden Ausdrücke a und a' eine Wurzel der Gleichung (5) nehmen, während wir den andern beliebig bestimmen, so verschwindet nur x^2 oder y^2 aus der umgeformten Gleichung (4): nur eine der neuen Coordinaten-Axen ist einer der Asymptoten parallel. Wenn schon in der ursprünglichen Gleichung β Null ist, so reducirt sich die Gleichung (5) auf den ersten Grad, oder mit andern Worten, eine ihrer Wurzeln ist gleich Null, d. h. eine der neuen Axen, und mithin eine der beiden Asymptoten, muſs der ersten der urspünglichen Axen parallel seyn. Nehmen wir in der so bezeichneten Gleichung:

$$y^2+2\alpha xy+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

für y irgend einen constanten Werth, so erhalten wir nur einen einzigen entsprechenden Werth für x, d. h. jede der ersten Axe, oder einer der beiden Asymptoten, parallel gezogene gerade Linie schneidet die Curve nur in einem einzigen Puncte. Für den in Rede stehenden Fall sind die Gleichungen (3) der neuen, den Asymptoten parallelen, Axen folgende:

$$y = 0, \quad y = a'x.$$

240. Der Winkel, welchen die beiden Asymptoten einschlieſsen, der Asymptoten-Winkel, ist demjenigen Winkel, welchen die neuen Axen, deren Gleichungen im Allgemeinen folgende sind:

$$y = ax, \quad y = a'x,$$

mit einander bilden, gleich. Bezeichnen wir daher diesen Winkel durch η, so gibt die 17. Nummer:

$$tang\ \eta = \frac{(a'-a)\sin\vartheta}{1+(a+a')\cos\vartheta+aa'}.$$

Wir erhalten aber, nach der Gleichung (5), deren Wurzeln a und a' sind folgende Ausdrücke:

$$a+a' = -2\alpha, \quad aa' = \beta,$$

und hiernach:

$$a'-a = \pm 2\sqrt{\alpha^2-\beta},$$

$$tang\ \eta = \frac{\pm 2\sqrt{\alpha^2-\beta}.\ \sin\vartheta}{1-2\alpha\cos\vartheta+\beta}. \qquad (8)$$

Wenn das ursprüngliche Coordinaten-System ein rechtwinkliges, also $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ist, so erhalten wir:

$$tang\ \eta = \frac{\pm 2\sqrt{\alpha^2-\beta}}{1\pm\beta}. \qquad (9)$$

241. Wenn der Asymptoten-Winkel ein rechter ist, so heiſst die Hyperbel eine gleichseitige. Alsdann ist, für beliebige Coordinaten:

$$1-2\alpha\cos\vartheta+\beta = 0,$$

und für den besondern Fall eines rechtwinkligen Systems:

$$\beta = -1.$$

Hiernach erkennen wir also in der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades sogleich den Fall wieder, wo dieselbe eine gleichseitige Hyperbel darstellt. Bei der Annahme rechtwinkliger Coordinaten müssen die Coefficienten von y^2 und x^2 gleich seyn, aber mit entgegengesetztem Zeichen vorkommen.

Die Gleichung:

$$xy+2\gamma'y+2\delta'x+\varepsilon' = 0$$

ist nach der 239. Nummer die Gleichung einer Hyperbel, bezogen auf Coordinaten-Axen, die den Asymptoten derselben parallel sind. Hätten wir statt der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades (1) diejenige Gleichung betrachtet, die wir erhalten, indem wir blofs die drei ersten Glieder derselben nehmen, und gleich Null setzen, mithin folgende Gleichung:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2=0, \qquad (11)$$

so hätte diese bei derselben Coordinaten-Umformung folgende Form:

$$xy = 0,$$

angenommen, und bedeutet also das System der neuen Axen, die den Asymptoten parallel sind. Jene Gleichung (11) stellt also, auf die ursprünglichen Axen bezogen, ein System zweier geraden Linien dar, die den Asymptoten der Curve parallel sind und durch den Anfangs-Punct der Coordinaten gehen. Diefs ist in Uebereinstimmung mit den Entwicklungen der 233. Nummer.

Wir erhalten hiernach für das Asymptoten-System selbst folgende Gleichung:

$$(y-y')^2+2\alpha(y-y')(x-x')+\beta(x-x')^2 = 0, \qquad (12)$$

wenn wir, wie in dem Frühern, den Mittelpunct der Curve durch (y', x') bezeichnen. Setzen wir an die Stelle von y' und x' die in der 229. Nummer entwickelten Werthe:

$$y' = \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\alpha^2-\beta}, \qquad x' = \frac{\delta-\alpha\gamma}{\alpha^2-\beta},$$

so kommt nach allen Reductionen:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\lambda = 0, \qquad (13)$$

wenn wir, der Kürze halber:

$$-\frac{\delta^2-2\alpha\delta\gamma+\beta\gamma^2}{\alpha^2-\beta} = \lambda \qquad (14)$$

schreiben. Die so erhaltene Gleichung (13), *die das System der beiden Asymptoten ausdrückt*, ist durchaus unabhängig von ε, dem constanten Gliede in der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades. Alle verschiedenen Curven also, welche diese Gleichung:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

darstellt, indem wir ε nach einander alle möglichen Werthe geben; α, β, γ und δ aber als ein für alle Mal bestimmt ansehen, *haben dieselben Asymptoten*. Nehmen wir ε gleich λ, so erhalten wir die Asymptoten selbst, und durch diese Bestimmung von ε ist der Uebergang von denjenigen Hyperbeln, welche in einem Paare der von den Asymptoten gebildeten Scheitel-Winkel liegen zu denjenigen, welche von dem andern Paare dieser Scheitel-Winkel eingeschlossen werden, bezeichnet. Stimmen die Gleichungen mehrerer Hyperbeln nur in den drei ersten Gliedern überein, *so sind ihre Asymptoten blofs parallel*.

Für den Fall der Ellipse reduciren sich die Asymptoten auf einen Punct, den Mittelpunct der Curve, für den Fall der Parabel sind die beiden Asymptoten parallel, liegen aber unendlich weit entfernt. Die Richtung derselben ist zugleich die Richtung der beiden, leicht aus der allgemeinen Gleichung zu bestimmenden, Durchmesser:

$$\gamma+\alpha x+y = 0 \qquad y+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\delta}{\alpha}=0$$

und demnach aller andern, da, wie wir sogleich noch bestimmter zeigen werden, alle Durchmesser der Parabel unter einander parallel sind. Diese Folgerungen, die unmittelbar aus der Gleichung (12) sich ergeben, und überhaupt alle ähnlichen Betrachtungen sind nur in sofern von Bedeutung, als sie Eigenschaften der verschiedenen einzelnen Li-

nien zweiter Ordnung in Verbindung bringen. So ergibt sich zum Beispiel aus der zweiten der eben gemachten Bemerkungen folgende Analogie zwischen Hyperbel und Parabel. Alle Eigenschaften der erstern Curve, welche sich auf Linien, die einer der Asymptoten parallel sind, beziehen und welche eine Folge von eben diesem Parallelismus sind, lassen sich auch unmittelbar auf die Parabel übertragen, indem wir einen Durchmesser derselben, an die Stelle jener Linie setzen, die, für den Fall der Hyperbel, einer der beiden Asymptoten parallel ist. *)

242. Wir gehen weiter. Wenn aus der umgeformten allgemeinen Gleichung des weiten Grades das mit xy behaftete Glied verschwinden soll, so müssen wir, was aus der 4. Gleichung der 237. Nummer erhellet, die Richtung der beiden neuen Axen vermittelst folgender Gleichung:

$$aa' + \alpha(a+a') + \beta = o, \qquad (15)$$

bestimmen. Was für Constante in der allgemeinen, ursprünglich gegebenen, Gleichung des zweiten Grades auch vorkommen mögen, diese Gleichung kann immer auf unendlichmalig verschiedene Weise befriedigt werden, und zwar so, dafs wir die Richtung einer der beiden neuen Axen beliebig annehmen, und alsdann die Richtung der andern vermittelst der letzten Gleichung bestimmen können. Betrachten wir nun die zweite der neuen Axen, mithin a', als gegeben, so erhalten wir, nach der letzten Gleichung für a folgenden Ausdruck:

$$a = -\frac{\beta+\alpha a'}{\alpha+a'}, \qquad (16)$$

und indem wir demgemäfs die Richtung der ersten Axe nehmen, nimmt die umgeformte allgemeine Gleichung folgende Form an:

$$y^2+\beta' x^2+2\gamma' y+2\delta' x+\varepsilon' = o. \qquad (17)$$

Für den Coefficienten von x^2 haben wir, nach (4), allgemein folgenden Ausdruck:

$$\beta' = \frac{\sin^2\psi}{\sin^2\psi'} \cdot \frac{a^2+2\alpha a+\beta}{a'^2+2\alpha a'+\beta},$$

und wenn wir für a seinen Werth in a' substituiren, so kommt nach einer leichten Reduction:

$$\beta' = -\frac{\sin^2\psi}{\sin^2\psi'} \cdot \frac{\alpha^2+\beta}{(\alpha+a')^2}. \qquad (18)$$

Diese Gleichung zeigt, wie das Zeichen von β' einzig vom Zeichen des Ausdruckes $(\alpha^2-\beta)$ abhängt, und dafs, wenn dieser Ausdruck Null ist, auch β' verschwindet. In diesem Falle fällt also, durch die Fortschaffung des zweiten Gliedes aus der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades, das mit dem Quadrate von x behaftete Glied von selbst aus, so dafs diese Gleichung folgende Form annimmt:

$$y^2+2\gamma' y+2\delta' x+\varepsilon' = o. \qquad (19)$$

*) Dieselbe Analogie zwischen Hyperbel und Parabel stellt sich auch dar, indem wir in dem Sinne der alten Geometer verfahren und wie Hamilton (Lehre von den Kegel-Schnitten, übersetzt von J. G. Feldhoff, mit einer Vorrede von C. D. von Münchow. Coblenz, 1825.) von der Kegel-Fläche ausgehen. Die Asymptoten der Hyperbel sind nemlich, so wie die Durchmesser der Parabel, Seiten des Kegels, aus dem diese Curven geschnitten werden können, parallel. Ein Beleg für das im Texte Ausgesprochene ist zum Beispiel der 55. Satz des 1. Buches der eben angezogenen Schrift.

Durch Verlegung des Anfangs-Punctes der Coordinaten können wir endlich noch der Gleichung (17) folgende:

$$y^2+\beta''x^2+\varepsilon''=0, \qquad (20)$$

und der Gleichung (19) folgende Gestalt geben:

$$y^2+2\delta''x=0. \qquad (21)$$

243. Da in der Gleichung (20) nur die Quadrate der veränderlichen Gröfsen vorkommen, so entsprechen einem beliebigen Werthe jeder derselben zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe der andern; d. h. geometrisch gedeutet, jede von der Curve begränzte gerade Linie, die einer der Coordinaten-Axen parallel ist, wird von der andern halbirt Man sagt in diesem Falle, die Gleichung der Curve sey auf conjugirte oder zugeordnete Durchmesser bezogen. Ueberhaupt sind, wenn das mit xy behaftete Glied in der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades fehlt, die Coordinaten-Axen irgend zweien zugeordneten Durchmessern parallel. Es gibt unendlich viele Systeme zugeordneter Durchmesser; jedem beliebigen Durchmesser entspricht ein conjugirter. Legen wir in den Puncten, in welchen irgend ein Durchmesser die Curve schneidet, zwei gerade Linien dem conjugirten desselben parallel, so berühren diese geraden Linien die Curve: die beiden Durchschnitte fallen, bevor sie imaginär werden, in einen einzigen Punct zusammen. Setzen wir nach einander y und x in (20) gleich Null, so erhalten wir die halben zugeordneten Durchmesser, die wir uns immer, wenn von ihrer Gröfse die Rede ist, von der Curve begränzt denken. Bezeichnen wir diese halben Durchmesser durch A und B, so ist:

$$B^2=-\varepsilon'', \qquad \beta''A^2=-\varepsilon''$$

mithin:

$$\beta''=\frac{B^2}{A^2},$$

und hiernach geht die Gleichung (20) in folgende über:

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2.$$

Für den Fall der Hyberbel, wo β'' negativ ist, wird immer, entweder der Werth für A, oder der Werth für B, imaginär, d. h. von zweien zugeordneten Durchmessern begegnet immer nur einer der Curve. Vertauschen wir in diesem Falle A mit $A\sqrt{-1}$ oder B mit $\sqrt{-1}$, je nachdem der eine oder der andere dieser Ausdrücke imaginär wird, so geht die letzte Gleichung in folgende über:

$$A^2y^2-B^2x^2=\pm A^2B^2.$$

Das positive und negative Zeichen des zweiten Theiles dieser Gleichung bezieht sich darauf, ob der zweite oder erste Durchmesser d. h. derjenige, der in die zweite oder erste Axe fällt, der Curve wirklich begegnet. Für die Gröfse des, die Curve nicht schneidenden, Durchmessers, nehmen wir, wie's der Gebrauch ist, stets den reellen Werth, so dafs, wenn wir uns auf die letzte Gleichung beziehen, durch A und B die beiden halben zugeordneten Durchmesser der Hyperbel gegeben sind.

Den eben hergeleiteten Gleichungen für Ellipse und Hyperbel können wir auch folgende, für manche Entwicklungen bequemere, Form geben:

$$\frac{y^2}{B^2}+\frac{x^2}{A^2}=1, \qquad \frac{y^2}{B^2}-\frac{x^2}{A^2}=\pm 1.$$

Indem wir endlich noch x mit $(x\pm A)$ in diesen Gleichungen vertauschen, verlegen wir wir den Anfangs-Punct der Coordinaten aus dem Mittelpuncte in einen der beiden Schei-

tel des ersten Durchmessers, d. h. in einen derjenigen beiden Puncte, in welchen derselbe der Curve begegnet. Auf diese Weise kommt:

$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2 \pm 2Ax}{A^2} = 0, \qquad \frac{y^2}{B^2} - \frac{x^2 \pm 2Ax}{A^2} = 0.$$

Für den Fall der Hyperbel setzen wir hier voraus, daſs der erste Durchmesser derselben begegnet. Dem positiven und negativen Zeichen in jeder Gleichung entspricht, daſs der erste Durchmesser einmal in die negative, das andere Mal in die positive Seite der Axe der x fällt. Die zweite Axe berührt die Curve.

Wenn wir in der Gleichung (21), die eine Parabel darstellt, $-p$ statt δ'' schreiben, so wird dieselbe folgende:

$$y^2 = 2px,$$

unter welcher Form wir uns derselben vorzugsweise bedienen werden. Jede gerade Linie, welche der Abscissen-Axe parallel gezogen wird, begegnet der Curve nur in einem einzigen Puncte; jede gerade Linie ferner, welche der Ordinaten-Axe parallel ist, und also die Curve in zwei Puncten schneidet, wird von der ersten Axe halbirt. Setzen wir $x = 0$, so kommt $y = \pm 0$, d. h. die Curve wird von der zweiten Axe in demjenigen Puncte berührt, in welchem sie von der ersten Axe, die ein Durchmesser derselben ist, geschnitten wird: die Gleichung der Parabel ist auf einen ihrer Durchmesser und die Tangente im Scheitel desselben bezogen. $2p$ heiſst der Parameter des Durchmessers. Den zweiten, conjugirten, Durchmesser können wir uns als unendlich weit entfernt denken, jedoch so daſs die Richtung desselben durch obige Tangente bestimmt ist.

244. Wenn die Richtung irgend eines Durchmessers gegeben ist, so können wir den conjugirten Durchmesser leicht bestimmen. Nach der Gleichung (16) erhalten wir nemlich, wenn die Richtung des erstern durch die Gleichung:

$$y = a'x$$

gegeben ist, und wir zugleich den Mittelpunct der Curve durch (y', x') bezeichnen,

$$y - y' + \frac{\beta + \alpha a'}{\alpha + a'}(x - x') = 0:$$

für die Gleichung des gesuchten Durchmessers. Substituiren wir in diese Gleichung die bekannten Werthe für y' und x':

$$y' = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\alpha^2 - \beta}, \qquad x' = \frac{\delta - \alpha\gamma}{\alpha^2 - \beta},$$

so kommt, wenn wir reduciren:

$$(\alpha + a')y + (\beta + \alpha a')x + (\delta + \gamma a') = 0.*) \qquad (1)$$

*) Zu einer entsprechenden Gleichung gelangt Herr Gergonne auf andere Art, indem er zwischen der allgemeinen Gleichung der Linie zweiter Ordnung und der linearen Gleichung:

$$y = mx + g, \qquad (a)$$

y eliminirt; in der resultirenden quadratischen Gleichung gibt der Coefficient der ersten Potenz von x sogleich die Abscisse für die Mitte der interceptirten Chorde, wonach denn durch die Gleichung (a) die Ordinate leicht bestimmt wird. In dem Ausdrucke für Abscisse und Ordinate kommt g vor, durch Elimination von g zwischen beiden Ausdrücken, erhalten wir eine lineare Beziehung zwischen den Coordinaten der Mitte jener Chorde, und indem wir dieselben als veränderliche Gröſsen betrachten, die Gleichung desjenigen Durchmessers der alle

Für den Fall der Parabel, wo $\alpha^2 = \beta$, haben wir:

$$a = -\frac{\beta + \alpha a'}{\alpha + a'} = -\alpha,$$

wie wir auch a′ annehmen mögen: wir erhalten für a immer denselben Werth: alle Durchmesser der Parabel sind unter einander parallel.

Im Allgemeinen haben wir:

$$a = -\frac{\beta + \alpha a'}{\alpha + a'} = -\alpha + \frac{\alpha^2 - \beta}{\alpha + a'},$$

mithin ergibt sich:

$$(a+\alpha)(a'+\alpha) = \alpha^2 - \beta, \qquad (2)$$

wobei wir noch, zum Behuf der geometrischen Interpretation des ersten Theiles dieser Gleichung, bemerken können, daſs durch α die Richtung desjenigen Durchmessers gegeben ist, der alle der zweiten Axe parallele Chorden halbirt.

245. Zwei zugeordnete Durchmesser einer Linie zweiter Ordnung, die auf einander senkrecht stehen, heiſsen die Axen derselben. Zur Bestimmung ihrer Richtung aus der allgemeinen Gleichung müssen wir die Gleichung:

$$aa' + \alpha(a+a') + \beta = 0, \qquad (3)$$

mit der Gleichung:

$$aa' + (a+a')\cos\vartheta + 1 = 0, \qquad (4)$$

in der ϑ den Coordinaten-Winkel bezeichnet, verbinden. Da diese beiden Gleichungen in Beziehung auf a und a′ symmetrisch sind, so muſs die quadratische Gleichung, zu welcher wir durch Elimination des einen Werthes gelangen, beide Werthe zugleich zu Wurzeln haben. Eliminiren wir a′, so kommt:

$$a^2 + \frac{\beta - 1}{\alpha - \cos\vartheta}\,a - \frac{\alpha - \beta\cos\vartheta}{\alpha - \cos\vartheta} = 0, \qquad (5)$$

für die in Rede stehende quadratische Gleichung.

Wenn $\beta = 1$, so reducirt diese Gleichung sich auf

$$a^2 - 1 = 0,$$

mithin sind die Axen durch Gleichungen von folgenden Formen:

$$y = x + q, \qquad y = -x + q',$$

gegeben, und jede derselben schneidet also die beiden Coordinaten-Axen unter gleichen Winkeln. Wenn daher in der allgemeinen, auf ein beliebiges System bezogene, Gleichung des zweiten Grades β gleich Eins ist, so bilden die Coordinaten-Axen mit jeder Axe der Curve gleiche Winkel und umgekehrt, wenn die Coordinaten-Axen so genommen werden, daſs sie mit einer der Axen der Curve gleiche Winkel bilden, so werden in der Gleichung der Curve die Coefficienten von y^2 und x^2 einander gleich.

Nach der 91. Nummer ist:

$$(y-y')^2 + 2(y-y')(x-x')\cos\vartheta + (x-x')^2 = R^2,$$

die Gleichung eines Kreises, dessen Radius R und dessen Mittelpuncts-Coordinaten y′ und x′ sind. Soll daher die allgemeine Gleichung des zweiten Grades:

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon = 0,$$

der geraden Linie (a) parallele Chorden halbirt. An diese Entwicklung knüpft Herr Gergonne die Discussion der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades.

Essai d'un nouveau mode de discusion de l'équation générale des lignes et celle des surfaces du second ordre. Par M. Gergonne. Ann. V. 61—87.

einen Kreis darstellen, so haben wir:

$$\beta = 1, \qquad \alpha = \cos \vartheta. \tag{6}$$

Substituiren wir diese Ausdrücke in (5), so verschwindet der Coefficient von a nicht mehr, sondern nimmt die unbestimmte, nicht reducirbare Form $\frac{0}{0}$ an, d. h. wir können jeden Durchmesser des Kreises zu einer der Axen nehmen. Die Gleichungen (3) und (4) sind, bei diesen Bestimmungen, identisch.

Die Gleichung (5) reducirt sich auf den ersten Grad, wenn

$$\cos \vartheta = \frac{\alpha}{\beta}; \tag{7}$$

in diesem Falle ist eine der Coordinaten-Axen einer der Axen der Linie zweiter Ordnung parallel.

Wenn wir die allgemeine Gleichung des zweiten Grades auf ein rechtwinkliches System beziehen, mithin $\cos \vartheta = 0$ setzen, so geht die Gleichung (5) in folgende über:

$$a^2 + \frac{\beta - 1}{\alpha} a - 1 = 0, \tag{8}$$

deren Wurzeln die trigonometrischen Tangenten derjenigen beiden Winkel ω und ω' geben, welche die beiden Axen der Curve mit der Axe der x bilden. Wir kommen zu einfachen Ausdrücken, wenn wir statt dieser Winkel die doppelten Winkel 2ω und $2\omega'$ einführen, weil alsdann:

$$\tang 2\omega' = \tang 2\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = \tang 2\omega.$$

Nun ist aber:

$$\tang 2\omega = \frac{2 \tang \omega}{1 - \tang^2 \omega} = \frac{2a}{1 - a^2},$$

und indem wir in diesen Ausdruck für a^2 den aus (8) gezogenen Werth:

$$a^2 = 1 - \frac{\beta - 1}{\alpha} a,$$

substituiren, fällt die erste Potenz von a ebenfalls aus, und wir erhalten:

$$\tang 2\omega = \frac{2\alpha}{\beta - 1} = \tang 2\omega'. \tag{9}$$

246. Der Winkel, welchen zwei conjugirte Durchmesser mit einander bilden sollen, sey irgend ein gegebener, den wir durch ξ bezeichnen, so dafs, wenn wir, wie vorhin, die Winkel, welche die beiden Durchmesser mit der ersten Coordinaten-Axe bilden, ω und ω' nennen, wir $\xi = (\omega' - \omega)$ erhalten. Hiernach ergibt sich:

$$\tang \omega' = \frac{\tang \omega + \tang \xi}{1 - \tang \omega \tang \xi}. \tag{10}$$

Wir wollen ferner, der gröfsern Einfachheit wegen, wiederum die Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten machen: alsdann reducirt sich die Bedingungs-Gleichung (15) der 242. Nummer auf:

$$\tang \omega \tang \omega' + \alpha(\tang \omega + \tang \omega') + \beta = 0. \tag{11}$$

Eliminiren wir aus dieser Gleichung vermittelst der vorigen $\tang \omega'$, so kommt folgende quadratische Gleichung zur Bestimmung der Werthe von ω:

$$\tang^2 \omega + \frac{2\alpha + (1-\beta) \tang \xi}{1 - \alpha \tang \xi} \tang \omega + \frac{\beta + \alpha \tang \xi}{1 - \alpha \tang \xi} = 0. \tag{12}$$

Die beiden Wurzeln dieser Gleichung sind in folgendem Ausdrucke enthalten:

$$\tang \omega = \frac{-(2\alpha + (1-\beta) \tang \xi) \pm ((1+\beta)^2 \tang^2 \xi + 4((\alpha^2 - \beta)(1 + \tang^2 \xi))^{1/2}}{2(1 - \alpha \tang \xi)}. \tag{13}$$

Diesen beiden Werthen von $tang\,\omega$ entsprechen zwei Werthe von $tang\,\omega'$, die wir unmittelbar erhalten, indem wir in dem letzten Ausdrucke das Zeichen von $tang\,\xi$ entgegengesetzt nehmen. Hiervon überzeugen wir uns auf der Stelle, wenn wir erwägen, dafs (11) in Beziehung auf $tang\,\omega$ und $tang\,\omega'$ symmetrisch ist, und

$$tang\,\omega = \frac{tang\,\omega' - tang\,\xi}{1 + tang\,\omega'\,tang\,\xi},$$

wonach wir denn in der Gleichung (12), wenn die Wurzeln derselben uns die Werthe von $tang\,\omega'$ geben sollen, nur $tang\,\xi$ mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen brauchen. Es gibt also im Allgemeinen zwei Systeme zugeordneter Durchmesser, die einen gegebenen Winkel mit einander bilden. Man findet nur ein einziges System, oder, wenn man lieber will, die beiden Systeme fallen in ein einziges zusammen, wenn:

$$(1+\beta)^2 tang^2\xi + 4(\alpha^2-\beta)(1+tang^2\xi) = 0,$$

oder wenn:

$$sin^2\xi = -\frac{4(\alpha^2-\beta)}{(1+\beta)^2}. \qquad (14)$$

Zugleich bezeichnet dieser Ausdruck das Minimum für den Winkel zugeordneter Durchmesser. Es gibt ein solches nur für den Fall der Ellipse; für den Fall der Parabel und Hyperbel können zugeordnete Durchmesser jeden beliebigen Winkel mit einander bilden; für den besondern Fall des Kreises reducirt sich der Werth von $sin^2\xi$ auf Eins, mithin gibt es nur rechtwinklige Systeme zugeordneter Durchmesser.

Die Bedingungen für die Realität der letzten Gleichung knüpfen sich blofs an das Zeichen von $(\alpha^2-\beta)$; $sin^2\xi$ kann niemals gröfser werden als die Einheit, denn:

$$(1+\beta)^2 + 4(\alpha^2-\beta) = (1-\beta)^2 + 4\alpha^2 > 0.$$

247. Wir wollen wiederum von der allgemeinen Gleichung:

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon = 0, \qquad (1)$$

bezogen auf ein rechtwinkliches Coordinaten-System ausgehen. Um die durch diese Gleichung dargestellte Curve auf neue Coordinaten-Axen zu beziehen, von denen die erste einen Winkel ω, die zweite einen Winkel ω' mit der ersten der ursprünglichen Axen bildet, so dafs mithin $(\omega'-\omega)$ Coordinaten-Winkel wird, bedienen wir uns der Formeln:

$$y = x_, sin\,\omega + y_, sin\,\omega', \qquad x = x_, cos\,\omega + y_, cos\,\omega',$$

indem wir die neuen Coordinaten durch unten angehängte Accente unterscheiden. Wir kommen auf diese Weise, wie in der 237. Nummer zu einer Gleichung von folgender Form:

$$\mu y_,^2 + 2\alpha' x_, y_,^2 + \beta' x_,^2 + 2\gamma' y_, + 2\delta' x_, + \varepsilon = 0, \qquad (2)$$

wo das von den veränderlichen Gröfsen unabhängige Glied dasselbe geblieben ist. Wenn wir von dieser Gleichung wieder zu der ursprünglichen rückwärts gehen wollen, so müssen wir uns der Formeln:

$$y_, = \frac{y\,cos\,\omega - x\,sin\,\omega}{sin\,\vartheta}, \qquad x_, = -\frac{y\,cos\,\omega' - x\,sin\,\omega'}{sin\,\vartheta},$$

in denen wir ϑ für $(\omega'-\omega)$ schreiben, bedienen. Durch Ausführung der angezeigten Substitutionen erhalten wir folgende sechs Gleichungen zur gegenseitigen Bestimmung der Coefficienten der drei ersten Glieder der beiden Gleichungen (1) und (2):

$$sin^2\omega' + 2\alpha\,sin\,\omega'\,cos\,\omega' + \beta\,cos^2\omega' = \mu, \qquad (3)$$

$$sin^2\omega + 2\alpha\,sin\,\omega\,cos\,\omega + \beta\,cos^2\omega = \beta', \qquad (4)$$

$$sin\,\omega\,sin\,\omega' + \alpha(sin\,\omega\,cos\,\omega' + sin\,\omega'\,cos\,\omega) + \beta\,cos\,\omega\,cos\,\omega' = \alpha', \qquad (5)$$

$$\frac{\mu \cos^2\omega - 2\alpha' \cos\omega \cos\omega' + \beta' \cos^2\omega'}{\sin\vartheta} = 1, \qquad (6)$$

$$\frac{\mu \sin^2\omega - 2\alpha' \sin\omega \sin\omega' + \beta' \sin^2\omega'}{\sin^2\vartheta} = \beta, \qquad (7)$$

$$-\frac{\mu \sin\omega \cos\omega - \alpha'(\sin\omega \cos\omega' + \sin\omega' \cos\omega) + \beta' \sin\omega' \cos\omega'}{\sin^2\vartheta} = \alpha. \qquad (8)$$

248. Wenn wir die Gleichungen (6) und (7) addiren, und bemerken, dafs

$$\cos\omega \cos\omega' + \sin\omega \sin\omega' = \cos(\omega' - \omega) = \cos\vartheta,$$

so erhalten wir folgenden Ausdruck:

$$\frac{\mu - 2\alpha' \cos\vartheta + \beta'}{\sin^2\vartheta} = 1 + \beta. \qquad (9)$$

Aus den Gleichungen (3) (4) und (5) ergibt sich nach einigen trigonometrischen Umformungen:

$$\alpha'^2 - \mu\beta' = (\alpha^2 - \beta) \sin^2\vartheta,$$

mithin:

$$\frac{\alpha'^2 - \mu\beta'}{\sin^2\vartheta} = \alpha^2 - \beta. \qquad (10)$$

Wir erkennen aus den Gleichungen (9) und (10), dafs die Ausdrücke

$$\frac{\mu - 2\alpha' \cos\vartheta + \beta'}{\sin^2\vartheta}, \qquad \frac{\alpha'^2 - \mu\beta'}{\sin^2\vartheta},$$

in allen möglichen verschiedenen Gleichungen constant sind, die wir erhalten indem wir ein und dieselbe Linie zweiter Ordnung auf irgend ein beliebiges Axen-System beziehen, dessen jedesmaliger Coordinaten-Winkel durch ϑ bezeichnet ist. Behalten wir dasselbe Coordinaten-System bei und geben der Curve verschiedene, durchaus beliebige, Lagen, so sind dieselben Ausdrücke offenbar wiederum constant, und mithin da ϑ sich nicht ändert, auch folgende Ausdrücke:

$$\mu - 2\alpha' \cos\vartheta + \beta', \qquad \alpha'^2 - \mu\beta',$$

wobei überall die Voraussetzung gemacht wird, dafs das von den veränderlichen Gröfsen unabhängige Glied nicht verschwindet und was immer möglich ist, auf denselben Werth reducirt wird. Sind die Coordinaten-Systeme, auf welche wir ein und dieselbe Curve beziehen alle rechtwinklig, so sind die Ausdrücke:

$$\mu + \beta', \qquad \alpha'^2 - \mu\beta',$$

constant; sind die Coordinaten-Axen immer zweien zugeordneten Durchmessern parallel, so haben, weil alsdann α verschwindet, die Ausdrücke:

$$\frac{\mu + \beta'}{\sin^2\vartheta}, \qquad \frac{\mu\beta'}{\sin^2\vartheta}, \qquad (11)$$

constante Werthe.

249. Die Deutung des letzten Resultats führt zu bekannten Sätzen. Seyen nemlich:

$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1 \qquad \frac{y^2}{B'^2} + \frac{x^2}{A'^2} = 1$$

die Gleichungen derselben Ellipse, auf zwei verschiedene Systeme zugeordneter Durchmesser bezogen, alsdann gibt der letzte der Ausdrücke (11):

$$\frac{1}{A^2B^2 \sin^2\vartheta} = \frac{1}{A'^2B'^2 \sin^2\vartheta'}$$

wobei wir die Winkel, welche die Durchmesser jedes Systems mit einander bilden, ϑ und ϑ' nennen. Hieraus folgt:

$$AB \sin\vartheta = A'B' \sin\vartheta'. \qquad (12)$$

Wenn man durch die End-Puncte jedes von zweien zugeordneten Durchmessern dem andern gerade Linien parallel zieht, so wird die Curve von diesen Linien berührt, und es entsteht ein um dieselbe beschriebenes Parallelogramm. Die beiden Theile der letzten Gleichung geben den vierten Theil des Inhaltes solcher Parallelogramme. Also:

Alle um die Ellipse beschriebenen Parallelogramme, deren Seiten zweien zugeordneten Durchmessern parallel sind, haben gleichen Inhalt.

Für den Fall der Hyperbel ergibt sich die Modification dieses Satzes von selbst.

250. Der erste der Ausdrücke (11) auf die Gleichungen obiger beiden Ellipsen übertragen, gibt:

$$\left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2}\right)\frac{1}{\sin^2\vartheta} = \left(\frac{1}{A'^2} + \frac{1}{B'^2}\right)\frac{1}{\sin^2\vartheta'},$$

und hieraus folgt, wenn wir zugleich die Gleichung (12) berücksichtigen:

$$A^2 + B^2 = A'^2 + B'^2,$$

eine Gleichung, die für den Fall der Hyperbel in folgende übergeht:

$$A^2 - B^2 = A'^2 - B'^2.$$

Hieraus erhellet, dafs **bei der Ellipse die Summe, bei der Hyperbel der Unterschied der Quadrate je zweier zugeordneten Durchmesser eine constante Gröfse ist.**

251. Wenn die, auf ein beliebiges System bezogene, allgemeine Gleichung:

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon = 0, \qquad (1)$$

eine Curve darstellt, die einen Mittelpunct hat, so können wir, indem wir in diesen Punct den Anfangs-Punct der Coordinaten verlegen, und das constante Glied durch Division auf Eins bringen, dieser Gleichung folgende Form geben:

$$\mu y^2 + 2\mu\alpha xy + \mu\beta x^2 + 1 = 0, \qquad (2)$$

wo nach der 230. Nummer:

$$\mu = \frac{\alpha^2 - \beta}{(\delta - \alpha\gamma)^2 + (\alpha^2 - \beta)(\varepsilon - \gamma^2)}.$$

Aus der Gleichung (2) können wir endlich noch das, mit xy behaftete, Glied fortschaffen, und sie alsdann unter folgender Gestalt schreiben:

$$\frac{y^2}{q} + \frac{x^2}{p} + 1 = 0, \qquad (3)$$

Nennen wir nun den Coordinaten-Winkel des ursprünglichen Systems ϑ, und denjenigen, beliebig angenommenen, Winkel, welchen die zugeordneten Durchmesser, auf welche die Gleichung (3) bezogen ist, mit einander bilden, ξ: so gibt die Nebeneinander-Stellung der Gleichungen (2) und (3):

$$-\frac{1}{pq \sin^2\xi} = \frac{\mu^2(\alpha^2-\beta)}{\sin^2\vartheta}, \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\frac{1}{\sin^2\xi} = \mu.\frac{1 - 2\alpha\cos\vartheta + \beta}{\sin^2\vartheta};$$

und hiernach erhält man:

$$pq = -\frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\xi}\cdot\frac{1}{\mu^2(\alpha^2-\beta)}, \qquad p + q = -\frac{1 - 2\alpha\cos\vartheta + \beta}{\mu(\alpha^2-\beta)},$$

woraus dann ersichtlich ist, dafs p und q Wurzeln ein und derselben quadratischen Gleichung sind, für welche wir folgende erhalten:

$$z^2 + \frac{1 - 2\alpha\cos\vartheta + \beta}{\mu(\alpha^2-\beta)} z - \frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\xi}\cdot\frac{1}{\mu^2(\alpha^2-\beta)} = 0, \qquad (4)$$

Wenn die Wurzeln dieser Gleichung, p und q, dasselbe Zeichen haben, wofür uns das letzte Glied derselben sogleich die Bedingung $(\alpha^2-\beta) < 0$ gibt, so stellt die Gleichung (3) eine Ellipse dar, $(-p)$ und $(-q)$ sind die Quadrate derjenigen beiden halben zugeordneten Durchmesser, die den gegebenen Winkel ξ mit einander bilden. Ist die Ellipse reell, so sind die Werthe von p und q beide negativ, sonst beide positiv. Die Ellipse reducirt sich auf einen Punct, wenn beide Werthe verschwinden. Wir erkennen ohne alle Mühe, und in Uebereinstimmung mit frühern Entwicklungen, aus der letzten Gleichung (4), dafs diese verschiedenen Fälle sich einzig durch das Zeichen von:

$$\mu = \frac{\alpha^2-\beta}{(\delta-\alpha\gamma)^2+(\alpha^2-\beta)(\varepsilon-\gamma^2}$$

bestimmen. Wenn wir für p und q Werthe mit entgegengesetztem Zeichen erhalten, in welchem Falle: $(\alpha^2-\beta) > 0$, so ist die Curve eine Hyperbel und immer reell; wenn alsdann p und q Null werden, so geht dieselbe in ein System zweier geraden Linien über, und alsdann ist $\frac{1}{\mu} = 0$. Die Gleichung (4) gibt für z gleiche und entgegengesetzte Werthe, wenn:

$$1-2\alpha\cos\vartheta+\beta = 0,$$

alsdann ist die Curve nach der 241. Nummer eine gleichseitige Hyperbel; in dieser sind also je zwei zugeordnete Durchmesser einander gleich. Lösen wir die Gleichung (4) wirklich auf, so ergeben sich für p und q folgende Ausdrücke:

$$-\frac{(1-2\alpha\cos\vartheta+\beta)\sin\xi \pm ((1-2\alpha\cos\vartheta+\beta)^2\sin^2\xi+4(\alpha^2-\beta)\sin^2\vartheta))^{1/2}}{2\mu(\alpha^2-\beta)\sin\xi} \qquad (5)$$

Die Werthe von p und q sind nur dann reell, wenn:

$$\sin^2\xi > -\frac{4(\alpha^2-\beta)\sin^2\vartheta}{1-2\alpha\cos\vartheta+\beta}. \qquad (6)$$

Diese Gränze der Realitat bezieht sich auf die Bestimmung des Winkels ξ, nicht auf die Möglichkeit der Curve. Für den Fall der Ellipse gibt es ein Minimum des Winkels ξ, worauf wir schon in der 146. Nummer geführt worden sind. Wir sehen zugleich, dafs diesem Minimum gleiche zugeordnete Durchmesser entsprechen.

Wenn wir annehmen, die allgemeine Gleichung (1) sey auf rechtwinkliche Coordinaten bezogen, so ist $\vartheta = \frac{\pi}{2}$; wollen wir, bei dieser Annahme, die Gröfse der Axen bestimmen, so ist auch $\xi = \frac{\pi}{2}$, und wir erhalten demnach für die Quadrate ihrer Hälften, aus dem Ausdrucke (5), indem wir zugleich das Zeichen desselben ändern:

$$\frac{(1+\beta) \pm (4\alpha^2+(1-\beta)^2)^{1/2}}{2\mu(\alpha^2-\beta)}. \qquad (7)$$

252. Wenn die allgemeine, auf ein beliebiges System bezogene, Gleichung des zweiten Grades:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0, \qquad (1)$$

insbesondere eine Parabel darstellt, so können wir derselben durch blofse Verlegung des Anfangs-Punctes der Coordinaten, immer und nur auf eine einzige Weise, folgende Form geben:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta' x = 0. \qquad (2)$$

Alsdann berührt die zweite neue Axe die Curve im Anfangs-Puncte der Coordinaten, und nach der 235. Nummer ist:

$$\delta' = \delta - \alpha\gamma. \qquad (3)$$

Wir können ferner aus dieser Gleichung das mit xy behaftete Glied fortschaffen, indem wir blofs der ersten Axe eine andere Richtung geben. Alsdann haben wir nach der Bezeichnung der 237. Nummer: $\psi' = 0$ und φ' gleich dem Coordinaten-Winkel ϑ. Hiernach wird die Gleichung (2) der eben angezogenen Nummer, auf die letzte Gleichung der Parabel übertragen, folgende:

$$y^2 + 2\,\frac{\sin\varphi - \alpha\sin\psi}{\sin\vartheta}\,xy + \frac{\sin^2\varphi - 2\alpha\sin\varphi\sin\psi + \beta\sin\psi^2}{\sin^2\vartheta}\,x^2 - 2\,\frac{\delta'\sin\psi}{\sin\vartheta}\,x = 0. \quad (4)$$

Nehmen wir nun $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \alpha$, so fällt aus dieser Gleichung das zweite und dritte Glied aus, und sie reducirt sich auf:

$$y^2 - 2\,\frac{\delta'\sin\psi}{\sin\vartheta}\,x = 0. \quad (5)$$

Wenn wir endlich den, vermittelst der beiden Gleichungen:

$$\psi = \varphi - \vartheta, \qquad \sin\varphi = \alpha\sin\psi,$$

sich ergebenden Werth von $\sin\psi$:

$$\sin\psi = \pm\,\frac{\sin\vartheta}{(\alpha^2 - 2\alpha\cos\vartheta + 1)^{1/2}}, \quad (6)$$

in den Coefficienten von x substituiren, so wird derselbe, wenn wir zugleich wieder $\delta - \alpha\gamma$ für δ' schreiben:

$$\frac{\pm 2(\delta - \alpha\gamma)}{(\alpha^2 - 2\alpha\cos\vartheta + 1)^{1/2}}. \quad (7)$$

Dieser Ausdruck gibt also den Werth für den **Parameter desjenigen Durchmessers, der alle der zweiten Axe parallele Chorden halbirt.** Der Coordinaten-Winkel ist $(-\psi)$. Um den Parameter der Axe zu bestimmen, brauchen wir blos den Parameter eines beliebigen Durchmessers mit dem Quadrate des Sinus des Coordinaten-Winkels zu multipliciren. Diefs ergibt sich sogleich, indem wir die auf die Axe bezogene Gleichung der Parabel:

$$y^2 = 2px,$$

in eine Gleichung von derselben Form, bezogen auf einen andern Durchmesser, umwandeln. Wir erhalten also für den Parameter der Axe der, durch (1) dargestellten, Parabel folgenden Ausdruck:

$$\frac{\pm 2(\delta - \alpha\gamma)\sin^2\vartheta}{(\alpha^2 - 2\alpha\cos\vartheta + 1)^{3/2}}.$$

§. 3.

Geometrische Bedeutung der einzelnen Constanten in der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen zweien veränderlichen Gröfsen.

253. Wir wollen wieder, wie früher, folgende Gleichung: Fig. 1.

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon = 0,$$

für die allgemeine Gleichung des zweiten Grades nehmen, und dieselbe auf ein beliebiges Coordinaten-System beziehen. Setzen wir für x in diese Gleichung irgend einen bestimmten, übrigens aber willkührlichen Werth, x', so erhalten wir die Ordinaten derjenigen

Puncte, in welchen die Curve von der durch x' bestimmten, der zweiten Coordinaten-Axe parallelen, geraden Linie geschnitten wird. Wenn wir nun die allgemeine Gleichung folgendermaſsen schreiben:

$$y^2+2(\alpha x+\gamma)y+\beta x^2+2\delta x+\varepsilon=0,$$

und jene Ordinaten y' und $y_,$ nennen, so ergibt sich sogleich:

$$y'+y_, = -2(\alpha x'+\gamma). \qquad (1)$$

Für die Summe der Ordinaten, die den Durchshnitten einer andern, der zweiten Axe parallelen, geraden Linie mit der Curve entsprechen, erhalten wir bei einer analogen Bezeichnung:

$$y''+y_{,,} = -2(\alpha x''+\gamma).$$

Wenn wir die Differenz der letzten beiden Gleichungen nehmen, so fällt γ aus und es kommt:

$$y''-y'+y_{,,}-y_, = -2\alpha(x''-x'),$$

mithin:

$$\frac{y''-y'+y_{,,}-y_,}{x''-x'} = -2\alpha. \qquad (2)$$

Sind also, um dieses Resultat zu construiren, $P'M'$ und $P''M''$ die beiden durch:

$$x=x', \quad x=x''$$

dargestellten Parallelen und sind überdieſs $M'N''$ und $M_,N_{,,}$ der ersten Axe parallel gezogen, so gibt die Gleichung (2):

$$\frac{M''N''+M_,N_{,,}}{P'P''} = -2\alpha.$$

Wie wir auch die beiden geraden Linien $P'M'$ und $P''M''$ parallel mit sich selbst verrücken mögen, der erste Theil dieser Gleichung behält immer ein und denselben Werth. Ueber die Richtung der Coordinaten-Axen ist durchaus keine Bestimmung gemacht worden, mithin können wir auch die Richtung der Schneidenden, $P'M'$ und $P''M''$, so wie die Richtung von $P'P''$ beliebig annehmen. Diese Eigenschaft der Linien zweiter Ordnung gibt Euler im 5. Kap. des 2. Theiles seiner „*Introduction ad analysin infinitorum,*" und bezeichnet dieselbe mit Grund als eine der beiden allgemeinsten Eigenschaften dieser Linien.

Die in Rede stehende Eigenschaft bezieht sich unmittelbar auch auf den besondern Fall, wo die allgemeine Gleichung ein System zweier geraden Linien darstellt.

Die Gleichung (2) besteht auch dann noch, wenn die, der zweiten Axe parallel gezogenen, geraden Linien der Curve nicht mehr begegnen, denn auch für den Fall imaginärer Wurzeln einer quadratischen Gleichung, bleibt die Summe derselben reell. Die geometrische Deutung fällt hier natürlich weg.

Fig. 2. 254. Wir können die Gleichung (2) für besondere Fälle noch vereinfachen, z. B. indem wir die beiden Schneidenden so bestimmen, daſs

$$y_{,,}=y_,.$$

Wir brauchen zu diesem Ende nur irgend eine garade Linie $M_,M_{,,}$ der ersten Axe parallel und durch die Durchschnitte derselben mit der Curve, wie früher, zwei gerade Linien $M_,M'$ und $M_{,,}M''$ parallel mit der zweiten Axe zu ziehen. Hiernach reducirt sich die Gleichung (2) auf:

$$\frac{y''-y'}{x''-x'} = -2\alpha,$$

also ist mit Beziehung auf die Construction:

$$\frac{M''N''}{M'N''} = -2\alpha.$$

Es folgt hieraus, dafs, wie wir auch die gerade Linie $M_{,}M_{,,}$ parallel mit sich selbst verrücken mögen, die gerade Linie M'M'', welche durch die beiden Puncte (y'',x'') und (y',x') geht, sich ebenfalls parallel mit sich selbst verrückt.

Nach dieser Nummer erhalten wir also, für eine gegebene Linie zweiter Ordnung und für ein gegebenes Coordinaten-System, sogleich den Werth des Coefficienten des zweiten Gliedes in der Gleichung der Curve. Wenn wir nemlich irgend eine der Curve begegnende gerade Linie der ersten Axe parallel ziehen und durch die beiden Durchschnitts-Puncte zwei andere gerade Linien, der Axe der y parallel legen, ist jener Coefficient gleich dem Quotienten des, auf der ersten geraden Linie von der Curve interceptirten, Stückes in die Differenz der auf den beiden andern geraden Linien interceptirten Stücke. Ueber das Zeichen dieses Quotienten kann in jedem besondern Falle kein Zweifel obwalten.

255. Die Gleichung (1) der 253. Nummer gibt:

$$\frac{y'+y_{,}}{2} = -(\alpha x'+\gamma).$$

Der erste Theil dieser Gleichung bezeichnet die Ordinate der Mitte des von der Curve interceptirten Stückes der geraden Linie (x=x'); nennen wir diese Ordinate y, und lassen zugleich den Accent von x fort, so kommt:

$$y+\alpha x+\gamma = 0.$$

Diese Gleichung bezeichnet, indem wir y und x als veränderliche Gröfsen betrachten, den Ort aller jener Mitten, indem wir die schneidende gerade Linie parallel mit sich selbst und der zweiten Axe verrücken. Dieser Ort, der (234) ein Durchmesser ist, halbirt also alle der zweiten Axe parallele Chorden. Da wir über die Richtung der zweiten Axe durchaus nichts bestimmt haben, so folgen allgemein folgende Sätze:

Wenn man in einer Linie zweiter Ordnung nach irgend einer beliebigen Richtung parallele Chorden zieht, so liegen die Mitten derselben auf einer geraden Linie, auf einem Durchmesser.

Die den parallelen Chorden parallele Tangenten bezeichnen den Uebergang, wo die Durchschnitte imaginär werden; der Durchmesser, der jene Chorden halbirt, geht auch durch die Berührungs-Puncte, und, umgekehrt, diejenige gerade Linie, welche durch zwei Puncte geht, in welchen zwei parallelen Tangenten eine Linie zweiter Ordnung berühren, ist ein Durchmesser derselben.

Man überzeugt sich leicht, dafs der schon früher bezeichnete Durchmesser:

$$\alpha y+\beta x+\delta = 0,$$

alle der ersten Coordinaten-Axe parallele Chorden halbirt.

256. Wenn wir in der allgemeinen Gleichung: Fig. 3.

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

um die Durchschnitte der ersten und zweiten Axe mit der Curve zu bestimmen, nach einander y und x gleich Null setzen, so kommt:

$$\beta x^2+2\delta x+\varepsilon = 0, \qquad y^2+2\gamma y+\varepsilon = 0,$$

also ist, wenn wir die Wurzeln der ersten Gleichung durch x' und x'', die Wurzeln der zweiten durch y' und y'' bezeichnen:

$$x'x'' = \frac{\varepsilon}{\beta}, \qquad y'y'' = \varepsilon.$$

und die Zusammenstellung dieser Gleichungen gibt:

$$\frac{y'y''}{x'x''} = \beta,$$

also mit Beziehung auf die 3. Figur:

$$\frac{OQ.\ OQ'}{OP.\ OP'} = \beta.$$

Da in der allgemeinen Gleichung der Werth von β derselbe bleibt, wie wir auch den Anfangs-Punct der Coordinaten O, mit Beibehaltung der Axen-Richtung, verlegen mögen, so bleibt der Quotient der beiden Producte OQ. OQ' und OP. OP' derselbe für alle beliebigen Puncte, durch die wir nach bestimmter Richtung zwei gerade Linien OY und OX legen. Diese Beziehung nennt Euler: die zweite allgemeine Eigenschaft der Linien zweiter Ordnung. Der von ihm gegebene Beweis hat mit dem obigen Aehnlichkeit.

Nach dieser Nummer können wir also für eine gegebene Linie zweiter Ordnung und ein gegebenes Coordinaten-System, auf welche die Gleichung derselben bezogen werden soll, den Coefficienten β dieser Gleichung geometrisch construiren. Wir haben ferner, wenn OY die zweite Axe ist:

$$OQ.\ OQ' = \varepsilon,$$

und hiernach ergibt sich auch die Construction des letzten Coefficienten der allgemeinen Gleichung, für den Fall, daſs die erste Axe der Curve wirklich begegnet.

257. Im Falle, daſs die zweite Axe der Curve nicht begegnet, gibt die Gleichung:

$$y^2 + 2\gamma y + \varepsilon = 0$$

imaginäre Wurzeln, deren Product immer positiv ist. Wenn hingegen die zweite Axe die Curve schneidet, so ist ε positiv, wenn die beiden Durchschnitte auf derselben Seite des Anfangs-Punctes liegen, negativ im entgesetzten Falle. Für Ellipse und Parabel ist also ε positiv oder negativ, je nachdem der Anfangs-Punct auſserhalb oder innerhalb angenommen wird. Für die Hyperbel ist, wenn der Anfangs-Punct auſserhalb liegt, ε positiv, wenn die zweite Axe der Curve nicht begegnet, oder nur einem Zweige derselben, negativ, wenn beide Zweige geschnitten werden; wenn der Anfangs-Punct innerhalb liegt, ist ε positiv oder negativ, je nachdem die zweite Axe beide Zweige oder nur einen Zweig schneidet.

Das Zeichen von β hängt davon ab, ob die Producte der auf beiden Axen bestimmten Segmente OQ. OQ' und OP. OP' von gleichem oder entgegengesetztem Zeichen sind. Für Ellipse und Parabel ist hiernach β immer positiv; für die Hyperbel ist β dann negativ, wenn eine der beiden Coordinaten-Axe beiden Zweigen begegnet und die andere nur einem Zweige, oder überhaupt die Curve gar nicht schneidet, in den übrigen Fällen ist β positiv. Der Uebergang von positiven zu negativen Werthen für β geht durch Null oder durchs Unendliche, d. h. geometrisch genommen, indem wir der einen oder andern Axe eine solche Richtung geben, daſs sie mit einer der Asymptoten parallel wird.

258. Wenn in der allgemeinen Gleichung β gleich Eins ist, so ist:

$$OQ.\ OQ' = OP.\ OP',$$

wo wir auch den Punct O, durch den wir zwei gerade Linien parallel mit den beiden Axen ziehen, annehmen mögen. Dieser Fall tritt da ein, wo eine Axe der Curve die beiden Coordinaten-Axen unter gleichen Winkeln schneidet (245.). Also:

Wenn wir in irgend einer Linie zweiter Ordnung irgend zwei gerade Linien ziehen, die eine Axe derselben unter gleichen Winkeln schneiden, so sind diejenigen beiden Rechtecke gleich, die unter denjenigen Segmenten jeder dieser Linien, welche zwischen dem Durchschnitte derselben und den Durchschnitten mit der Curve liegen, enthalten sind. Der Durchschnitt der beiden geraden Linien unter sich kann sowol außerhalb als innerhalb der Curve Statt haben.

Für den Kreis ist immer, wie wir auch die Coordinaten-Axen bestimmen mögen, $\beta=1$, wir können also die beiden sich schneidenden geraden Linien durchaus beliebig annehmen.

Wir erhalten ebenfalls gleiche Rechtecke wenn $\beta=-1$ ist, was zunächst für den Fall der gleichseitigen, auf rechtwinkliche Coordinaten bezogenen Hyperbel Statt findet. Also:

Wenn eine gleichseitige Hyperbel gegeben ist und man zieht durch irgend einen beliebigen Punct zwei, auf einander senkrechte, gerade Linien, so sind die Rechtecke, welche unter denjenigen Segmenten jeder der beiden geraden Linien, die zwischen jenem Puncte und der Hyperbel liegen, enthalten sind, einander gleich.

An die Stelle der gleichseitigen Hyperbel können wir ein System zweier sich rechtwinklich schneidenden geraden Linien setzen.

Wir verweilen nicht dabei, für eine nicht gleichseitige Hyperbel solche Linien-Paare zu bestimmen, für welche die in Rede stehenden Rechtecke gleich sind.

259. Wir haben folgende Gleichung zur Bestimmung der Durchschnitts-Puncte der zweiten Axe mit der Curve:

$$y^2+2\gamma y+\varepsilon = 0,$$

und hienach, wenn wir die Ordinaten dieser Puncte durch y' und y'' unterscheiden:

$$\gamma = -\frac{y'+y''}{2}.$$

Wir können also in dem Falle, daſs die zweite Axe die Linie zweiter Ordnung wirklich schneidet, den Werth von γ leicht in der Construction nachweisen: γ ist nemlich gleich dem mit entgesetztem Zeichen genommenen Abstande der Mitte, der auf jener Axe von der Curve interceptirten, Chorde von dem Anfangs-Puncte der Coordinaten.

Die Gleichung:

$$\beta x^{2\prime}+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

gibt auf ähnliche Weise $\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)$ für die Abscisse der Mitte der, auf der ersten Axe interceptirten, Chorde.

Für den Fall, daſs die zweite Axe der Curve nicht begegnet, müssen wir γ auf andere Weise bestimmen. Wir gelangen dazu vermittelst des Durchmessers, der alle der zweiten Axe parallele Chorden halbirt, und dessen Gleichung folgende ist:

$$y+\alpha x+\gamma = 0, \qquad (1)$$

in der γ die Ordinate des Durchschnittes dieses Durchmessers mit der zweiten Axe, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, bedeutet. Ziehen wir daher irgend zwei der zweiten Axe parallele Chorden, so bestimmt diejenige gerade Linie, welche diese Chorden halbirt, auf jener Axe eine Ordinate, die gleich ist $(-\gamma)$. Die Abscisse des Durchschnittes dieses Durchmessers mit der ersten Axe ist gleich $\left(-\frac{\gamma}{\alpha}\right)$.

Nehmen wir die Gleichung des andern Durchmessers, der alle der ersten Axe parallele Chorden halbirt, nemlich die Gleichung:

$$\alpha y+\beta x+\delta = 0, \qquad (2)$$

so finden wir für die Durchschnitte dieses Durchmessers mit der ersten und zweiten Axe:

$$x = -\frac{\delta}{\beta}, \qquad y = -\frac{\delta}{\alpha}.$$

Fig. 3. In der 3. Figur sind BC und AD die beiden durch (1) und (2) dargestellten Durchmesser, mithin ist:

$$OC = -\gamma, \quad OA = -\frac{\delta}{\beta}, \quad OB = -\frac{\gamma}{\alpha}, \quad OD = -\frac{\delta}{\alpha}.$$

Es ergibt sich hieraus ferner:

$$\frac{OB}{OD} = \frac{\gamma}{\delta},$$

wonach wir zur Bestimmung von δ folgende Gleichung erhalten:

$$\delta = -\frac{OD.\,OC}{OB}.$$

Wenn wir den Werth von δ nicht geradezu als das vierte Glied einer geometrischen Proportion construiren wollen, so können wir auch durch die drei Puncte B, C und D einen Kreis legen, der alsdann die erste Axe in einem Puncte schneidet, dessen Abscisse gleich ist $(-\delta)$. (258).

Wenn $\beta = \pm 1$ ist, so kommt:

$$\delta = \mp OA;$$

der eben construirte Kreis geht alsdann durch den Punct A.

260. Wenn wir in der allgemeinen Gleichung:

$$y^2+2\alpha xy+\alpha y+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

für x irgend einen besondern Werth x′ substituiren, so ist das Product der beiden entsprechenden Werthe für y, die wir durch y′ und y″ unterscheiden wollen, gleich dem von y unabängigen Gliede; es ist:

$$y'y'' = \beta x'^2+2\delta x'+\varepsilon.$$

Aehnlich erhalten wir, indem wir eine Abscisse $(-x')$ nehmen, und die entsprechenden Ordinaten $y_,$ und $y_{,,}$ nennen:

$$y_,y_{,,} = \beta x'^2-2\delta x'+\varepsilon,$$

und wenn wir die letzten beiden Gleichungen von einander abziehen:

$$y'y''-y_,y_{,,} = 4\delta x'.$$

Fig. 4. Nehmen wir in der 4. Figur OM für x′, so verschwindet offenbar das Product y′y″ und wir erhalten:

$$-y_,y_{,,} = 4\delta x',$$

also wenn wir in der Construction $O\mu$ gleich $(-x')$, d. h. abgesehen vom Zeichen, gleich OM nehmen:

$$-2\delta = \frac{y_,y_{,,}}{2x'} = \frac{\mu Q.\mu Q'}{\mu M}.$$

Wir können also auch auf diese Weise den Werth des Coefficienten von x in der allgemeinen Gleichung construiren, für den Fall, dafs die zweite Axe der Curve begegnet.

Da der Abstand der Mitte von MM′ vom Puncte O gleich ist $\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)$, so erhalten wir eine neue Bestimmung von β, nachdem wir δ zuvor construirt haben.

261. Wenn wir in der allgemeinen Gleichung: Fig. 5.

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

die drei ersten Glieder, für sich allein genommen, gleich Null setzen, so erhalten wir (241):

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2 = 0, \qquad (1)$$

die Gleichung eines Systems von zweien geraden Linien, OM und OM', die durch den Anfangs-Punct der Coordinaten gehen und den Asymptoten der Curve parallel sind. Ziehen wir diese Gleichung von der allgemeinen ab, so bleibt:

$$2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0, \qquad (2)$$

die Gleichung einer geraden Linie, die durch die Durchschnitte der Curve mit jenem Systeme von zweien geraden Linien geht; woraus wir denn beiläufig sehen, daſs es nur zwei solcher Durchschnitte, M und M', gibt.

Für den Fall der Parabel stellt die Gleichung (1) zwei zusammenfallende, durch den Anfangs-Punct der Coordinaten, durch O gehende Durchmesser derselben dar. Die Gleichung (2) bezeichnet also die Tangente MS im Scheitel dieser Durchmesser. Fig. 6.

Für den Fall der Ellipse wird jenes System von zwei geraden Linien (1) imaginär; die Gleichung (2) bezeichnet immer noch eine bestimmte gerade Linie, die aber mit der Curve keinen Punct mehr gemein haben kann.

262. Wir haben früher die geometrische Bedeutung von ε in der Voraussetzung nachgewiesen, daſs die zweite Axe der Curve wirklich begegnet; für den Fall der Hyperbel und Parabel, erhalten wir, nach der vorigen Nummer, eine allgemeinere Construction dieses Werthes. Lassen wir nemlich in der Gleichung (2) x verschwinden, so ergibt sich für den Durchschnitt der bezüglichen geraden Linie mit der zweiten Axe:

$$\varepsilon = -2\gamma y$$

also, mit Beziehung auf die 5. und 6. Figur, wo OS die zweite Axe, μ die Mitte der, auf ihr von der Curve interceptirten, Chorde QQ', und O der Anfangs-Punct ist:

$$\varepsilon = -2OS.O\mu.$$

Indem wir die in dieser und in der 256. Nummer für ε construirten Werthe gleich setzen, erhalten wir, abgesehn vom Zeichen, folgenden Ausdruck:

$$2.OS.O\mu = OQ.OQ'.$$

Wir können auch auf ähnliche Weise ε vermittelst der Gleichung:

$$\gamma y+\delta x+\varepsilon = 0,$$

deren geometrische Deutung wir im nächsten Paragraphen geben werden, construiren, und diese Construction ist keiner Beschränkung unterworfen.

263. Die beiden Gleichungen:

$$y^2+2\gamma y+\varepsilon = 0, \qquad \beta x^2+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

geben reelle, gleiche oder imaginäre Wurzeln, je nachdem die Ausdrücke $(\gamma^2-\varepsilon)$ und $(\delta^2-\beta\varepsilon)$ positiv, Null oder negativ sind. Hieran erkennen wir also, ob die erste und zweite Coordinaten-Axe der Curve begegnen oder nicht.

264. Wenn für verschiedene durch die allgemeine Gleichung:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0 \qquad (1)$$

dargestellten Curven, ε und γ dieselben Werthe haben, so gibt die Gleichung:

$$y^2+2\gamma y+\varepsilon = 0, \qquad (2)$$

gleiche Wurzeln; alle einzelnen Curven schneiden also die zweite Axe in denselben beiden Puncten. Und, umgekehrt, in den Gleichungen aller Linien

zweiter Ordnung, die sich in zweien festen Puncten schneiden, behalten das constante Glied und der Coefficient von y immer denselben Werth, wenn wir die zweite Axe durch jene beiden festen Puncte legen.

Auf entsprechende Weise schneiden verschiedene Curven die erste Axe in denselben beiden Puncten, wenn folgende Gleichung:

$$\beta x^2 + 2\delta x + \varepsilon = 0, \qquad (4)$$

immer dieselben Wurzeln gibt, wenn nemlich $\frac{\delta}{\beta}$ und $\frac{\varepsilon}{\beta}$ sich nicht ändern.

Wenn verschiedene Linien zweiter Ordnung sich in denselben vier Puncten schneiden, und wir legen durch diese vier Puncte, paarweise genommen, was auf dreifache Weise geschehen kann, die beiden Axen, so müssen beide Gleichungen (2) und (3) gleiche Wurzeln geben, mithin die vier Coefficienten β, γ, δ und ε in den Gleichungen aller einzelnen Curven dieselben Werthe haben, so daſs wir also alle diese Curven durch die Gleichung (1) darstellen können, indem wir in derselben einzig nur dem Coefficienten von xy einen unbestimmten Werth, der von einer Curve zur andern sich ändert, beilegen.

Zu demselben Resultate kommen wir unmittelbar auf folgende Weise. Die Gleichung irgend einer Curve zweiter Ordnung sey:

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon = 0,$$

und da

$$xy = 0$$

die Gleichung des Systems der beiden Coordinaten-Axen ist, so erhalten wir durch Verbindung der beiden Gleichungen jede beliebige Curve, welche die beiden Axen in denselben Puncten schneidet. Soll die resultirende Gleichung wiederum vom zweiten Grade seyn, so behält sie offenbar die Form der gegebenen Curve, und nur der Coefficient des zweiten Gliedes kann seinen Werth ändern.

Es ist, um den Beweis umzukehren, eben so augenfällig, daſs die Gleichungen zweier Curven:

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon = 0,$$
$$y^2 + 2axy + bx^2 + 2cy + 2dx + e = 0,$$

sich nur dann zu der Gleichung des Axen-Systems:

$$xy = 0$$

verbinden lassen (indem wir nemlich abziehen und durch $(\alpha - a)$ dividiren), wenn:

$$b = \beta, \quad c = \gamma, \quad d = \delta, \quad e = \varepsilon.$$

265. Wir wollen wieder, indem wir $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und ε als unbestimmte Coefficienten betrachten,

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon = 0$$

für die allgemeine Gleichung der Linien zweiter Ordnung nehmen. Alsdann sind:

$$\left.\begin{aligned} y + \alpha x + \gamma &= 0, \\ \alpha y + \beta x + \delta &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

die Gleichungen der beiden Durchmesser, welche die den beiden Coordinaten-Axen parallelen Chorden halbiren. Soll die Richtung dieser beiden Durchmesser für verschiedene Curven sich nicht ändern, so müssen α und β constant seyn. Wenn in den Gleichungen verschiedener Linien zweiter Ordnung, auf irgend ein beliebiges System bezogen, diese Coefficienten dieselben sind, so bleiben sie auch gleich nach jeder beliebigen Coordinaten-

Umformung, und von solchen Curven sagen wir, sie seyen ähnlich und von ähnlicher Lage.

Wenn also zwei oder mehrere Curven zwei Paare paralleler zugeordneten Durchmesser haben, so sind dieselben ähnlich und haben ähnliche Lage; wenn man ferner in denselben in beliebiger Richtung parallele Durchmesser zieht, so sind auch die denselben zugeordneten Durchmesser unter einander parallel.

Sollen die Gleichungen (1) zwei, durchaus unveränderliche, gerade Linien darstellen, so müssen die Coefficienten α, β, γ und δ alle vier constant seyn, und wir können nur ε in der allgemeinen Gleichung willkührlich bestimmen. Alsdann stellt diese Gleichung nur solche Curven dar, welche ähnlich sind, und ähnliche Lage und denselben Mittelpunct haben.

266. Characteristisch für die verschiedenen Linien zweiter Ordnung ist das Zeichen des Werthes von $(\alpha^2-\beta)$; in der geometrischen Deutung hiervon liegt dann natürlich auch die allgemeinste Unterscheidung der drei Haupt-Classen dieser Linien. Wir können hierbei auf folgende Weise verfahren. Sey $M_{,}M_{''}$ irgend eine, der ersten Coordinaten-Axe parallel gezogene, gerade Linie, die der Curve in $M_{,}$ und $M_{''}$ begegnet; durch diese Durchschnitts-Puncte seyen $M_{,}M'$ und $M_{''}M''$ parallel gelegt mit der zweiten Axe, und endlich durch M', den zweiten Durchschnitt der ersten dieser Linien mit der Curve, $M'M$ wiederum parallel mit $M_{,}M_{''}$ und der ersten Axe. Alsdann ist nach der 254. und 256. Nummer: Fig. 2.

$$\frac{N''M''}{2\,N''M'} = -\alpha, \qquad \frac{N''M''.N''M_{''}}{N''M'.N''M} = \beta,$$

und also:

$$\alpha^2-\beta = \frac{N'M''^2}{4N''M'^2} - \frac{N''M''.N''M_{''}}{N''M'.N''M} = \frac{N''M''}{N''M'}\cdot\frac{N''M''.N''M-4N''M_{''}.N''M'}{4\,N''M'.N''M}.$$

Für den Fall der Parabel, wo $(\alpha^2-\beta)$ Null wird, erhalten wir:

$$N''M''.N''M = 4\,N''M_{''}.N''M',$$

mithin ist das Parallelogramm $M''M$ gleich dem Vierfachen des Parallelogrammes $M''M_{''}$. Da wir über die Richtung der beiden Coordinaten-Axen, denen die Seiten dieser Parallelogramme parallel sind, durchaus keine Bestimmung getroffen haben, so haben wir einen allgemeinen Satz für die Parabel bewiesen, bei dessen Aussage wir hier nicht verweilen. Derselbe Satz verificirt sich direct für ein System zweier Parallellinien.

Bei der Interpretation des Ausdruckes von $(\alpha^2-\beta)$ für den Fall der Ellipse und Hyperbel müssen wir auf die, durch die Lage des Punctes N'' bedingten Vorzeichen der verschiedenen Linien-Segmente Rücksicht nehmen. Liegt jener Punct, ähnlich wie in der Construction der 2. Figur, so sind die beiden Ausdrücke:

$$(\alpha^2-\beta), \qquad (N''M''.N''M - 4\,N''M_{''}.N''M'),$$

von entgegengesetztem Zeichen. Je nachdem also $(\alpha^2-\beta)$ positiv oder negativ, d. h. die gegebene Curve eine Hyperbel oder Ellipse ist, ist das Parallelogramm $M''M$ kleiner oder gröfser als das Parallelogramm $M'M_{''}$.

Umgekehrt ist ferner ersichtlich, dafs diejenige Linie zweiter Ordnung, welche durch die fünf Puncte M', M'', M, $M_{''}$ und $M_{,}$ sich legen läfst, und in der Construction eine Parabel ist, in eine Hyperbel übergeht, wenn der Punct M sich auf der geraden Linie $M'M$ weiter vom Puncte N'' entfernt, in eine Ellipse hingegen, wenn er sich diesem Puncte nähert, und endlich wieder in eine Hyperbel, wenn M über N'' hinaus, nach M' hin, fortrückt. —

Weiter dürfen wir hier den, in diesem Paragraphen eingeleiteten, Gang der Untersuchung nicht verfolgen.

§. 4.

Ueber Berührung zwischen einer Linie zweiter Ordnung und geraden Linien.

267. Jede directe Tangenten-Methode ist eine Umschreibung desjenigen Verfahrens, nach welchem vermittelst Differential-Rechnung die Gleichung der Tangente hergeleitet wird. Wir wollen dieses Verfahren, angewandt auf Linien zweiter Ordnung, geradezu hier nachbilden.

Sey:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0, \qquad (1)$$

die Gleichung der gegebenen Curve und (y'', x'') ein gegebener Punct derselben, in welchem wir die Tangente construiren wollen. Zwischen y'' und x'' findet die Gleichung (1) Statt, es ist:

$$y''^2+2\alpha x''y''+\beta x''^2+2\gamma y''+2\delta x''+\varepsilon = 0,$$

und hiernach wird die Gleichung der Curve, indem wir abziehn, um ε zu eliminiren:

$$(y^2-y''^2)+2\alpha(xy-x''y'')+\beta(x^2-x''^2)+2\gamma(y-y'')+2\delta(x-x'') = 0. \qquad (2)$$

Weil die Tangente ebenfalls durch den Punct (y'', x'') geht, so hat ihre Gleichung folgende Form:

$$y-y'' = \varkappa(x-x''). \qquad (3)$$

So lange $\varkappa$ unbestimmt bleibt, kann die letzte Gleichung jede beliebige gerade Linie bezeichnen, welche durch den Punct (y'', x'') geht. Im Allgemeinen wird eine solche Linie der Curve noch in einem zweiten Puncte begegnen. Bezeichnen wir die Coordinaten dieses zweiten Punctes durch $(y''+k)$ und $(x''+h)$, so müssen diese Werthe für y und x, in (2) und (3) substituirt, diese Gleichungen beide befriedigen. Hiernach erhalten wir:

$$\varkappa^2+2\alpha kh+\beta h^2+2(y''+\alpha x''+\gamma)k+2(\alpha y''+\beta x''+\delta)h = 0,$$
$$k = \varkappa h.$$

Eliminiren wir aus der ersten dieser Gleichungen k vermittelst der zweiten, so kommt, wenn wir zugleich durch h dividiren:

$$\varkappa^2 h+2\alpha\varkappa h+\beta h+2(y''+\alpha x''+\gamma)\varkappa+2(\alpha y''+\beta x''+\delta) = 0. \qquad (4)$$

Wenn wir für h einen beliebigen Werth annehmen, so gibt diese Gleichung für $\varkappa$ zwei Werthe; wenn wir $h = 0$ setzen, so wird einer dieser Werthe unendlich und, indem wir von diesem Werthe abstrahiren, reducirt sich die letzte Gleichung auf ihre beiden letzten Glieder und es ergibt sich:

$$\varkappa = -\frac{\alpha y''+\beta x''+\delta}{y''+\alpha x''+\gamma}.$$

Dieser Werth von $\varkappa$ gehört offenbar der gesuchten Tangente an. Denn den beiden Werthen von $\varkappa$, welche die Gleichung (4) für ein bestimmtes h gibt, entsprechen zwei durch den Punct (y'', x'') gehende Sekanten, von welchen, wenn h Null wird, die eine mit der Ordinate des Punctes (y'', x'') zusammenfällt, wo also das entsprechende $\varkappa$ unendlich wird, während die andere in die Tangente übergeht, und dieser entspricht nothwendig der

andere Werth von x. Substituiren wir denselben in ihre Gleichung (3), so kommt, nach einer einfachen Reduction:

$$(y''+\alpha x''+\gamma)y+(\alpha y''+\beta x''+\delta)x+\gamma y''+\delta x''+\varepsilon = 0.\,^{*)} \qquad (5)$$

Die Form der Coefficienten von y und x in dieser Gleichung rechtfertigt sich leicht *a priori*.

268. Die End-Gleichung der vorigen Nummer ist symmetrisch in Beziehung auf y'', x'' und y, x, so daſs wir ihr also auch folgende Form geben können:

$$(y+\alpha x+\gamma)y''+(\alpha y+\beta x+\delta)x''+\gamma y+\delta x+\varepsilon = 0.$$

Wenn wir die Coordinaten irgend eines Punctes der durch diese Gleichung dargestellten Tangente kennen und diese Coordinaten-Werthe in die letzte Gleichung für y und x als constante Gröſsen substituiren, während wir y'' und x'' als veränderliche Gröſsen betrachten, und deshalb die Accente unterdrücken, so stellt die Gleichung:

$$(y'+\alpha x'+\gamma)y+(\alpha y'+\beta x'+\delta)x+\gamma y'+\delta x'+\varepsilon = 0, \qquad (6)$$

eine gerade Linie dar, welche den, eben durch (y'',x'') bezeichneten, Berührungs-Punct enthält. Eine solche gerade Linie begegnet der Curve noch in einem zweiten Puncte, in welchem die andere durch den Punct (y',x') gehende Tangente die Curve berührt. Wenn der Punct (y',x') auf der Curve selbst liegt, fällt diese Linie mit der Tangente zusammen, und hierdurch ist der Uebergang angezeigt, wo dieselbe zwar immer construirbar bleibt, aber der Curve nicht mehr begegnet, weil vom Puncte (y',x') sich keine Tangenten an dieselbe legen lassen. Die durch (6) dargestellte gerade Linie, bei deren geometrischer Bedeutung wir in den folgenden Paragraphen länger verweilen werden, heiſst die P o l a r e d e s P u n c t e s (y',x').

Dadurch, daſs für einen Punct der Curve die Polare mit der Tangente in diesem Puncte zusammenfällt, wird die oben erwähnte Symmetrie der Gleichung (5) bedingt.

Es ist gut, schon hier zu bemerken, daſs auch von Polaren für i m a g i n ä r e Linien zweiter Ordnung die Rede seyn kann.

Wir sehen ferner nicht sogleich, welche geometrische Bedeutung die Polare eines gegebenen Punctes in dem Falle hat, wo wir statt der Curve e i n S y s t e m z w e i e r g e-

*) D i e G l e i c h u n g (4) e n t h ä l t e b e n f a l l s d i e B e s t i m m u n g d e r R i c h t u n g d e r b e i d e n A s y m p t o t e n; wir brauchen zu diesem Ende nur $h = \frac{1}{0}$ zu setzen. Wir erhalten nemlich, indem wir alle Glieder durch h dividiren, und alsdann alle diejenigen, in welchen h als Divisor vorkommt, vernachlässigen:

$$x^2+2\alpha x+\beta = 0,$$

mithin, indem wir $\frac{y}{x}$ für x schreiben:

$$y^2+2\alpha xy+\beta y^2 = 0,$$

für die Gleichung des Systems zweier geraden Linien, die durch den Anfangs-Punct der Coordinaten gehen und den Asymptoten parallel sind.

Es erhellt auf diese Weise ganz allgemein, daſs man für eine Curve des m. Grades, ein System von m geraden Linien erhält, die den m Asymptoten der Curve parallel sind und durch den Anfangs-Punct der Coordinaten gehen, indem man die mit der höchsten Potenz der veränderlichen Gröſsen behafteten Glieder in der Gleichung der Curve, für sich allein genommen, gleich Null setzt. Es versteht sich hierbei von selbst, daſs die Asymptoten und die ihnen parallelen geraden Linien alle oder zum Theil imaginär seyn können.

raden Linien nehmen. Sey (y', x') wiederum der gegebene Punct, und jenes Linien-System das System der Axen selbst, und folglich dessen Gleichung:

$$xy = 0.$$

Für diese Annahme verwandelt sich die Gleichung (6) in folgende:

$$x'y + y'x = 0.$$

Die Polare geht also durch den Anfangs-Punct der Coordinaten, und ferner ist leicht ersichtlich, dafs jede durch den Punct (y', x') gehende gerade Linie von den beiden Linien des Systems und der Polaren harmonisch geschnitten wird (36, 49), denn geben wir der letzten Gleichung und derjenigen, welche die durch den Anfangs-Punct der Coordinaten und den Punct (y', x') gehende gerade Linie darstellt, folgende Formen:

$$y = \varkappa x, \quad y = \varkappa' x,$$

so ist offenbar:

$$\varkappa + \varkappa' = 0.$$

269. Wenn wir in der Gleichung (5) $y' = 0$ und $x' = 0$ setzen, so erhalten wir:

$$\gamma y + \delta x + \varepsilon = 0, \qquad (7)$$

für die Polare des Anfangs-Punctes der Coordinaten. Stellen wir diese Gleichung mit derjenigen geraden Linie zusammen, welche durch die Durchschnitts-Puncte zweier, den Asymptoten parallelen und durch den Anfangs-Punct gehenden, geraden Linien mit der Curve geht (Asymptoten-Chorde), also (261) mit der Gleichung:

$$2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon = 0,$$

so ist ersichtlich, dafs die bezüglichen Linien parallel sind und überdiefs der Anfangs-Punct von der erstern (7) noch einmal so weit absteht als von der letztern. Zunächst bezieht sich dieses Resultat auf die Hyperbel, und da wir über den Anfangs-Punct der Coordinaten keine nähere Bestimmung getroffen haben, so ist allgemein folgender Satz bewiesen:

Für jeden beliebigen Punct in der Ebene einer Hyperbel ist die Polare parallel der Asymptoten-Chorde und steht doppelt so weit von jenem Puncte ab als diese.

Fig. 7. In der 7. Figur, wo der beliebig angenommene Punct, O, aufserhalb liegt ist MM' die Asymptoten-Chorde und die Berührungs-Chorde NN' ist die Polare.

Wir können nach diesem Satze auf eine leichte Weise an eine gegebene Hyperbel, deren Asymptoten bekannt sind, von einem gegebenen Puncte aus Tangenten legen.

Die Deutung des obigen Resultats für den Fall der Parabel gibt folgende bekannten Sätze:

Wenn man von irgend einem Puncte in der Ebene einer Parabel Tangenten an dieselbe zieht, und durch denselben Punct einen Durchmesser legt, so ist die Berührungs-Chorde parallel der Tangente im Scheitel des Durchmessers, und also auch den zugeordneten Ordinaten desselben. Das zwischen dem beliebigen Puncte und der Berührungs-Chorde liegende Stück des Durchmessers wird im Durchschnitte mit der Curve halbirt.

Auch für die Ellipse kann von einer Asymptoten-Chorde die Rede seyn, welche wir nach dieser Nummer leicht construiren können.

270. Im vorigen Paragraphen sind wir die geometrische Construction des, von y und x unabhängigen, Gliedes der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades für den Fall noch schuldig geblieben, wo die bezügliche Curve keine Asymp-

toten hat und die zweite Axe derselben nicht begegnet. Folgende Bestimmung dieses Coefficienten ist keiner Beschränkung unterworfen. Setzen wir nemlich in der Gleichung:

$$\gamma y + \delta x + \varepsilon = o,$$

$x = o$, so kommt:

$$\varepsilon = -\gamma y,$$

also in Beziehung auf die 8. Figur, wo O der Anfangs-Punct der Coordinaten, OY die zweite Axe, und μ die Mitte der auf ihr interceptirten Chorde QQ' ist: Fig. 8.

$$\varepsilon = O\mu.\ O\varkappa. \qquad (1)$$

Wir haben hiernach ferner (256), welche Lage die durch den Punct O gehende gerade Linie auch haben mag:

$$OQ.OQ' = O\mu.\ O\varkappa. \qquad (2)$$

nach welcher Gleichung wir, wenn die Puncte O, Q und Q' gegeben sind, sogleich den Punct $\varkappa$ finden, d. h. wenn zwei Puncte einer Linie zweiter Ordnung bekannt sind, so können wir auf derjenigen geraden Linie, welche durch diese beiden Puncte geht, leicht den Punct bestimmen, in welchem dieselbe, von der Polaren jedes, beliebig auf ihr angenommenen, dritten Punctes geschnitten wird.

Wir können also auch, wenn irgend vier Puncte einer Linie zweiter Ordnung gegeben sind, die Polare jedes derjenigen drei Puncte bestimmen, in welchen die dreimal zwei geraden Linien, welche durch jene vier Puncte gehen, sich schneiden, z. B. wenn Q, Q', K, und K' die gegebenen Puncte sind, die Polare von O, des Durchschnittes von QQ' und KK'.

Wir können endlich, wenn fünf Puncte gegeben sind, beliebig viele Puncte derjenigen Linie zweiter Ordnung finden, die durch jene fünf Puncte geht. Wir erhalten z. B., wenn Q, Q', K, K' und G die gegebenen Puncte sind, einen sechsten Punct, wenn wir für O, den Durchschnitt von QQ' und KK', die Polare suchen, durch O und G eine gerade Linie legen, welche von jener Polaren in γ geschnitten wird, und endlich auf dieser geraden Linie einen Punct G' vermittelst folgender Gleichung:

$$OG\ OG' = O\nu.\ O\gamma,$$

welche der Gleichung (2) entspricht, construiren. ν bezeichnet die Mitte zwischen dem gegebenen Puncte G und dem gesuchten G'. Auf ähnliche Weise können wir so viele Puncte bestimmen, als wir wollen; wir brauchen hierzu im Ganzen nur zwei Polaren zu construiren.

Die angezeigte Construction erleidet nur unbedeutende Modificationen, wenn statt zwei oder vier der gegebenen fünf Puncte eine oder zwei Tangenten und auf denselben die Berührungs-Puncte gegeben sind.

171. Wir wollen in dieser Nummer die Bedingungs-Gleichung entwickeln, die Statt finden mufs, wenn eine gegebene Linie zweiter Ordnung:

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon = o, \qquad (1)$$

von einer gegebenen geraden Linie:

$$y = ax + b, \qquad (2)$$

berührt werden soll. Die Gleichung der geraden Linie mufs, bei dieser Voraussetzung, die Form der 5. Gleichung der 267 Nummer:

$$(y'' + \alpha x'' + \gamma)y + (\alpha y'' + \beta x'' + \delta)x + \gamma y'' + \delta x'' + \varepsilon = o,$$

in der (y'', x'') einen Punct der Curve bezeichnet, annehmen können. Diefs gibt uns folgende Gleichungen:

$$y''^2+2\alpha x''y''+\beta x''^2+2\gamma y''+2\delta x''+\varepsilon = 0,$$

$$-a = \frac{\alpha y''+\beta x''+\delta}{y''+\alpha x''+\gamma}, \qquad -b = \frac{\gamma y''+\delta x''+\varepsilon}{y''+\alpha x''+\gamma},$$

und wenn wir zwischen diesen drei Gleichungen die unbekannten Gröfsen y'' und x'' eliminiren, so erhalten wir die gesuchte Bedingungs-Gleichung.

Zu derselben Gleichung kommen wir leichter auf folgendem Wege. Wenn wir nemlich die Gleichung der Curve und der geraden Linie zusammenstellen, so erhalten wir im Allgemeinen zwei Werthe für jede der veränderlichen Gröfsen, die den beiden Durchschnitts-Puncten entsprechen. Die Werthe für x gibt z. B. folgende Gleichung:

$$(a^2+2\alpha a+\beta)x^2+2(ab+\alpha b+a\gamma+\delta)x+b^2+2\gamma b+\varepsilon = 0,$$

die wir erhalten indem wir den aus (2) genommenen Werth von y in (1) substituiren. Für den Fall der Berührung mufs diese Gleichung gleiche Wurzeln haben; diefs gibt uns folgende Bedingungs-Gleichung:

$$(ab+\alpha b+\alpha\gamma+\delta)^2-(b^2+2\gamma b+\varepsilon)(a^2+2\alpha a+\beta) = 0,$$

oder, wenn wir entwickeln, folgende:

$$(\alpha^2-\beta)b^2+2(\delta-\alpha\gamma)ab+2(\alpha\delta-\beta\gamma)b+(\gamma^2-\varepsilon)a^2+2(\gamma\delta-\alpha\varepsilon)a+(\delta^2-\beta\varepsilon) = 0. \qquad (3)$$

272. Die letzte Gleicung der vorigen Nummer verwandelt sich für den Fall, dafs die gerade Linie durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$pq+qx = pq,$$

in nachstehende Gleichung:

$$(\alpha^2-\beta)p^2q^2-2(\delta-\alpha\gamma)pq^2+2(\alpha\delta-\beta\gamma)p^2q+(\gamma^2-\varepsilon)q^2-2(\gamma\delta-\alpha\varepsilon)pq+(\delta^2-\beta\varepsilon)p^2 = 0, \quad (4)$$

indem wir q für b und $\left(-\frac{q}{p}\right)$ für a substituiren und mit p^2 multipliciren.

Die Gleichung (4) stellt, indem wir q und p als veränderliche Gröfsen betrachten, im Allgemeinen eine Linie der vierten Ordnung dar; diese Gleichung reducirt aber auf den zweiten Grad, wenn folgende beiden Gleichungen zugleich Statt finden:

$$\gamma^2-\varepsilon = 0, \qquad \delta^2-\beta\varepsilon = 0, \qquad (5)$$

d. h. wenn die gegebene Curve von den beiden Coordinaten-Axen berührt wird (263). Alsdann erhalten wir nemlich, indem wir alle Glieder durch pq dividiren, und q und p mit y und x vertauschen:

$$(\alpha^2-\beta)xy-2(\delta-\alpha\gamma)y+2(\alpha\delta-\beta\gamma)x-2(\gamma\delta-\alpha\varepsilon) = 0: \qquad (6)$$

die Gleichung einer Hyperbel, deren Asymptoten den beiden (die gegebene Curve berührenden) Coordinaten-Axen parallel sind. Die letzte Geichung geht in eine ähnliche über, wenn wir in dieselbe $\frac{y}{n}$ für y und $\frac{x}{1-n}$ für x substituiren (14). Wenn die gegebene Curve eine Hyperbel ist und wir dieselbe auf ihre Asymptoten beziehen und dem entsprechend:

$$xy+\varepsilon = 0,$$

für ihre Gleichung nehmen, so verwandelt sich (6) in folgende Gleichung:

$$xy+4\varepsilon = 0,$$

und wenn wir $\frac{y}{n}$ für y und $\frac{x}{1-n}$ für x substituiren, und $n = \frac{1}{2}$ nehmen, in die Gleichung der gegebenen Curve selbst, in:

$$xy+\varepsilon = 0.$$

Alle diese Resultate sind leicht geometrisch zu deuten, das letzte z. B. heifst anders nichts als dafs jede von den beiden Asymptoten begränzte, die Hyperbel berührende, gerade Linie im Berührungs-Puncte halbirt wird.

273. Ist die gegebene Curve eine Parabel und also: Fig. 9.

$$\alpha^2-\beta = o, \qquad (7)$$

so geht die Gleichung (6) in eine lineare über, nemlich in folgende:

$$(\delta-\alpha\gamma)y-(\alpha\delta-\beta\gamma)x+(\gamma\delta-\alpha\varepsilon) = o.$$

Diese Gleichung ist da nach (5) und (7):

$$\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\delta-\alpha\gamma} = \alpha, \quad \frac{\gamma\delta-\alpha\varepsilon}{\delta-\alpha\gamma} = \gamma,$$

gleichbedeutend mit folgender:

$$y-\alpha x+\gamma = o, \qquad (8)$$

und da wiederum:

$$\alpha = \pm\frac{\delta}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{\varepsilon}{\gamma},$$

und wir im Ausdrucke für α das negative Zeichen nehmen müssen, gleichviel ob wir vom Durchschnitte der Tangenten an, auf welche wir die Parabel beziehen, nach den Berührungen hin die positiven oder negativen y und x rechnen; so ist die 8. Gleichung identisch mit folgender:

$$\gamma y+\delta x+\varepsilon = o, \qquad (9)$$

mit der Gleichung der Polaren des Anfangs-Punctes der Coordinaten, d. h. der Berührungs-Chorde QP. Nehmen wir daher für die gerade Linie:

$$py+qx = pq,$$

die beliebige dritte Tangente MN, so liegt der vierte Winkel-Punct, S, desjenigen Parallelogrammes, dessen drei Winkel-Puncte in O, M und N fallen, auf der Berührungs-Chorde QP. Also:

Wenn eine Parabel und zwei feste an dieselbe gelegten Tangenten gegeben sind, so ist der Ort für die vierten Winkel-Puncte aller derjenigen Parallelogramme, deren drei Winkel-Puncte durch die Durchschnitte der beiden festen Tangenten unter sich und mit einer dritten beweglichen Tangente gegeben sind, eine gerade Linie; diejenige nemlich, welche die beiden Puncte, in welchen die Parabel von den festen Tangenten berührt wird, verbindet.

Wir können nach diesem Satze, wenn zwei gerade Linien gegeben sind, und auf jeder derselben ein Punct, beliebig viele Tangenten derjenigen Parabel bestimmen, welche die beiden gegebenen geraden Linien in den beiden gegebenen Puncten berührt.

Wenn drei Tangenten OP, OQ und MN gegeben sind, so können wir ferner für je zwei derselben einen Punct der Berührungs-Chorde, für OP und OQ z. B. den Punct S bestimmen, und diese Linie ist also bekannt, wenn überdiefs ein anderer Punct derselben gegeben ist.

Wenn vier gerade Linien gegeben sind, so können wir endlich beliebig viele Tangenten derjenigen Parabel, welche jene vier geraden Linien berührt, und auf diesen Tangenten die Berührungs-Puncte bestimmen. Seyen OP, OQ, MN und M'N' die vier gegebenen geraden Linien; alsdann können wir z. B. diejenigen Puncte finden, in welchen die beiden ersten derselben von der in

stehenden Parabel berührt werden, indem wir die beiden Puncte S und S', durch welche die Berührungs-Chorde geht, construiren. Nachdem diese beiden Berührungs-Puncte bestimmt sind, können wir beliebig viele Tangenten, und, ähnlich wie eben, auf jeder derselben den Berührungs-Punct bestimmen.

Fig. 10. 274. Wenn wir in der Gleichung (9) 2y für y und 2x für x substituiren, so geht dieselbe in folgende über:

$$2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

also in die Gleichung der Tangente in demjenigen Puncte, in welchem die Parabel von dem durch den Anfangs-Punct der Coordinaten, d. h. durch den Durchschnitt der beiden festen Tangenten, gehenden Durchmesser geschnitten wird (261). Diese Tangente ist also (14) der geometrische Ort der Mitten der von den beiden festen Tangenten interceptirten Stücke aller übrigen geraden Linien, welche die Parabel berühren.

Hiernach können wir wiederum, wenn vier gerade Linien gegeben sind, beliebig viele Tangenten derjenigen Parabel construiren, welche von den gegebenen Linien berührt wird. Sind OM, ON, MN und M'N' die vier gegebenen geraden Linien, so erhalten wir z. B. eine fünfte Tangente, indem wir eine gerade Linie durch die Mitten R und R' von MN und M'N' legen; und auf diese Weise können wir beliebig fortfahren, Tangenten zu construiren.

Beiläufig bemerken wir hier noch, dafs, für den Fall der Parabel, die Gleichung (4) sich auf den zweiten Grad reducirt, wenn eine der beiden Coordinaten-Axen die Parabel berührt, während die andere eine durchaus beliebige Lage hat.

275. Die Gleichung der Parabel nimmt eine symmetrische, bemerkenswerthe, Form an, wenn wir dieselbe auf irgend zwei ihrer Tangenten, als Coordinaten-Axen, beziehen. Zunächst geht nemlich die allgemeine Gleichung:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

vermittelst der drei Bedingungs-Gleichungen:

$$\alpha^2-\beta = 0, \quad \gamma^2-\varepsilon = 0, \quad \delta^2-\beta\varepsilon = 0,$$

in folgende über:

$$y^2-2\frac{\delta}{\gamma}xy+\frac{\delta^2}{\gamma^2}x^2+2\gamma y+2\delta x+\gamma^2 = 0.$$

(Wir nehmen hier wieder, wie in der 273. Nummer, $\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)$ für den Werth von α; $\frac{\delta}{\gamma} = \alpha$ entspricht einem Systeme zweier zusammenfallenden geraden Linien). Der letzten Gleichung können wir folgende Form geben:

$$(y+\frac{\delta}{\gamma}x+\gamma)^2 = 4\frac{\delta}{\gamma}xy,$$

und indem wir aus beiden Theilen derselben die Quadrat-Wurzel ziehen:

$$y+\frac{\delta}{\gamma}x\mp\gamma = 2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}x^{1/2}y^{1/2}.$$

Diese Gleichung können wir folgendermaafsen schreiben:

$$y+2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}x^{1/2}y^{1/2}+\frac{\delta}{\gamma}x = -\gamma,$$

und indem wir wiederum die Quadrat-Wurzel ausziehen:

$$y^{1/2}+\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}x^{1/2}=(-\gamma)^{1/2},$$

Um diese Gleichung in Beziehung auf die Constanten symmetrisch zu machen, brauchen wir nur, was auch leicht *a priori* ersichtlich ist, statt δ die Abscisse des Berührungs-Punctes auf der ersten Axe einzuführen. Bezeichnen wir diese Abscisse, negativ genommen, durch ξ, so ist:

$$\xi=\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma^2}{\delta},\qquad \text{mithin: } \delta=\frac{\gamma^2}{\xi}.$$

Hiernach verwandelt sich die letzte Gleichung in folgende:

$$y^{1/2}+\left(\frac{\gamma}{\xi}\right)^{1/2}x^{1/2}=(-\gamma)^{1/2},$$

und diese Gleichung können wir endlich noch unter folgenden beiden Formen schreiben:

$$(\xi y)^{1/2}+(\gamma x)^{1/2}=(-\gamma\xi)^{1/2},$$

$$\left(\frac{y}{\gamma}\right)^{1/2}+\left(\frac{x}{\xi}\right)^{1/2}=(-1)^{1/2}.$$

Damit der letzten Gleichung Genüge geschehen könne, müssen die beiden Glieder ihres ersten Theiles beide imaginär, also y und γ und x und ξ von entgegengesetzten Zeichen seyn, und hiernach bestimmt sich, in welchen der vier Coordinaten-Winkel die Parabel fällt. Wenn wir durch γ und ξ die Abstände der beiden Berührungs-Puncte vom Anfangs-Puncte, mit den ihnen zugehörigen Zeichen bestimmen, so erhalten wir statt der letzten beiden Gleichungen folgende:

$$(\xi y)^{1/2}+(\gamma x)^{1/2}=(\gamma\xi)^{1/2},$$

$$\left(\frac{y}{\gamma}\right)^{1/2}+\left(\frac{x}{\xi}\right)^{1/2}=1.$$

Hier ist nicht der Ort, an die Form dieser Gleichungen Entwicklungen anzuknüpfen. Für die Gleichung der Tangente in einem gegebenen Puncte der Curve, (y'',x''), erhalten wir, indem wir die letzten Gleichungen ähnlich behandeln, wie wir zu Anfang dieses Paragraphen die allgemeine Gleichung behandelt haben, folgende:

$$y-y''=\left(\frac{\xi y''}{\gamma x''}\right)^{1/2}(x-x'').$$

276. Wenn eine Linie zweiter Ordnung gegeben ist, so können wir, im Allgemeinen, zwei Tangenten an dieselbe legen, die einer gegebenen geraden Linie parallel sind. Diese beiden Tangenten sind durch die Richtung, welche dieselben haben sollen, und durch die Natur der Linie zweiter Ordnung, vollständig bestimmt und wir können daher offenbar das System derselben durch eine Gleichung des zweiten Grades ausdrücken, in welcher, als Constante, einzig die auf die gegebene Richtung sich beziehende Constante und die Constanten der Curve vorkommen, für deren Gleichung wir wieder folgende nehmen wollen:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon=0.$$

Die Form der gesuchten Gleichung des Tangenten-Systems ist folgende:

$$(y-ax-b')(y-ax-b'')=0,$$

oder wenn wir entwickeln:

$$(y-ax)^2-(b'+b'')(y-ax)+b'b''=0. \qquad (1)$$

In diesen Gleichungen ist a als gegeben anzusehen, während b' und b'' noch zu bestim-

mende Gröſsen sind. Die Gleichung (3) der 271. Nummer gibt unmittelbar zur Bestimmung derselben:

$$-(b'+b'') = 2\,\frac{(\delta-\alpha\gamma)a+(\alpha\delta-\beta\gamma)}{\alpha^2-\beta},$$

$$b'b'' = \frac{(\gamma^2-\varepsilon)a^2+2(\gamma\delta-\alpha\varepsilon)a+(\delta^2-\beta\varepsilon)}{\alpha^2-\beta};$$

und hiernach verwandelt sich die Gleichung (1) in folgende:

$$(\alpha^2-\beta)(y-ax)^2+2((\delta-\alpha\gamma)a+(\alpha\delta-\beta\gamma))(y-ax)+((\gamma^2-\varepsilon)a^2+2(\gamma\delta-\alpha\varepsilon)a+(\delta^2-\beta\varepsilon)) = 0. \quad (2)$$

Dieſs ist also die gesuchte Gleichung des Systems zweier parallelen Tangenten, deren Richtung durch a gegeben ist. Diese Gleichung schlieſst die Bedingung für die Möglichkeit der in Rede stehenden Tangenten in sich ein, die, im Allgemeinen, von der Möglichkeit der Curve und von der gegebenen Richtung abhängt. Für den Fall der Parabel reducirt sich der Grad der eben angezogenen Gleichung (3) der 271. Nummer in Beziehung auf b, es gibt nicht zwei parallele geraden Linien, welche die Parabel berühren. Wir erhalten:

$$2b = -\frac{(\gamma^2-\varepsilon)a^2+2(\gamma\delta-\alpha\varepsilon)a+(\delta^2-\beta\varepsilon)}{(\delta-\alpha\gamma)a+(\alpha\delta-\beta\gamma)},$$

und mithin für die Gleichung der Tangente:

$$2((\delta-\alpha\gamma)a+(\alpha\delta-\beta\gamma))(y-ax)+((\gamma^2-\varepsilon)a^2+2(\gamma\delta-\alpha\varepsilon)a+(\delta^2-\beta\varepsilon)) = 0. \quad (3)$$

Wenn die Gleichung der Parabel unter folgender Form erscheint:

$$y^2 = 2px,$$

so geht die Gleichung (271 (3)) in folgende über:

$$ab = \frac{p}{2},$$

Resultat, dessen geometrische Deutung einen bekannten Satz gibt. Der Gleichung (3) entspricht für diesen Fall folgende:

$$y = ax + \frac{p}{2a}. \quad (4)$$

277. Wir wollen uns in dieser Nummer damit beschäftigen, die Gleichung des Systems derjenigen beiden Tangenten, die an eine gegebene Linie zweiter Ordnung, von irgend einem gegebenen Puncte aus, gezogen werden können, zu entwickeln. Die Form der gesuchten Gleichung ist folgende:

$$((y-y')-a'(x-x'))((y-y')-a''(x-x')) = 0, \quad (5)$$

wo (y', x') der gegebene Punkt ist, und a' und a'' noch zu bestimmen übrig bleiben. Zu diesem Behufe wollen wir wieder zu der End-Gleichung der 271. Nummer zurückgehen. Wenn wir nemlich für die Form der gegebenen geraden Linie, welche die gegebene Curve berühren soll, folgende nehmen:

$$y-y' = a(x-x'),$$

so geht die eben erwähnte Gleichung, indem wir (y'+ax') für b substituiren, in folgende über:

$$((\alpha^2-\beta)x'^2-2(\delta-\alpha\gamma)x'+(\gamma^2-\varepsilon))a^2+2(-(\alpha^2-\beta)x'y'+(\delta-\alpha\gamma)y'-(\alpha\delta-\beta\gamma)x'+(\gamma\delta-\alpha\varepsilon))a$$
$$+((\alpha^2-\beta)y'^2+2(\alpha\delta-\beta\gamma)y'+(\delta^2-\beta\varepsilon)) = 0. \quad (6)$$

Bezeichnen wir die Wurzeln dieser Gleichung durch a' und a'', so haben wir:

$$-(a'+a'') = 2\,\frac{-(\alpha^2-\beta)x'y'+(\delta-\alpha\gamma)y'-(\alpha\delta-\beta\gamma)x'+(\gamma\delta-\alpha\varepsilon)}{(\alpha^2-\beta)x'^2-2(\delta-\alpha\gamma)x'+(\gamma^2-\varepsilon)},$$

$$a'a'' = \frac{(\alpha^2-\beta)y'^2+2(\alpha\delta-\beta\gamma)y'+(\delta^2-\beta\varepsilon)}{(\alpha^2-\beta)x'^2-2(\delta-\alpha\gamma)x'+(\gamma^2-\varepsilon)},$$

Die Gleichung (5) hat, entwickelt, folgende Form:

$$(y-y')^2-(a'+a'')(x-x')(y-y')+a'a''(x-x')^2=0,$$

und wenn wir für $(a'+a'')$ und $a'a''$ die eben gefundenen Werthe substituiren, so erhalten wir als gesuchte Gleichung folgende:

$$((\alpha^2-\beta)x'^2-2(\delta-\alpha\gamma)x'+(\gamma^2-\epsilon))(y-y')^2+2(-(\alpha^2-\beta)x'y'+(\delta-\alpha\gamma)y'-(\alpha\delta-\beta\gamma)x'+(\gamma\delta-\alpha\epsilon))$$
$$.(x-x')(y-y')+((\alpha^2-\beta)y'^2+2(\alpha\delta-\beta\gamma)y'+(\delta^2-\beta\epsilon))(x-x')^2=0,$$

die wir auch folgendermaaſsen ordnen können:

$$(\gamma^2-\epsilon)(y-y')^2+(\alpha^2-\beta)(xy'-x'y)^2+2(\delta-\alpha\gamma)(y-y')(xy'-x'y)+2(\alpha\delta-\beta\gamma)(x-x')(xy'-x'y)$$
$$+2(\gamma\delta-\alpha\epsilon)(x-x')(y-y')+(\delta^2-\beta\epsilon)(x-x')^2=0. \quad (7)$$

Für die Fälle, wo die allgemeine Gleichung der Linien zweiter Ordnung unter folgenden speciellen Formen erscheint:

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2,$$
$$A^2y^2-B^2x^2=\pm A^2B^2,$$
$$y^2=2px,$$

leiten wir aus der Gleichung (7) folgende Gleichungen her:

$$A^2(y-y')^2-(xy'-xy')^2+B^2(x-x')^2=0, \quad (8)$$
$$\mp A^2(y-y')^2-(xy'-x'y)^2\pm B^2(x-x')^2=0, \quad (9)$$
$$2(y-y')(xy'-x'y)-p(x-x')^2=0. \quad (10)$$

Der Vortheil, den wir aus diesen Entwicklungen ziehen können, wird später recht augenscheinlich werden.

Wir hätten unmittelbar aus der Gleichung (6) zu den Gleichungen (2) und (7) übergehen können; wir erhalten nemlich die Gleichung des Systems zweier parallelen Tangenten, deren Richtung durch a angezeigt wird, indem wir bloſs in (6) y' und x' als veränderliche Gröſsen betrachten; die Gleichungen (2) und (6) sind, abgesehen von den Accenten, identisch. Wir erhalten die Gleichung des Systems zweier Tangenten, die durch einen gegebenen Punct (y', x') gehen, mithin die Gleichung (7), indem wir in (6) für a substituiren:

$$\frac{y-y'}{x-x'}.$$

278. Wir knüpfen an diesen Paragraphen schlieſslich noch folgende Entwicklung. Wenn wir voraussetzen, daſs die Gleichung irgend einer Linie zweiter Ordnung:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\epsilon=0, \quad (1)$$

auf zwei Tangenten als Coordinaten-Axen bezogen sey, und die beiden Gleichungen:

$$py+qx=pq, \quad (2)$$
$$p'y+q'x=p'q',$$

eine dritte und vierte Tangente darstellen sollen, so haben wir folgende beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$(\alpha^2-\beta)pq-2(\delta-\alpha\gamma)q+2(\alpha\delta-\beta\gamma)p-2(\gamma\delta-\alpha\epsilon)=0,$$
$$(\alpha^2-\beta)p'q'-2(\delta-\alpha\gamma)q'+2(\alpha\delta-\beta\gamma)p'-2(\gamma\delta-\alpha\epsilon)=0.$$

Ziehen wir diese beiden Gleichungen von einander ab, so kommt:

$$(\alpha^2-\beta)(pq-p'q')-2(\delta-\alpha\gamma)(q-q')+2(\alpha\delta-\beta\gamma)(p-p')=0,$$

und wenn wir alle Glieder dieser Gleichung durch $(\alpha^2-\beta)$ dividiren, und

$$\frac{\delta-\alpha\gamma}{\alpha^2-\beta}=x,\quad \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha^2-\beta}=y,$$

setzen, so ergibt sich:

$$2(p-p')y-2(q-q')x+pq-p'q'=0. \quad (3)$$

(y, x) bedeutet den Mittelpunkt der durch (1) dargestellten Linie zweiter Ordnung, und da in der letzten Gleichung die Constanten der Gleichung (1) nicht mehr vorkommen, so bezeichnet dieselbe, indem wir y und x als veränderliche Gröfsen betrachten, den geometrischen Ort für die Mittelpuncte aller Linien zweiter Ordnung, welche von den beiden, zu Coordinaten-Axen genommenen, und den beiden durch (2) dargestellten geraden Linien berührt werden. Dieser Ort ist also eine gerade Linie. Wir sehen sogleich aus der Form der Gleichung (3), dafs die bezügliche gerade Linie durch die beiden Puncte:

$$\left(\frac{q}{2}, \frac{p'}{2}\right) \text{ und } \left(\frac{q'}{2}, \frac{p}{2}\right)$$

geht. Diese Punkte sind aber offenbar die Mitten zweier Diagonalen der, von den vier Tangenten gebildeten, vollständigen vierseitigen Figur. Wir können also leicht die in Rede stehende gerade Linie construiren; und es ist hierbei einerlei, welche beiden der drei Diagonalen der vierseitigen Figur wir nehmen (eine schickliche Wahl zweier andern Tangenten zu Coordinaten-Axen hätte uns zu zweien andern Diagonalen geführt); woraus denn folgt, dafs die Mitten der drei Diagonalen jeder vollständigen vierseitigen Figur in gerader Linie liegen, und somit haben wir folgenden, von Newton herrührenden, Satz bewiesen:

Die Mittelpunkte aller Linien zweiter Ordnung, welche vier feste gerade Linien berühren, liegen auf derjenigen geraden Linie, welche durch die Mitten der Diagonalen der, von den festen geraden Linien gebildeten, vollständigen vierseitigen Figur geht.

Es ist offenbar, dafs die Gleichung (3) der eben construirten geraden Linie auch ein Durchmesser derjenigen Parabel ist, welche die vier festen geraden Linien berührt.

Nach dem eben bewiesenen Satze können wir, wenn fünf gerade Linien gegeben sind, den Mittelpunct derjenigen Curve zweiter Ordnung finden, welche die gegebenen fünf geraden Linien berührt. Durch diese Linien sind nemlich fünf verschiedene vierseitige Figuren bestimmt, und wir können also fünf gerade Linien construiren, die alle fünf sich im gesuchten Mittelpunkte vereinigen.

§. 5.

Zusammenstellung ähnlicher Linien zweiter Ordnung.

279. Wir haben schon in dem Früheren solche Linien zweiter Ordnung, die, auf dasselbe Coordinaten-System bezogen, durch Gleichungen dargestellt werden, in denen die drei ersten Glieder übereinstimmend sind, ähnliche und ähnlich liegende genannt. Der Kürze des Ausdrucks halber, wollen wir in diesem Paragraphe unter „ähnlichen Curven" durchgehends solche verstehen, die zugleich eine ähnliche Lage haben. Zwei Gleichungen von folgender Form:

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon = 0, \quad (1)$$
$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma' y + 2\delta' x + \varepsilon' = 0,$$

bezeichnen nach unserer Definition, wie wir auch γ, δ, ε und γ', δ', ε' bestimmen mögen, ähnliche Curven. Es ordnen sich demgemäfs ein Punct und imaginäre Curven mit ähnlichen Ellipsen zusammen. Alle solche Hyperbeln, deren Asymptoten parallel

sind, sind unter einander ähnlich, und ein System irgend zweier den Asymptoten parallelen geraden Linien, ist als eine ähnliche Hyperbel anzusehen. Da wir aus der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades für den besondern Fall, daſs dieselbe eine Parabel darstellt, immer das zweite und dritte Glied zugleich durch Aenderung der Coordinaten-Richtung wegbringen können, so kommt bei der Aehnlichkeit der Parabeln Alles nur auf die Lage derselben an; Parabeln sind ähnlich, sobald die Richtung der Durchmesser dieselbe ist. Mit ähnlichen Parabeln gehören Systeme irgend zweier Durchmesser derselben, die auch zusammenfallen und imaginär werden können, als ähnliche Linien zweiter Ordnung zusammen.

Wenn wir die beiden Gleichungen (1), durch welche wir irgend zwei beliebige ähnliche Curven — diese Curven mögen reell seyn oder nicht — darstellen, von einander abziehen, so erhalten wir:

$$(\gamma-\gamma')y+(\delta-\delta')x+(\varepsilon-\varepsilon') = 0: \qquad (2)$$

die Gleichung einer geraden Linie, die wir leicht construiren können. Dieser geraden Linie geben wir, ganz allgemein, den Namen: Chordale der beiden ähnlichen Linien zweiter Ordnung. Im Falle reeller Durchschnitte der Curven, deren es, der linearen Form der Gleichung (2) wegen, nur zwei geben kann, ist die Chordale der beiden Curven ihre gemeinschaftliche Chorde.

Auf diese Weise ist eine Reihe von Beziehungen angedeutet, die denjenigen entsprechen, bei welchen wir im zweiten Abschnitte umständlich verweilt haben: denn auch alle beliebige Kreise in derselben Ebene sind als ähnliche Curven anzusehen. In den nächsten Erörterungen wollen wir nur Einzelnes hervorheben und auch hier möglichst kurz seyn.

280. Die folgenden beiden Gleichungen bezeichnen zwei ähnliche Linien zweiter Ordnung:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0, \qquad (1)$$

$$(y-y')^2+2\alpha(x-x')(y-y')+\beta(x-x')^2 = 0, \qquad (2)$$

wo wir durch (y', x') irgend einen gegebenen Punkt bezeichnen. Für die Chordale erhalten wir durch Abziehen folgende Gleichung:

$$2(y'+\alpha x'+\gamma)y+2(\alpha y'+\beta x'+\delta)x-y'^2-2\alpha x'y'-\beta x'^2+\varepsilon = 0. \qquad (3)$$

Wenn die Gleichung (1) eine Hyperbel darstellt, so bezeichnet (2) ein System zweier geraden Linien, die den Asymptoten der Hyperbel parallel sind, und durch den Punct (y', x') gehen. Nehmen wir in der 5. Figur O für diesen Punct, so sind durch (2) die beiden geraden Linien OM und OM' gegeben und MM' ist also die durch (3) dargestellte Chordale. Wenn der Punkt O der Curve immer näher rückt, indem er etwa immer auf OM bleibt, so nähert sich M', der Durchschnitt der zweiten geraden Linie OM' mit der Hyperbel, immer mehr dem Puncte M, und wenn endlich der Punct O oder (y', x') auf der Hyperbel selbst angenommen wird, so geht die Chordale MM' in die Tangente im Puncte (y', x') über, und diese Tangente wird alsdann durch die Gleichung (3) dargestellt. Fig. 5.

Wenn die Gleichung (1) eine Parabel darstellt, so bezeichnet (2) ein System zweier zusammenfallenden Durchmesser, die durch den gegebenen, beliebigen Punct (y', x') gehen, und (3) stellt also die Tangente in demjenigen Puncte dar, wo die Curve von diesen Durchmessern geschnitten wird. Wir erhalten allgemein die Gleichung einer geraden Linie, die in irgend zweien gegebenen Puncten, M und M', eine gegebene Parabel schnei- Fig. 6.

det, wenn wir die Gleichung des Systems derjenigen beiden Durchmesser, die durch die Puncte M und M' gehen, von der Gleichung der Parabel abziehen. Für die Gleichung eines solchen Systems von zwei Durchmessern können wir folgende nehmen:

$$(y-y')(y-y'')+\alpha((x-x')(y-y'')+(x-x'')(y-y'))+\beta(x-x')(x-x'')=0,$$

wo (y',x') und (y'',x'') irgend zwei Puncte der beiden Durchmesser bedeuten. Die letzte Gleichung geht in die Gleichung (2) über, wenn wir $y''=y'$ und $x''=x'$ nehmen, und dem entsprechend geht die Secante MM' über in die Tangente in M, wenn auf dem, durch diesen Punct gehenden, Durchmesser der Punct (y',x') liegt.

Wenn die Gleichung (1) eine Ellipse darstellt, so bezeichnet (2) den einzelnen Punct (y',x'). Liegt dieser Punct auf der Ellipse, so mufs die durch (3) dargestellte gerade Linie nothwendig durch diesen Punct gehen, eben weil derselbe zugleich ein Punct der Ellipse ist, darf aber mit dieser letztern weiter keinen Punct mehr gemein haben: diese Linie ist also wiederum eine Tangente im gegebenen Puncte (y',x').

Wenn der Punct (y',x') auf der durch (1) gegebenen Curve liegt, so ergibt sich folgende Bedingungs-Gleichung zwischen y' und x':

$$y'^2+2\alpha x'y'+\beta x'^2+2\gamma y'+2\delta x'+\varepsilon=0,$$

und hiernach reducirt sich die Gleichung (3), wenn wir zugleich, um den Fall, wo der Punct (y',x') auf der Curve liegt, zu unterscheiden, denselben durch (y'',x'') bezeichnen, auf folgende Gleichung:

$$(y''+\alpha x''+\gamma)y+(\alpha y''+\beta x''+\delta)x+\gamma y''+\delta x''+\varepsilon=0:$$

dieselbe Gleichung, die wir früher schon für die Gleichung der Tangente im Puncte (y'',x'') gefunden haben (267). *)

*) Die im Texte entwickelte Tangenten-Methode für Linien zweiter Ordnung erleidet Modificationen, wenn wir sie auf Linien höherer Ordnung ausdehnen wollen. Sey

$$y^3+\alpha xy^2+\beta x^2y+\gamma x^3+\delta y^2+\varepsilon xy+\varkappa x^2+\lambda y+\xi x+\tau=0, \qquad (a)$$

die allgemeine Gleichung des dritten Grades. Wir wollen, um kurz zu seyn und um zugleich die Ideen zu fixiren, annehmen, die drei Asymptoten der Curve seyen alle drei reell. Alsdann stellt (267, Note) folgende Gleichung:

$$(y-y')^3+\alpha(x-x')(y-y')^2+\beta(x-x')^2(y-y')+\gamma(x-x')^3=0, \qquad (b)$$

das System dreier geraden Linien dar, die den Asymptoten parallel sind und durch irgend einen beliebig angenommenen Punct (y',x') gehen. Ziehen wir die beiden Gleichungen (a) und (b) von einander ab, so erhalten wir eine Gleichung des zweiten Grades. Wir sehen hieraus, dafs die beiden durch (a) und (b) dargestellten geometrischen Oerter sich im Allgemeinen in $2.3=6$ Puncten schneiden, und dafs diese sechs Puncte auf derselben Linie zweiter Ordnung liegen. Wird der Punct (y',x') auf der Curve (a) angenommen, so vereinigen sich drei der sechs Durchschnitts-Puncte in einen einzigen: die durch die resultirende Gleichung des zweiten Grades dargestellte Curve osculirt die gegebene Curve des dritten Grades.

Wenn wir die allgemeine Gleichung des m. Grades betrachten, deren mit der höchsten Potenz behafteten Glieder folgende seyn mögen:

$$y^m+\alpha xy^{m-1}+\beta x^2y^{m-2}+\ .\ .\ .\ +\varkappa x^{m-1}y+\lambda x^m, \qquad (c)$$

so erhalten wir eine Gleichung des (m—1). Grades, wenn wir von derselben folgende Gleichung:

$$(y-y')^m+\alpha(x-x')(y-y')^{m-1}+\beta(x-x')^2(y-y')^{m-2}+\ ..\ +\varkappa(x-x')^{m-1}(y-y')+\lambda(x-x')^m=0.$$

281. Wenn die Gleichungen irgend zweier ähnlichen Curven zweiter Ordnung gegeben sind, so erhalten wir alle möglichen Curven, welche mit diesen dieselbe Chordale haben, indem wir ihre Gleichungen auf beliebige Weise zu einer Gleichung desselben Grades verbinden. Zu diesem Ende brauchen wir nur die beiden gegebenen Gleichungen, für welche wir folgende nehmen wollen:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0, \quad (1)$$
$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma' y+2\delta' x+\varepsilon' = 0,$$

zu addiren, nachdem wir eine derselben, etwa die zweite, mit einem unbestimmten Factor μ multiplicirt haben. Auf diese Weise erhalten wir, indem wir zugleich durch $(1+\mu)$ alle Glieder dividiren:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\frac{\gamma+\mu\gamma'}{1+\mu}y+2\frac{\delta+\mu\delta'}{1+\mu}x+\frac{\varepsilon+\mu\varepsilon'}{1+\mu} = 0. \quad (2)$$

Statt die Gleichungen der beiden Curven zu verbinden, hätten wir auf gleiche Weise auch die Gleichung einer derselben mit der Gleichung ihrer Chordalen:

$$2(\gamma-\gamma')y+2(\delta-\delta')x+(\varepsilon-\varepsilon') = 0, \quad (3)$$

abzieht. Diese letzte Gleichung stellt ein System von m geraden Linien dar, die den Asymptoten der Curve des m. Grades parallel sind, und alle im Puncte (y', x') sich vereinigen. Diese m geraden Linien schneiden die Curve des m. Grades im Allgemeinen in $m(m-1)$ Puncten und diese $m(m-1)$ Puncte liegen auf ein und derselben Linie der $(m-1)$. Ordnung, deren Gleichung man durch Abziehen erhält. In dem Falle, wo der Punct (y', x') auf der Curve des m. Grades selbst angenommen wird, wird dieselbe von der eben bestimmten Curve des $(m-1)$. Grades $(m-1)$ punctig osculirt, und überdieſs noch in $(m-1)^2$ Puncten geschnitten; diese Durchschnitts-Puncte können sich zu neuen Osculations-Puncten verschiedener Ordnung vereinigen, was z. B. in dem Falle geschieht, daſs der Ausdruck (c) sich in mehrere gleiche Factoren des ersten Grades zerlegen läſst.

Wir wollen noch die Gleichung eines beliebigen Grades betrachten, in welcher das constante Glied fehlt, und dieselbe kurz auf folgende Weise bezeichnen:

$$A_m+A_{m-1}+A_{m-2}+\ldots\ldots+A_3+A_2+A_1 = 0, \quad (d)$$

indem wir uns in A_m alle Glieder zusammengezogen denken, in denen y und x in der m. Potenz vorkommen, in A_{m-1} alle Glieder, in welchen diese Gröſsen in der $(m-1)$. Potenz vorkommen, und so fort. Alsdann wird die Curve (d) von folgender:

$$A_{m-1}+A_{m-2}+\ldots\ldots+A_3+A_2+A_1 = 0, \quad (e)$$

$(m-1)$ punctig osculirt; (d) und (e) werden von:

$$A_{m-2}+\ldots\ldots+A_3+A_2+A_1 = 0, \quad (f)$$

$(m-2)$ punctig osculirt und so fort. (d), (e), (f) und alle vorhergehenden werden von:

$$A_3+A_2+A_1 = 0, \quad (g)$$

4punctig; (d), (e), (f) . . . (g) von:

$$A_2+A_1 = 0, \quad (h)$$

3punctig osculirt und endlich (d), (e), (f) . . (g) und (h) von der geraden Linie:

$$A_1 = 0,$$

einfach berührt.

verbinden können. Wir sehen aus der Form der Gleichung (2) — in welcher das mit der ersten Potenz von x oder y behaftete Glied verschwindet, wenn das entsprechende Glied in den ursprünglich gegebenen Gleichungen (1) fehlt — daſs die Mittelpuncte aller, in Rede stehenden, Curven in gerader Linie liegen. Diese gerade Linie wollen wir als zweite Axe nehmen, und überdieſs die Richtung der ersten Axe so bestimmen, daſs α verschwindet. Alsdann erhalten die Gleichungen (1) folgende Form:

$$\begin{aligned} y^2+\beta x^2+2\gamma y+\varepsilon &= 0, \\ y^2+\beta x^2+2\gamma' y+\varepsilon' &= 0, \end{aligned} \qquad (4)$$

und für die Gleichung der Chordalen erhalten wir nachstehende:

$$2(\gamma-\gamma')y+(\varepsilon-\varepsilon') = 0; \qquad (5)$$

woraus wir zunächst sehen, daſs die Chordale denjenigen Durchmessern der gegebenen Curven parallel ist, deren zugeordnete in die zweite Axe fallen. Wenn wir die Chordale selbst zur ersten Axe nehmen, so gibt uns die letzte Gleichung folgende Bedingungs-Gleichung zwischen den Constanten:

$$\varepsilon - \varepsilon' = 0.$$

Bei einer solchen Axen-Bestimmung geht die Gleichung (2) in folgende über:

$$y^2+\beta x^2+2\frac{\gamma+\mu\gamma'}{1+\mu}y+\varepsilon = 0. \qquad (6)$$

Soll diese Gleichung ein System zweier geraden Linien ausdrücken, so muſs dieselbe, durch eine schickliche Annahme des unbestimmten Coefficienten μ, folgende Form annehmen können:

$$(y-y')^2+\beta x^2 = 0,$$

wo zugleich das Zeichen von β bestimmt, ob wir wirklich zwei reelle gerade Linien erhalten, die sich im Puncte $(y',0)$ schneiden, oder nur einen Punct $(y',0)$. Die Vergleichung der letzten beiden Gleichungen gibt:

$$\frac{\gamma+\mu\gamma'}{1+\mu} = -y', \quad \varepsilon = y'^2, \qquad (7)$$

und hieraus erhalten wir zur Bestimmung von μ folgende Gleichung:

$$(\gamma'^2-\varepsilon)\mu^2+2\mu(\gamma\gamma'-\varepsilon)+(\gamma^2-\varepsilon) = 0. \qquad (8)$$

Diese Gleichung gibt, im Allgemeinen, zwei Werthe für μ, die, wie die Werthe von y', nur dann reell sind, wenn ε positiv ist. Ob ε positiv oder negativ ist, wird durch die Lage des Anfangs-Punctes der Coordinaten und die Richtung der zweiten Axe bestimmt. Wenn die beiden Gleichungen (4) Ellipsen darstellen, so liegt, wenn ε und ε' positiv seyn sollen, der Anfangs-Punct nothwendig auſserhalb beider Curven, und da überdieſs die zweite Axe durch die Mittelpuncte derselben geht, und die erste Axe denjenigen Durchmessern parallel ist, welche den, in die zweite Axe fallenden, zugeordnet sind, so begegnet die erste Axe, oder, mit anderen Worten, die Chordale, keiner der beiden Ellipsen, die also auch in diesem Falle einander nicht schneiden. Nur unter dieser Bedingung gehören in die Zahl derjenigen Oerter zweiter Ordnung, die mit den beiden gegebenen Ellipsen dieselbe Chordale haben, zwei Puncte, und diese Puncte liegen alsdann zu beiden Seiten der Chordalen gleich weit von derselben entfernt. ε ist immer positiv, und also sind die Werthe von y' reell, wenn die beiden durch (4) gegebenen Curven imaginär sind.

Fig. 11. Wenn die beiden Gleichungen (4) Hyperbeln darstellen, so muſs, damit ε und ε' positiv seyen, die zweite Axe entweder keine der beiden Hyperbeln schneiden, oder beide in solchen zwei Puncten, die nach derselben Seite des Anfangs-Punctes der Coordinaten

hin liegen, oder endlich diese Axe mufs der einen Hyperbel gar nicht und der andern in zwei nach derselben Seite des Anfangs-Punctes hin liegenden Puncten begegnen. In den beiden ersten Fällen liegen die beiden Hyperbeln in entsprechenden Asymptoten-Winkeln, in dem dritten Falle nicht. Auf diesen letzten Fall bezieht sich die 11. Figur, in der sich die Asymptoten der einen Hyperbel in C, die Asymptoten der andern in C′ schneiden. In allen Fällen begegnet, nach den früheren Bestimmungen, die erste Axe beiden Curven, woraus dann ersichtlich ist, dafs je zwei beliebige Hyperbeln, deren Asymptoten parallel sind, sich immer in zwei reellen Puncten schneiden. Durch diese beiden Puncte können wir zwei Systeme von zwei geraden Linien legen, die den Asymptoten parallel sind, und deren Gleichungen in der allgemeinen Gleichung (6) enthalten sind. Für den Fall der 11. Figur ist MN die Chordale; MQ und NQ, MR und NR sind die beiden Systeme, und Q und R die Durchschnitts-Coordinaten der beiden Linien jedes Systems. Diese Durchschnitte fallen in die zweite Coordinaten-Axe, d. h. in diejenige gerade Linie, die durch C und C′ geht.

Die Gleichung (8) reducirt sich nur dann auf den ersten Grad, wenn eine der folgenden beiden Gleichungen Statt findet:

$$\gamma^2 - \varepsilon = 0, \quad \gamma'^2 - \varepsilon = \gamma'^2 - \varepsilon' = 0;$$

also nur in dem Falle, dafs ursprünglich schon eine der beiden Gleichungen (4), je nachdem β positiv oder negativ ist, einen Punct oder ein System zweier geraden Linien bezeichnet. Wenn also die Gleichungen (4) eine Ellipse und einen Punct ausdrücken, so lassen sich dieselben immer noch zu der Gleichung eines zweiten Punctes verbinden.

Die Gleichung der Tangente in irgend einem Puncte (y″,x″) der, durch eine der Gleichungen (4), etwa durch die erste derselben, dargestellten, Ellipsen oder Hyperbeln ist folgende:

$$(y'' + \gamma)y + \beta x'' x + \gamma y'' + \varepsilon = 0.$$

Setzen wir, um den Durchschnitt dieser Tangente mit der zweiten Axe zu bestimmen, in der letzten Gleichung x = 0, so kommt:

$$y''y + \gamma(y'' + y) + \varepsilon = 0.$$

Diese Gleichung, welche in Beziehung auf y″ und y symmetrisch ist, wird befriedigt, wenn wir für y″ und y die Wurzeln der Gleichung:

$$y'^2 - \varepsilon = 0,$$

nehmen. Hieraus erhellet, dafs zwischen den beiden Puncten, zu deren Gleichungen sich die Gleichungen zweier ähnlichen Ellipsen verbinden lassen, so wie zwischen den Durchschnitten der geraden Linie zweier Systeme, deren Gleichungen durch Verbindung der Gleichungen zweier Hyperbeln, deren Asymptoten parallel sind, sich ergeben: dieselbe Beziehung Statt findet, als zwischen irgend einem gegebenen Puncte und der Mitte derjenigen Chorde, welche auf einer beliebigen der beiden Curven die Puncte verbindet, in welchen dieselbe von den, durch den gegebenen Punct gehenden, Tangenten berührt wird. Die eben bezeichneten Puncte sind zugeordnete Pole für jede der beiden gegebenen Curven und für jede andere, ihnen ähnliche, welche dieselbe Chordale hat.

In der 11. Figur sind Q und R die beiden zugeordneten Pole für jede der beiden Hyperbeln C und C′; diese Pole liegen beide aufserhald der Hyperbel C, während einer derselben, Q, innerhalb, der andere, R, aufserhalb der Hyperbel C′ liegt. Ziehen wir von Q aus Tangenten an C und C′, so liegen die vier Berührungs-Puncte, V, U, V′ und U′,

in gerader Linie, und diese gerade Linie geht durch R; von R aus können wir nur an C Tangenten legen, die entsprechende Berührungs-Chorde WZ geht durch Q.

Wenn eine der Gleichungen (4) schon einen Punct oder ein System zweier sich schneidenden geraden Linien bedeutet, so erhalten wir durch eine gehörige Verbindung dieser Gleichungen im ersten Falle die Gleichung des zugeordneten Poles, in dem zweiten die Gleichung eines neuen Systems zweier geraden Linien, die sich in einem Puncte schneiden, der der zugeordnete Pol des Durchschnittes der Linien des ersten Systems ist.

Wenn man irgend ein Parallelogramm beschreibt, dessen Seiten den Asymptoten einer gegebenen Hyperbel parallel sind, und dessen zwei Winkel-Puncte auf der Hyperbel sich befinden, so sind die beiden übrigen Winkel-Puncte des Parallelogrammes zugeordnete Pole. Man kann hiernach leicht für irgend einen gegebenen Punct den zugeordneten Pol construiren, wenn die Richtung der Asymptoten bekannt ist.

Die Polare eines Punctes ist der Chordalen parallel und geht durch den zugeordneten Pol desselben.

Die Chordale zweier Puncte halbirt diejenige gerade Linie, welche diese Puncte verbindet; ihre Richtung hängt, wenn wir die beiden Puncte durch die Gleichungen (4) ausdrücken, von dem Coefficienten β ab, oder mit anderen Worten, von der Natur und der gegenseitigen Lage der beiden ähnlichen Ellipsen, die, ihren Character bis zum Verschwinden beibehaltend, auf jene Puncte sich reducirt haben.

Die Chordale zweier Systeme von zwei sich schneidenden geraden Linien, die ein Parallelogramm bilden, ist eine Diagonale dieses Parallelogrammes.

232. Für die Gleichungen zweier Parabeln, deren Durchmesser parallel sind, können wir folgende nehmen:

$$y^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon = 0,$$
$$y^2 + 2\gamma' y + 2\delta' x + \varepsilon' = 0.$$

Diese beiden Gleichungen können wir nur auf eine einzige Weise zu der Gleichung eines Systems von zwei geraden Linien verbinden. Wir müssen zu diesem Ende x climiniren, und erhalten, indem wir demzufolge beide Gleichungen von einander abziehen, nachdem wir zuvor die erste mit δ', die zweite mit δ multiplicirt haben, folgende Gleichung:

$$(\delta' - \delta)y^2 + (\delta'\gamma - \delta\gamma')y + \delta'\varepsilon - \delta\varepsilon' = 0.$$

Die durch diese Gleichung bezeichneten geraden Linien sind zwei Durchmesser, die aber auch in einen einzigen zusammenfallen und imaginär seyn können. Den verschiedenen Fällen entspricht, dafs die beiden Parabeln sich schneiden, berühren oder keinen Punct gemein haben.

Für jede von zwei ähnlich liegenden Parabeln sind zugeordnete Pole je zwei Puncte, die auf einem beliebigen der durch die Durchschnitte der Parabeln gehenden Durchmesser sich befinden, und gleich weit von dem Scheitel dieses Durchmessers abstehen.

233. Wir wollen in dieser Nummer drei ähnliche Linien zweiter Ordnung zusammenstellen, und die Gleichung derselben kurz auf folgende Weise bezeichnen:

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = 0, \qquad (1)$$

Alsdann erhalten wir für die Chordalen je zweier derselben folgende Gleichungen des ersten Grades:

$$A - A' = 0, \quad A - A'' = 0, \quad A' - A'' = 0, \qquad (2)$$

von denen irgend zwei die dritte bedingen. Es schneiden sich also die eben bezeichneten drei Chordalen in ein und demselben Puncte, den wir „den Chordal-Punct der drei ähnlichen Linien zweiter Ordnung" nennen *).

Für die durch (1) dargestellten Curven können wir drei Ellipsen nehmen, oder auch statt einer oder zwei derselben, oder statt aller drei, Puncte. Wir können ferner drei Parabeln nehmen, und erhalten auch dann noch ein geometrisches Resultat, wenn wir eine derselben mit einem Systeme zweier Durchmesser, die auch in einen einzigen zusammenfallen können, vertauschen. Wir können endlich auch drei Hyperbeln zusammenstellen und beliebig statt derselben Systeme von zwei, den Asymptoten parallelen, geraden Linien nehmen.

Nehmen wir drei Systeme von geraden Linien, so ist in obigem Schema der Satz der 73. Nummer bewiesen, und wir erhalten zugleich noch eine geometrische Bedeutung des Durchschnitts-Punctes der drei Chordalen. Es seyen nemlich M, M' und M'' die Durchschnitts-Puncte der Linien jedes Systems, und diese Puncte mögen sich auf irgend einer Hyperbel befinden und die Linien jedes Systems den Asymptoten derselben parallel seyn. Der Chordal-Punct C, in welchem sich P''Q'', P'Q' und PQ vereinigen, ist alsdann der Mittelpunct der Hyperbel. Hiervon überzeugen wir uns sogleich, denn PQ z. B. geht durch P und Q, durch die Durchschnitte der Linien zweier anderen Systeme, die beide mit der Hyperbel M''M' zur Chordalen haben, woraus nach der vorigen Nummer folgt, dafs P und Q in gerader Linie mit dem Mittelpuncte der Hyperbel liegen. Fig. 12.

Wir können hiernach, wenn irgend drei Puncte und zwei gerade Linien gegeben sind, den Mittelpunct derjenigen Hyperbel finden, die durch jene drei Puncte geht, und deren Asymptoten den beiden gegebenen geraden Linien parallel sind, und alsdann die Hyperbel selbst leicht construiren.

Wir wollen, als besondern Fall, zuletzt noch die Zusammenstellung einer Hyperbel und zweier Systeme von zwei geraden Linien betrachten. In der 13. Figur seyen diese beiden Systeme CM, CM''' und C'M', C'M''; alsdann ist P der Chordal-Punct, in welchem Puncte sich MM''', M'M'' und RQ, Diagonale des Parallelogrammes CC', schneiden. Hiernach können wir, wenn die Richtung der beiden Asymptoten und irgend drei Puncte der Hyperbel (M'M''M''') gegeben sind, sogleich einen vierten Punct (M) finden, der auf einer beliebig durch einen der gegebenen Puncte (M''') gelegten geraden Linie (PM''') oder auf einer beliebigen, einer der Asymptoten parallelen, geraden Linie (RC) sich befindet. Fig. 13.

*) Wenn wir allgemein durch:

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = 0,$$

die Gleichungen dreier Linien des m. Grades bezeichnen, deren Asymptoten parallel sind, so stellen die Gleichungen:

$$A - A' = 0, \quad A - A'' = 0, \quad A' - A'' = 0,$$

drei neue Curven des (m—1). Grades dar, die durch die Durchschnitte jener Curven des m. Grades gehen. Die drei neuen Curven schneiden sich in denselben Puncten, deren es $(m-1)^2$ gibt, die aber zum Theil imaginär werden können.

Machen wir eine Anwendung hiervon auf Linien der dritten Ordnung, so erhalten wir drei Linien zweiter Ordnung, die sich in denselben vier Puncten schneiden. Für die Linien dritter Ordnung können wir endlich noch drei Systeme von drei geraden Linien nehmen, welche drei Dreiecke bilden, deren Seiten parallel sind.

Wir können hiernach ferner, wenn irgend vier Puncte und eine gerade Linie gegeben sind, eine Hyperbel construiren, welche durch die vier gegebenen Puncte geht, und deren eine Asymptote der gegebenen geraden Linie parallel ist. Es kommt hier nur darauf an, dafs wir die Richtung der zweiten Asymptote der zu construirenden Hyperbel bestimmen. Seyen also M, M', M'' und M''' die vier Puncte und RM' und QM''' gerade Linien, die einer der Asymptoten der gesuchten Curve parallel sind. Man verbinde die gegebenen Puncte paarweise durch zwei gerade Linien, für welche wir hier MM''' und M'M'', die sich in P schneiden, nehmen wollen. Alsdann reducirt sich die Construction zweier geraden Linien, die der zweiten Asymptote parallel sind, darauf, durch M und M'' zwei solche gerade Linien zu ziehen, die unter einander parallel sind und auf RM' und QM''' zwei Puncte, R und Q, bestimmen, die mit P in gerader Linie liegen. Zu diesem Ende brauchen wir nur irgend zwei beliebige parallele gerade Linien $\varkappa y$ und $\lambda y'$ durch M und M'' zu legen, und die Diagonale $\varkappa\lambda$ des auf diese Weise entstandenen Parallelogrammes yy' zu ziehen. Diese Diagonale schneidet diejenige gerade Linie, welche die beiden Puncte M und M'' verbindet in irgend einem Puncte S. Zieht man nun PS, so erhält man auf RM' und QM''' die Puncte R und Q, und endlich die geraden Linien RM und QM'', welche der zweiten Asymptote der gesuchten Curve parallel sind. (Die Richtigkeit dieser Construction ergibt sich sogleich; denn $\varkappa\lambda$, MM'' und RQ schneiden sich in demselben Puncte, in S; da ferner $\varkappa$R und λQ, $\varkappa$M und λM'' parallel sind, so sind nothwendig auch RM und QM'' parallel (86)).

Fig. 14. Wenn wir mit einer Hyperbel zwei Systeme von zwei, den Asymptoten parallelen, geraden Linien zusammenstellen, von welchen das eine aus solchen geraden Linien besteht, die sich auf der Hyperbel schneiden, so erhalten wir für eine Chordale eine Tangente. Seyen in der 14. Figur CM, CM' (odes yM, yM') und M''K, M''Q die beiden Systeme und M'' ein Punct der Hyperbel; alsdann vereinigen sich in P die Chordalen MM' und KP (und $\varkappa$P) und M''P, welche die Hyperbel berührt. (Beiläufig bemerken wir auf diese Weise eine neue geometrische Beziehung des Chordal-Punctes dreier Systeme von zwei, sich in M'', C und $\varkappa$ schneidenden geraden Linien.) Hiernach können wir, wenn drei Puncte einer Hyperbel und die Richtung ihrer Asymptoten bekannt sind, in jedem der gegebenen Puncte unmittelbar eine Tangente construiren. Wir können auch, umgekehrt, wenn statt eines der drei Puncte eine Tangente gegeben ist, denjenigen Punct bestimmen, in welchem diese Tangente die Hyperbel berührt und also, nach dem Vorhergehenden, die Hyperbel selbst construiren. Sey BM'' die gegebene gerade Linie, von welcher die gesuchte Hyperbel berührt werden soll und die derjenigen geraden Linie, welche die beiden gegebenen Puncte M und M' verbindet, in P begegnet. Die geraden Linien CM, CM' sind als gegeben zu betrachten und die Construction der Aufgabe reducirt sich darauf, einen Punct M'' auf der gegebenen geraden Linie BM'' so zu bestimmen, dafs die Diagonale KQ des Parallelogrammes CM'' durch den Punct P geht. Zu diesem Ende brauchen wir nur, wenn wir durch D und B die Durchschnitte der gegebenen geraden Linie mit CM und CM' bezeichnen, M'' vermittelst folgender Gleichung, zu der wir ohne Mühe aus der Construction gelangen:

$$\overline{PM''}^2 = PD.\ PB,$$

zu bestimmen. M'' ist alsdann der gesuchte Berührungs-Punct. Auf entsprecherde Weise hätten wir vermittelst folgender Gleichung:

$$\overline{PM''}^2 = P\delta.\, P\beta,$$

den Punct M″ bestimmen können, und hiernach ist:

$$PD.\, PB = P\delta.\, P\beta = \overline{PM''}^2.$$

Wir verweilen nicht bei der Aussage des hierin enthaltenen Satzes und brechen überhaupt hier ab, um zu anderen Constructionen überzugehen.

284. Die nachstehenden Gleichungen:

$$y^2 + \beta x^2 + 2\gamma y + \varepsilon = 0, \quad (1)$$

$$y^2 + \beta x^2 + 2\delta x - \varepsilon = 0, \quad (2)$$

stellen zwei ähnliche Ellipsen oder Hyperbeln dar, durch deren beide Mittelpuncte die zweite und erste Axe gehen. Wir nehmen an, in den beiden Gleichungen sey das constante Glied gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen. Wenn wir in der zweiten Gleichung $x = 0$ setzen, so erhalten wir für die Durchschnitte der zweiten Curve mit der zweiten Axe:

$$y = \pm \sqrt{\varepsilon},$$

woraus ersichtlich ist, dafs diese Curve durch zwei Puncte geht, die zugeordnete Pole für die erste Curve sind, und gleichweit von der ersten Axe abstehen (281). Wir überzeugen uns auf ähnliche Weise, dafs gegenseitig die erste Curve die erste Axe in zweien Puncten schneidet, die für die zweite Curve zugeordnete Pole sind.

Die Gleichungen der Polaren irgend eines Punctes (y', x') für die Curven (1) und (2) sind folgende (268):

$$(y' + \gamma)y + \beta x' x + \gamma y' + \varepsilon = 0,$$

$$y' y + (\beta x' + \delta)x + \delta x' - \varepsilon = 0.$$

Wenn wir für (y', x') in der ersten dieser Gleichungen den Mittelpunct der zweiten Curve $(0, -\frac{\delta}{\beta})$, und in der zweiten derselben den Mittelpunct der ersten Curve, $(-\gamma, 0)$, nehmen, so reduciren sich beide Gleichungen auf folgende:

$$\gamma y - \delta x + \varepsilon = 0,$$

und eben dieselbe Gleichung erhalten wir auch für die Chordale der beiden Curven, indem wir ihre Gleichungen von einander abziehen und dann durch 2 dividiren. Wir sehen hieraus, dafs die in den beiden Durchschnitten der Curven (1) und (2) an jede derselben gelegten Tangenten durch den Mittelpunct der andern gehen.

Wenn wir ferner mit der ersten Curve eine andere zusammenstellen, die mit ihr die erste Axe zur Chordalen hat, und deren Gleichung also von folgender Form ist:

$$y^2 + \beta x^2 + 2\gamma' y + \varepsilon = 0, \quad (3)$$

wo γ' jeden beliebigen Werth haben kann, so geht offenbar die zweite Curve durch diejenigen beiden Puncte, welche zugleich für (1) und (3) zugeordnete Pole sind; sie schneidet, berührt oder schneidet nicht die Central-Linie dieser beiden Curven, je nachdem jene Puncte reell sind, zusammenfallen oder imaginär werden; d. h. je nachdem die Curven (1) und (3) sich nicht schneiden, sich berühren oder schneiden.

Der Coefficient δ in der Gleichung (2) kann jeder beliebige seyn, und mithin der Mittelpunct der bezüglichen Curve in jedem beliebigen Puncte der ersten Axe angenommen werden. Wenn wir daher drei ähnliche Linien zweiter Ordnung zusammenstellen, so können wir aus dem Chordal-Puncte derselben eine ihnen ähnliche Curve beschreiben, welche durch die zugeordneten Pole je zweier der drei gegebenen, also, im Allgemeinen,

durch sechs Puncte geht. In dem Mittelpuncte dieser Curve vereinigen sich diejenigen Tangenten, welche in den Durchschnitts-Puncten derselben mit den gegebenen Curven an letztere gelegt werden können. Sind die gegebenen Curven drei Kreise, so ist die aus dem Chordal-Puncte, als Mittelpuncte, beschriebene Curve keine andere als der Orthogonal-Kreis. Wenn unter den gegebenen Linien zweiter Ordnung solche sich befinden, die sich auf einen Punct oder ein System zweier geraden Linien reducirt haben, so geht die in Rede stehende, schneidende Curve durch die gegebenen Puncte oder die Durchschnitts-Puncte der beiden geraden Linien der gegebenen Systeme.

Fig. 15. Nach der letzten Bemerkung können wir eine Ellipse beschreiben, welche durch irgend drei gegebene Puncte geht, und in welcher zwei zugeordnete Durchmesser irgend zweien gegebenen geraden Linien parallel sind, und überdiefs in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen. Seyen OY und OX die beiden gegebenen geraden Linien, das Verhältnifs der ihnen parallelen Durchmesser sey $\frac{B}{A}$, alsdann ist, indem wir das Quadrat dieses Verhältnisses durch β bezeichnen, die Gleichung der gesuchten Ellipse, wenn wir dieselben auf jene beiden geraden Linien beziehen, von folgender Form:

$$y^2+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0.$$

Bezeichnen wir ferner die drei gegebenen Puncte durch (y', x'), (y'', x'') und (y''', x'''), so ist der Mittelpunct jener Ellipse der Chordal-Punct der drei gegebenen, durch folgende Gleichungen dargestellten, Puncte:

$$(y-y')^2+\beta(x-x')^2 = 0,$$
$$(y-y'')+\beta(x-x'')^2 = 0,$$
$$(y-y''')^2+\beta(x-x''')^2 = 0,$$

so dafs derselbe also zugleich auf folgenden drei geraden Linien liegt:

$$2(y''-y')y+2\beta(x''-x')x + y'^2+\beta x'^2-y''^2-\beta x''^2 = 0,$$
$$2(y'''-y')y+2\beta(x'''-x')x + y'^2+\beta x'^2-y'''^2-\beta x'''^2 = 0, \qquad (1)$$
$$2(y'''-y'')y+2\beta(x'''-x'')x + y''^2+\beta x''^2-y'''^2-\beta x'''^2 = 0.$$

Um den Mittelpunct der verlangten Ellipse zu erhalten, brauchen wir also nur den Durchschnitt irgend zweier der durch die letzten Gleichungen dargestellten geraden Linien zu construiren. Zunächst ist unmittelbar aus diesen Gleichungen selbst ersichtlich, was aus dem Früheren schon bekannt ist, dafs die entsprechenden drei geraden Linien durch die Mitten derjenigen drei geraden Linien gehen, welche die drei gegebenen Puncte, paarweise genommen, verbinden. Denn nehmen wir z. B. die erste der letzten drei Gleichungen, so wird dieselbe befriedigt, wenn wir zugleich

$$y = \frac{y''+y'}{2}, \qquad x = \frac{x''+x'}{2},$$

setzen. Um also die bezügliche gerade Linie zu construiren, brauchen wir nur noch einen zweiten Punct derselben oder ihre Richtung zu bestimmen. Beides ist leicht; bei der Construction eines zweiten Punctes nehmen wir füglich einen der beiden Puncte M oder M′ zum Anfangspuncte, und suchen den Durchschnitt der in Rede stehenden Linie mit einer der beiden Axen. Die 15. Figur bezieht sich auf den Fall, wo $\beta = 1$ ist, und wir also eine Ellipse verlangen, welche durch die drei Puncte M, M′ und M″ und deren gleiche zugeordnete Durchmesser den beiden gegebenen geraden Linien OY und OX parallel sind. Bei dieser Annahme nimmt die erste der Gleichungen (1) folgende Form an:

$$2(y''-y')y+2(x''-x')+y'^2+x'^2-y''^2-x''^2 = 0,$$

und gibt, wenn wir sie mit folgender Gleichung:

zusammenstellen:

$$py+qx = pq,$$

$$\frac{q}{p} = \frac{x''-x'}{y''-y'}.$$

Diejenige gerade Linie ferner, welche durch die beiden Puncte M und M' geht, hat, wenn wir die Segmente OQ' und OP' durch q' und p' bezeichnen, folgende Gleichung:

$$p'y+q'x = p'q',$$

und wir haben zugleich:

$$\frac{q'}{p'} = -\frac{y''-y'}{x''-x'},$$

so dafs also:

$$\frac{q}{p} = -\frac{p'}{q'}.$$

hiernach ist, indem wir $O\pi = OQ'$ und $O\varkappa = OP'$ nehmen, die gerade Linie $\pi\varkappa$ parallel der gesuchten $\mu''C$, die zugleich durch die Mitte von MM' durch μ'' geht, und also vollkommen bestimmt ist. Ebenso können wir eine beliebige der beiden entsprechenden geraden Linien $\mu'C$ und μC construiren, die durch die Mitten von MM'' und M'M'' gehen, und erhalten somit den Mittelpunct der gesuchten Ellipse.

Die Aufgabe: durch drei Puncte eine Hyperbel zu beschreiben, deren zwei zugeordnete Durchmesser, die ein gegebenes Verhältnifs zu einander haben, zwei gegebenen geraden Linien parallel sind, ist der auf die Ellipse sich beziehenden Aufgabe ganz analog. Wir müssen alsdann nur β mit entgegengesetztem Zeichen nehmen. Indem wir, als besondern Fall, $\beta = -1$ setzen, erhalten wir eine gleichseitige Hyperbel, die durch drei gegebene Puncte geht, und deren zwei zugeordnete Durchmesser zweien gegebenen geraden Linien parallel sind. —

Aus diesem Paragraphen erhellet, wie die Theorie der Chordalen und des Chordal-Punctes, bei der wir ausführlich im zweiten Abschnitte verweilt haben, sich in allen Beziehungen auf beliebige ähnliche Curven zweiter Ordnung übertragen läfst. Dasselbe gilt von der Theorie der Symmetral-Puncte; doch wollen wir hier in diese Erörterungen nicht eingehen.

§. 6.

Verbindung der Gleichungen einer Linie zweiter Ordnung und eines Systems zweier geraden Linien zu der Gleichung eines neuen solchen Systems.

285. Wir wollen zuvörderst das allgemeine Schema aufstellen, das uns in diesem Paragraphen beschäftigen soll. Sey

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0, \qquad (1)$$

die Gleichung irgend einer beliebigen Linie zweiter Ordnung, die auf ein beliebiges Coordinaten-System bezogen ist. Sey ferner (y', x') irgend ein gegebener Punct, durch welchen wir nach beliebiger Richtung zwei gerade Linien legen, deren Gleichungen folgende seyen:

$$(y-y')+\varkappa(x-x') = 0,$$

$$(y-y')+\varkappa'(x-x') = 0,$$

und die wir also, beide zugleich, durch folgende Gleichung ausdrücken können:

$$y^2+(\varkappa+\varkappa')xy+\varkappa\varkappa'x^2-((\varkappa+\varkappa')x'+2y')y-((\varkappa+\varkappa')y'+2\varkappa\varkappa'x')x+y'^2+(\varkappa+\varkappa')x'y'+\varkappa\varkappa'x'^2 = 0. \quad (2)$$

Durch Verbindung der beiden Gleichungen (1) und (2) erhalten wir die Gleichungen aller möglichen Curven, welche durch die Durchschnitte der beiden geraden Linien mit der gegebenen Curve gehen, wir erhalten namentlich die allgemeine Gleichung, welche alle Linien zweiter Ordnung, die durch jene Durchschnitte gehen, darstellt, indem wir eine der beiden Gleichungen (1) und (2), wofür wir hier die erste derselben nehmen wollen, mit einem unbestimmten Coefficienten μ multipliciren und alsdann zur andern addiren. Auf diese Weise ergibt sich, indem wir zugleich alle Glieder der resultirenden Gleichung durch $(1+\mu)$ dividiren, folgende Gleichung:

$$y^2+\frac{2\mu\alpha+\varkappa+\varkappa'}{1+\mu}xy+\frac{\mu\beta+\varkappa\varkappa'}{1+\mu}x^2+\frac{2\mu\gamma-(\varkappa+\varkappa')x'-2y'}{1+\mu}y+\frac{2\mu\delta-(\varkappa+\varkappa')y'-2\varkappa\varkappa'x'}{1+\mu}x$$
$$+\frac{\mu\varepsilon+y'^2+(\varkappa+\varkappa')x'y'+\varkappa\varkappa'x'^2}{1+\mu}=0. \quad (3)$$

Soll diese Gleichung wiederum ein System zweier geraden Linien darstellen, so mufs sie, durch eine schickliche Annahme des Coefficienten μ, folgende ganz der Gleichung (2) entsprechende Form annehmen können:

$$xy^2+(\xi+\xi')xy+\xi\xi'x^2-((\xi+\xi')x''+2y'')y-((\xi+\xi')y''+2\xi\xi'x''+y''^2+(\xi+\xi')x''y''+\xi\xi'x''^2 = 0, \quad (4)$$

und zur nähern Bestimmung der beiden geraden Linien des durch diese Gleichung dargestellten Systems erhalten wir folgende fünf Gleichungen:

$$\frac{2\mu\alpha+(\varkappa+\varkappa')}{1+\mu}=\xi+\xi', \quad (5)$$

$$\frac{\mu\beta+\varkappa\varkappa'}{1+\mu}=\xi\xi', \quad (6)$$

$$\frac{2\mu\gamma-(\varkappa+\varkappa')x'-2y'}{1+\mu}=-(\xi+\xi')x''-2y'', \quad (7)$$

$$\frac{2\mu\delta-(\varkappa+\varkappa')y'-2\varkappa\varkappa'x'}{1+\mu}=-(\xi+\xi')y''-2\xi\xi'x'', \quad (8)$$

$$\frac{\mu\varepsilon+y'^2+(\varkappa+\varkappa')x'y'+\varkappa\varkappa'x'^2}{1+\mu}=y''^2+(\xi+\xi')x''y''+\xi\xi'x''^2. \quad (9)$$

Diese Gleichungen sind hinreichend zur Bestimmung des unbestimmten Coefficienten μ und der Constanten der beiden gesuchten geraden Linien, die durch die Durchschnitte der gegebenen geraden Linie mit der gegebenen Curve gehen, und die einzeln durch folgende beiden Gleichungen dargestellt werden:

$$y-y''+\xi(x-x'')=0,$$
$$y-y''+\xi'(x-x'')=0.$$

Aus denselben Gleichungen (5) — (9) ergibt sich eine lange Reihe geometrischer Beziehungen, zu denen wir ohne Mühe kommen, indem wir nach verschiedenen Absichten die Coordinaten-Axen schicklich bestimmen, und die Form der Gleichungen (2) und (4) zweckdienlich verändern.

286. Zuvörderst wollen wir uns mit dem unbestimmten Coefficienten μ beschäftigen. Die Art, wie dieser Coefficient sich durch die gegenseitige Lage der Curve zweiten Grades und des Systems der beiden geraden Linien, so wie durch den Winkel, den diese geraden Linien mit einander bilden, und durch die Natur der Curve bestimmt, ist unabhängig von irgend einer Coordinaten-Annahme. Da wir nun durchaus nichts an Allgemeinheit einbüfsen, indem wir die beiden gegebenen, irgend einen beliebigen Winkel bil-

denden, geraden Linien zu Coordinaten-Axen nehmen, und die Coefficienten der Curven-Gleichung ganz unbestimmt lassen, so können wir, zum Behuf jener Bestimmung von μ, statt der Gleichung (2), der vorigen Nummer, folgende:

$$2xy = 0 \quad (1)$$

wo der Factor 2 nur der Symmetrie wegen hinzugefügt ist, mit der Gleichung:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0, \quad (2)$$

verbinden. Wir können ferner statt die Gleichung der Curve, wie in der vorigen Nummer, die Gleichung des Linien-Systems mit einem unbestimmten Coefficienten multipliciren, und dann beide Gleichungen addiren. (Diefs kommt darauf hinaus, μ mit $\frac{1}{\mu}$ zu vertauschen.) Wir erhalten auf diese Weise statt der Gleichung (3) folgende:

$$y^2+2(\alpha+\mu)xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0. \quad (3)$$

Soll diese Gleichung ein System zweier geraden Linien darstellen, so erhalten wir (234) folgende Bedingungs-Gleichung:

$$\delta^2-2(\alpha+\mu)\delta\gamma+\beta\gamma^2+((\alpha+\mu)^2-\beta)\varepsilon = 0, \quad (4)$$

oder wenn wir in Beziehung auf μ ordnen:

$$\varepsilon\mu^2-2(\delta\gamma-\alpha\varepsilon)\mu+(\delta^2-2\alpha\delta\gamma+\beta\gamma^2+(\alpha^2-\beta)\varepsilon) = 0. \quad (5)$$

Vermittelst dieser Gleichung finden wir μ, nur müssen wir bemerken, dafs dieselbe sich sowol auf denjenigen Fall bezieht, wo die Gleichung (3) ein System zweier geraden Linien darstellt, als auch auf denjenigen, wo diese Gleichung einen blofsen Punct bezeichnet. Da die Gleichung (5) in Beziehung auf μ vom zweiten Grade ist, so erhalten wir im Allgemeinen zwei Werthe für μ, denen zwei Linien-Systeme entsprechen, die sich durch die Durchschnitte der gegebenen Curve mit dem gegebenen Systeme legen lassen.

Die Gleichung (5) reducirt sich auf den ersten Grad, und gibt also nur einen einzigen Werth für μ, erstens wenn:

$$\delta^2-2\alpha\delta\gamma+\beta\gamma^2+(\alpha^2-\beta)\varepsilon = 0,$$

d. h. wenn die gegebene durch (2) dargestellte Linie zweiter Ordnung selbst schon ein System zweier geraden Linien, oder auch, was wir wiederum nicht übersehen dürfen, einen Punct darstellt. Zweitens reducirt sich die Gleichung (5) auf den ersten Grad, wenn:

$$\varepsilon = 0,$$

d. h. wenn der Anfangs-Punct der Coordinaten oder, mit anderen Worten, der Durchschnitts-Punct der beiden geraden Linien des gegebenen Systems auf der Curve liegt.

Die Gleichung (5) gibt für μ zwei reelle, gleiche oder imaginäre Werthe, je nachdem der Ausdruck:

$$\delta^2\gamma^2-\delta^2\varepsilon-\beta\gamma^2\varepsilon+\beta\varepsilon^2,$$

positiv, Null oder negativ ist. Diesem Ausdrucke können wir folgende Form geben:

$$(\delta^2-\beta\varepsilon)(\gamma^2-\varepsilon),$$

und hieraus ist ersichtlich, dafs sich reelle oder imaginäre Werthe für μ ergeben, wenn die beiden Ausdrücke

$$\delta^2-\beta\varepsilon, \quad \gamma^2-\varepsilon,$$

beide von gleichem oder entgegengesetztem Zeichen sind. Im erstern Falle begegnen beide Linien des gegebenen Systems (1) der gegebenen Curve, oder beide begegnen ihr nicht; im andern Falle wird die Curve nur von einer geraden Linie des Systems geschnitten. Nur in dem erstern Falle lassen sich die Gleichungen der Curve und des Linien-Systems zu einer neuen Gleichung eines Linien-Systems oder eines Punctes, und zwar

auf doppelte Weise verbinden. Die Werthe von μ sind gleich, wenn einer der letzten Ausdrücke oder beide verschwinden; in diesem Falle wird die Curve von einer oder von beiden Linien des gegebenen Systems berührt. Zwischen gleichen Werthen und einem einzigen Werthe von μ findet ein feiner Unterschied Statt, der sich auch in der Construction nachweisen läſst.

Wenn die Gleichung (2) eine imaginäre Curve bezeichnet, so sind, weil keine reelle gerade Linie mit einer solchen Curve reelle Durchschnitte haben kann, die letzten beiden Ausdrücke beide negativ, und wir erhalten also in diesem Falle immer eine zweifache Gleichung, die, was einstweilen noch unentschieden geblieben ist, entweder ein Linien-System oder einen Punct darstellt.

287. Zur Unterscheidung der verschiedenen Fälle, ob, bei einer schicklichen Bestimmung von μ, die Gleichung (3), zu der wir in der vorigen Nummer durch Verbindung der Gleichungen des Linien-Systems und der Curve gekommen sind, wieder Linien-Systeme oder nur Puncte darstellt, verfahren wir am leichtesten auf folgende Weise. Es kommt hierbei Alles auf das Zeichen des Werthes von folgendem Ausdrucke an:

$$(\alpha+\mu)^2-\beta, \qquad (6)$$

aus welchem wir, vermittelst der Gleichung (4), nur μ zu eliminiren brauchen. Diese Gleichung gibt uns:

$$\alpha+\mu = \frac{\delta\gamma \pm ((\delta^2-\beta\varepsilon)(\gamma^2-\varepsilon))^{1/2}}{\varepsilon}; \qquad (7)$$

substituiren wir diesen Werth von $(\alpha+\mu)$ in dem vorigen Ausdruck, so verwandelt sich derselbe in folgenden:

$$\frac{\delta^2(\gamma^2-\varepsilon)+\gamma^2(\delta^2-\beta\varepsilon)\pm 2\delta\gamma((\delta^2-\beta\varepsilon)(\gamma^2-\varepsilon))^{1/2}}{\varepsilon^2},$$

und wir bemerken sogleich, daſs dieser Ausdruck das vollständige Quadrat ist von:

$$\frac{\delta(\gamma^2-\varepsilon)^{1/2} \pm \gamma(\delta^2-\beta\varepsilon)^{1/2}}{\varepsilon}. \qquad (8)$$

Da wir nun in der vorigen Nummer als Bedingung für die Möglichkeit der Verbindung der Gleichungen (1) und (2) zu der Gleichung eines neuen Linien-Systems oder eines Punctes gefunden haben, daſs die Zeichen für die Werthe folgender Ausdrücke

$$\gamma^2-\varepsilon, \quad \delta^2-\beta\varepsilon,$$

übereinstimmen müssen, so haben wir nur diejenigen Fälle zu unterscheiden, wo die letzten Ausdrücke beide einen positiven oder beide einen negativen Werth haben, d. h. wo die Linien des gegebenen Systems beide der Curve entweder begegnen oder nicht. Im erstern Falle hat der Ausdruck (7) reelle Werthe, und das Quadrat desselben, oder

$$(\alpha+\mu)^2-\beta$$

ist positiv; im andern Falle nimmt der Ausdruck (8) die Form $A\sqrt{-1}$ an, und das Quadrat desselben ist nothwendig negativ. Im erstern Falle gelangen wir also durch Verbindung der Gleichung eines Linien-Systems und einer Curve zu den Gleichungen zweier neuen Linien-Systeme, im andern Falle zu den Gleichungen zweier Puncte.

Diese Resultate der analytischen Entwicklung sind leicht *a priori* ersichtlich. Wenn nemlich zwei gegebene gerade Linien beide einer gegebenen Curve zweiter Ordnung begegnen, so erhalten wir vier Durchschnitte, durch welche wir noch zwei andere Systeme zweier geraden Linien legen können. Wenn die Curve von keiner der gegebenen geraden Linien geschnitten wird, so würde jedes zweite Linien-System das erste Linien-System

schneiden, und diese Durchschnitte müfsten, was gegen die gemachte Voraussetzung ist, ebenfalls auf der Curve liegen, wenn wir zu der Gleichung des zweiten Systems durch Verbindung der Gleichungen des ersten Systems und der Curve gelangen könnten; die Rechnung gibt uns hier, dafs zwei Puncte an die Stelle der beiden Linien-Systeme des ersten Falles treten. Wenn nur eine einzige der beiden gegebenen geraden Linien der Curve begegnet, so mufs der durch die resultirende Gleichung dargestellte geometrische Ort nothwendig durch die beiden Durchschnitts-Puncte gehen, und kann also, so wenig als im ersten Falle, ein Punct seyn: er kann auch kein neues Linien-System seyn, denn jede gerade Linie, welche durch einen beliebigen der obigen beiden Durchschnitte geht, begegnet derjenigen gegebenen geraden Linie, welche die Curve nicht schneidet, und der Curve selbst, in zweien Puncten, die nach der gemachten Voraussetzung nicht dieselben seyn können.

Wenn eines der resultirenden Systeme aus zweien Parallelen bestehen soll, so erhalten wir, indem wir den Ausdruck bei (8) verschwinden lassen, folgende Bedingungs-Gleichung:

$$\delta^2 = \beta\gamma^2,$$

woraus zuvörderst erhellet, dafs β nicht negativ seyn kann. In diesem Falle reducirt sich ferner der Ausdruck (7) auf:

$$(\alpha+\mu) = \frac{\delta\gamma \pm (\gamma^2-\varepsilon)\sqrt{\beta}}{\varepsilon},$$

so dafs also der Werth von μ immer reell ist. Wir erhalten folglich nie bei obiger Verbindung die Gleichung eines Systems zweier imaginären Parallellinien.

288. Die vorstehenden Erörterungen sind für unsern nächsten Zweck vollkommen hinreichend; wir wenden uns nun wieder zu dem, in der 285. Nummer aufgestellten allgemeinen Schema zurück, und wollen zuerst die beiden Gleichungen (5) und (6) der eben angezogenen Nummer betrachten. Diese beiden Gleichungen:

$$\frac{2\mu\alpha+\varkappa+\varkappa'}{1+\mu} = \xi+\xi', \qquad \frac{\mu\beta+\varkappa\varkappa'}{1+\mu} = \xi\xi', \tag{1}$$

enthalten als unbekannte Gröfsen μ, ξ und ξ'. Wir können eine der beiden letzten dieser drei Gröfsen, etwa ξ, auch als gegeben betrachten. Diefs kommt alsdann darauf hinaus, diejenigen beiden geraden Linien, die wir bisher als ursprünglich gegeben betrachtet haben, und deren Gleichungen folgende sind:

$$y-y'+\varkappa(x-x') = 0, \qquad y-y'+\varkappa'(x-x') = 0, \tag{2}$$

nur so zu bestimmen, dafs jede derselben durch einen der beiden Durchschnitte der Curve mit derjenigen geraden Linie geht, deren Gleichung folgende ist:

$$y-y''+\xi(x-x'') = 0, \tag{3}$$

und die einem der beiden anderen Systeme angehört, zu deren Bestimmung die Gleichungen (5) — (9) der 285. Nummer führen. Wir können diese Bestimmung der geraden Linien (2) auf solche Weise machen, dafs $\varkappa$ und $\varkappa'$ ein für alle Mal bestimmte Werthe behalten; so dafs also, wenn wir die durch die letzte Gleichung dargestellte gerade Linie, die nur der Richtung nach gegeben ist, parallel mit sich selbst verrücken, sich in den Gleichungen (2) nur die Coordinaten des Durchschnitts-Punctes (y', x') der bezüglichen beiden geraden Linien ändern: Coordinaten, die in den beiden oben zusammengestellten

Gleichungen (1) nicht vorkommen. Diese Gleichungen sind bei den eben gemachten Voraussetzungen hinreichend zur Bestimmung von μ und ξ'. Es ist also auch diejenige gerade Linie:

$$y - y'' + \xi'(x - x'') = 0,$$

welche durch die beiden übrigen Durchschnitte der gegebenen Curve und der beiden geraden Linien (2) geht, der Richtung nach bekannt, und diese Richtung ändert sich nicht wie wir auch die gerade Linie (3), parallel mit sich selbst, verrücken mögen. Wir haben mithin folgenden Satz bewiesen:

Wenn man in irgend eine Linie zweiter Ordnung beliebig viele Vierecke beschreibt, in denen drei Seiten parallel sind, so sind auch die vierten Seiten derselben parallel.

Fig. 16. Mit solchen Vierecken ordnen sich zwei Dreiecke zusammen, deren drei Seiten mit den ersten drei Seiten jener Vierecke parallel sind; die Tangente in einem Winkel-Puncte des Dreiecks tritt alsdann an die Stelle der vierten Seite. Hiernach können wir in irgend eine Linie zweiter Ordnung ein Dreieck beschreiben, dessen drei Seiten dreien gegebenen geraden Linien parallel sind. Wir brauchen zu diesem Ende nur irgend eine der Curve begegnende, gerade Linie AB parallel mit einer der gegebenen zu ziehen, und durch die Durchschnitte derselben mit der Curve zwei andere gerade Linien AC und BD, die den beiden anderen gegebenen geraden Linien parallel sind, und der Curve in C und D begegnen. Legen wir alsdann Tangenten an die Curve, die der durch C und D gehenden geraden Linien parallel sind, so sind die Berührungen T und T′ diejenigen Winkel-Puncte der gesuchten Dreiecke (deren es mithin zwei gibt), welche den mit AB parallelen Seiten derselben gegenüber liegen.

Wir können auch nach obigem Satze in einem gegebenen Puncte einer Linie zweiter Ordnung eine Tangente an dieselbe legen. Sey T der gegebene Punct; durch diesen Punct ziehe man nach beliebiger Richtung TM und TN, welche die Curven in M und N schneiden, man ziehe MN und hiermit parallel aber übrigens beliebig AB, ziehe AC und BD parallel mit TM und TN, ziehe CD und endlich hiermit parallel eine gerade Linie durch T. Diese Linie ist die gesuchte Tangente.

Wir können für zwei der oben zusammengestellten Vierecke zwei solche nehmen, die eine beliebige gerade Linie zur gemeinschaftlichen Seite haben. Solche Vierecke sind in der 16. Figur ABDC und ABC′D′. Alsdann sind A, C, D, B, C′ und D′ die Winkel-Puncte eines in die Curve beschriebenen Sechsecks, in dem zwei Paar gegenüberliegender Seiten, AC und BC′, BD und AD′, parallel sind, wodurch nach obigem Satze der Parallelismus der beiden übrigen Seiten CD und D′C′ bedingt wird. Also:

Wenn zwei Paar gegenüberliegender Seiten eines in eine Linie zweiter Ordnung beschriebenen Sechsecks parallel sind, so sind es auch die beiden übrigen Seiten.

Indem wir hiernach in der eben angezeigten Construction der Tangente in dem gegebenen Puncte T sogleich durch N eine gerade Linie parallel mit TM und durch M eine andere parallel mit TN ziehen, bestimmt diejenige gerade Linie, welche durch die zweiten Durchschnitte der beiden eben gezogenen Parallelen mit der Curve geht, die Richtung der verlangten Tangente. Diese Construction rührt von *l'Hospital* her *).

289. Der Analogie sowol des Gegenstandes als des Beweises wegen, wollen wir gleich hier mit der vorigen Nummer die folgenden Erörterungen zusammenstellen. Wir

*) Traité analytique des sections coniques; Nro. 208.

nehmen als Gleichungen des gegebenen und des resultirenden Linien-Systems für unsere nächsten Zwecke, statt der Gleichungen (2) und (4) der 235. Nummer, nun folgende:

$$y^2+(\varkappa+\varkappa')xy+\varkappa\varkappa'x^2+(\sigma+\sigma')y+(\varkappa\sigma'+\varkappa'\sigma)x+\sigma\sigma' = o, \qquad (1)$$

$$y^2+(\xi+\xi)xy+\xi\xi'x^2+(\zeta+\zeta')y+(\xi\zeta'+\xi'\zeta)x+\zeta\zeta' = o, \qquad (2)$$

indem wir nemlich die Coordinaten der Durchschnitte der beiden Linien des ersten und zweiten Systems $(-\sigma)$ und $(-\sigma')$, $(-\zeta)$ und $(-\zeta')$ als Constante einführen. Hiernach erhalten, während die Gleichungen (5) und (6) der eben angezogenen Nummer unverändert bleiben, die Gleichungen (7) bis (9) folgende Formen:

$$-\frac{2\mu\gamma+o+\sigma'}{1+\mu} = \zeta+\zeta', \qquad (3)$$

$$\frac{2\mu\delta+\varkappa\sigma'+\varkappa'\sigma}{1+\mu} = \xi\zeta'+\xi'\zeta, \qquad (4)$$

$$\frac{\mu\varepsilon+\sigma\sigma'}{1+\mu} = \zeta\zeta'. \qquad (5)$$

290. Wir wollen die erste und letzte dieser drei Gleichungen hier auf dieselbe Weise behandeln, wie wir in der 288. Nummer die beiden Gleichungen (1) behandelt haben. Wir betrachten nemlich σ, σ' und ζ als bekannt, d. h. diejenigen drei Puncte, in welchen die beiden geraden Linien des ursprünglichen Systems und eine gerade Linie des resultirenden Systems der zweiten Axe begegnen, als gegeben. Ueber die zweite Axe selbst haben wir hierbei gar keine besondere Annahme gemacht. Hiernach erhalten wir eine nähere Bestimmung über jenes erste, bisher als ganz beliebig betrachtete, Linien-System. Wir können für dasselbe jedes solche nehmen, das wir erhalten, indem wir durch den Punct $(-\zeta, o)$ eine durchaus beliebige, der Curve begegnende, gerade Linie legen, und die Durchschnitte derselben mit der Curve und die beiden Puncte $(-\sigma, o)$ und $(-\sigma', o)$ durch zwei gerade Linien (was auf zwiefache Art geschehen kann) verbinden. Sobald nun auf diese Weise σ, σ' und ζ gegeben sind, so sind die beiden Gleichungen (3) und (5) der vorigen Nummer zur Bestimmung von μ und ζ' hinreichend. Wie wir also auch durch die drei festen Puncte $(-\sigma, o)$, $(-\sigma', o)$ und $(-\zeta, o)$ die drei geraden Linien:

$$y+\varkappa x+\sigma = o,$$
$$y+\varkappa' x+\sigma' = o,$$
$$y+\xi x+\zeta = o,$$

von denen die beiden ersten durch die beiden Durchschnitte der letzten mit der Curve gehen, legen mögen: die vierte gerade Linie, die durch die beiden übrigen Durchschnitte der ersten beiden Linien mit der Curve geht, und der folgende Gleichung entspricht:

$$y+\xi' x+\zeta' = o,$$

schneidet die zweite Axe in einem festen und unveränderlichen Punct $(-\zeta', o)$. Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

Wenn in einer Curve zweiter Ordnung beliebig viele Vierecke beschrieben werden, deren drei erste Seiten irgend einer beliebigen geraden Linie in denselben drei Puncte begegnen, so vereinigen sich die vierten Seiten aller dieser Vierecke in ein und demselben vierten Puncte derselben geraden Linie.

291. In die Reihe der im Satze der vorigen Nummer zusammengestellten Vierecke gehören im Allgemeinen auch zwei Dreiecke; hier erhalten wir statt der vierten Seiten Tangenten in einem Winkel-Puncte der beiden Dreicke. Diese Tangenten gehen eben-

falls durch den obigen vierten Punct $(-\zeta', o)$. Hiernach können wir in eine gegebene Linie zweiter Ordnung ein Dreieck beschreiben, dessen drei Seiten durch drei gegebene in gerader Linie liegenden Puncte gehen. Wir wollen die Construction dieser Aufgabe anzeigen, ohne dafs eine Figur vorliegt. Seyen nemlich A, B und C die drei gegebenen in gerader Linie liegenden Puncte; man ziehe durch C eine beliebige gerade Linie, welche die Curve in M und M' schneide, man ziehe ferner AM und BM', welche der Curve zum zweiten Male in M'' und M''' begegnen, verbinde diese Puncte durch eine gerade Linie, und lege endlich vom Durchschnitte dieser geraden Linie mit derjenigen, welche die gegebenen Puncte A, B und C enthält, Tangenten an die gegebene Curve. Jeder der beiden Berührungs-Puncte ist alsdann derjenige Winkel-Pnnct eines der beiden gesuchten Dreiecke, welchen die durch A und B gehenden Seiten bilden. Die Determination der Aufgabe ergibt sich unmittelbar aus der eben angegebenen Construction.

Fig. 17. 292. Die in der 290. Nummer betrachteten Vierecke ordnen sich immer paarweise zusammen, so dafs, wenn wir durch den Punct $(-\zeta, o)$ oder C irgend eine gerade Linie legen, welche die Curve in M und M' schneidet, wir zwei jener Vierecke erhalten, die diese gerade Linie zur gemeinschaftlichen Seite haben, und deren zweite und dritte Seiten durch die beiden festen Puncte $(-\sigma, o)$ und $(-\sigma', o)$ oder A und B gehen. Wir verbinden nemlich zu diesem Ende einmal A mit M und B mit M', das andere Mal A mit M' und B mit M; die vierten Seiten der hierdurch bestimmten Vierecke, nemlich M''M''' und $M_{''}M_{'''}$, schneiden sich im Puncte $(-\zeta', o)$, nach der Figur in D. Bei dieser Construction haben wir ein in die Linie zweiter Ordnung beschriebenes Sechseck MM''M'''M'$M_{'''}M_{''}$ erhalten, und in demselben sind MM'' und M'$M_{'''}$, $MM_{''}$ und M'M''', M''M''' und $M_{''}M_{'''}$, welche sich in A, B und D vereinigen, gegenüberliegende Seiten desselben. Da wir für dieses Sechseck ursprünglich jedes beliebige nehmen können, so gibt der blofse Anblick der beiden Gleichungen:

$$\frac{2\gamma\mu+\sigma+\sigma'}{1+\mu} = \zeta+\zeta',$$

$$\frac{2\mu+\sigma\sigma'}{1+\mu} = \zeta\zeta',$$

den Beweis von folgendem bekannten Satze:

Wenn man in irgend einem, in eine beliebige Linie zweiter Ordnung beschriebenen, Sechsecke die gegenüberliegenden Seiten bis zu ihrem Durchschnitte verlängert, so liegen die drei Durchschnitts-Puncte, die wir auf diese Weise erhalten, in gerader Linie *).

*) Indem wir das in Rede stehende Sechseck, wie im Texte angezeigt worden ist, construiren, folgen die Winkel-Puncte desselben in sehr verschiedener Ordnung auf einander, je nachdem wir die gerade Linie CM' und die beiden Puncte A und B anders bestimmen; wir dürfen uns hierbei nicht auf den Normalfall der 17. Figur beschränken. Wenn wir, von der andern Seite, von einem gegebenen Sechsecke ausgehen, so können wir die Winkel-Puncte desselben, paarweise genommen, durch gerade Linien verbinden, und erhalten alsdann mehrmals drei Puncte, die in gerader Linie liegen. Um hier in nähere Bestimmungen einzugehen, wollen wir die Winkel-Puncte des Sechsecks in der Ordnung, wie sie auf dem Umfange der Linie zweiter Ordnung auf einander folgen, durch (1), (2), (3), (4), (5) und (6) bezeichnen, die gerade Linie ferner, welche die Puncte (1) und (2) verbindet, durch (1,2)

Wir erhalten Modificationen des letzten Satzes, wenn wir einmal, zweimal oder auch dreimal zwei Winkel-Puncte des Sechsecks in einen einzigen Punct zusammenfallen lassen. Dem letzten Falle, den wir hier allein hervorheben wollen, entspricht folgender Satz:

Wenn man in irgend eine Linie zweiter Ordnung ein Dreieck beschreibt, und in den Winkel-Puncten desselben Tangenten legt, so werden letztere von den gegenüberliegenden Seiten in drei Puncten geschnitten, die in gerader Linie liegen.

293. Wir wollen in dieser Nummer die Gleichung (5) der 285. Nummer:

$$\frac{2\mu\alpha+\varkappa+\varkappa'}{1+\mu} = \xi+\xi',$$

oder (2, 1) und dem entsprechend alle übrigen Verbindungs-Linien. Bei dieser Bezeichnung haben wir für den Normal-Fall folgendes Schema:

$$\begin{matrix} (1\ 2) & (2\ 3) & (3\ 4), \\ (4\ 5) & (5\ 6) & (6\ 1), \end{matrix} \qquad \text{(a)}$$

wobei die drei Paare unter einander stehenden Symbole die drei Paare von Linien bezeichnen, deren Durchschnitte in gerader Linie liegen. Wenn wir die Zahlen in diesem Schema in irgend einer andern Ordnung auf einander folgen lassen, so erhalten wir ein neues Schema, deren es so viele gibt, als sechs Elemente sich permutiren lasssen, nemlich $1.2.3.4.5.6 = 720$. Aber nicht jedes dieser Schemata bezieht sich auf drei neue Durchschnitts-Puncte. Behalten wir z. B. die Reihen-Folge der Zahlen des letzten Schema's bei und fangen nur mit einer andern Zahl an, oder kehren wir die Ordnung der Zahlen geradezu um, so erhalten wir dieselben Durchschnitte. Diefs bestätigt sich leicht an folgenden beiden Schemata:

$$\begin{matrix} (3\ 4) & (4\ 5) & (5\ 6), \\ (6\ 1) & (1\ 2) & (2\ 3); \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (3\ 2) & (2\ 1) & (1\ 6), \\ (6\ 5) & (5\ 4) & (4\ 3); \end{matrix}$$

Wir sehen hieraus leicht, dafs wir, um die Zahl der verschiedenen geraden Linien, die drei Durchschnitte enthalten, zu finden, die Zahl der möglichen Permututionen durch 12 dividiren müssen; auf diese Weise kommt 60.

Wir können ferner auch nach der Zahl der verschiedenen Durchschnitts-Puncte fragen, welche auf diesen 60 geraden Linien liegen. Wenn nicht mehrere dieser Linien durch denselben Punct gingen, so wäre die Zahl derselben 180; diese Zahl reducirt sich aber auf den vierten Theil, auf 45, weil durch jeden Durchschnitts-Punct vier der in Rede stehenden geraden Linien gehen. Diefs ist sogleich ersichtlich, da wir in dem Schema (a) z. B. (1) mit (2), ferner (4) mit (5) und endlich zugleich (1) mit (2) und (4) mit (5) vertauschen können, ohne dafs dadurch der erste Punct ein andrer ist.

Dieselbe Zahl erhalten wir auch auf folgende Weise. Der möglichen Verbindungs-Linien je zweier der 6 Winkel-Puncte gibt es $\frac{6.5}{1.2} = 15$, der Durchschnitte dieser 15 Verbindungs-Linien $\frac{15.14}{1.2} = 105$. Aus dem Anblick des Schema's (a) erhellet, dafs die Winkel-Puncte des Sechsecks selbst nicht in Betracht kommen. Durch jeden derselben gehen aber fünf Verbindungs-Linien, die sich auf $\frac{5.4}{1.2} = 10$ verschiedene Weisen zu zwei combiniren lassen. Hiernach müssen wir von jenen 105 Durchschnitten 6.10 hinwegnehmen, so dafs also noch 45 übrig bleiben.

allein für sich betrachten. Aus dieser Gleichung verschwindet der unbestimmte Coefficient μ, wenn:

$$2\alpha = x+x',$$

und wir erhalten alsdann:

$$2\alpha = x+x' = \xi+\xi'.$$

Setzen wir nun $\alpha = 0$, was wir, ohne der Allgemeinheit irgend Abbruch zu thun, immer können, wenn wir die Coordinaten-Axe gehörig bestimmen, und nehmen wir demgemäfs auch $x+x' = 0$, so folgt $\xi+\xi' = 0$. Die letzte Gleichung bezieht sich, da es im Allgemeinen zwei resultirende Systeme gibt, auf eine zwiefache Construction. Wir erfüllen die Bedingungs-Gleichung $x+x' = 0$, indem wir für das ursprüngliche System irgend zwei solche gerade Linien nehmen, die parallel sind den Diagonalen irgend eines in die Curve beschriebenen Parallelogrammes, dessen Seiten denjenigen beiden zugeordneten Durchmessern parallel sind, auf welche wir die Curve, damit aus ihrer Gleichung das mit xy behaftete Glied ausfalle, bezogen haben. Alsdann erhalten wir, indem wir die Durchschnitte dieses Systems mit der Curve, paarweise genommen, durch gerade Linien verbinden, im Allgemeinen noch zweimal zwei gerade Linien, die den Diagonalen solcher Parallelogramme, wie wir eben bestimmt haben, parallel sind.

Wenn wir ferner die Linien des ursprünglichen Systems wie eben, und zugleich auf solche Art bestimmen, dafs sie der Curve in denselben beiden Puncten begegnen, so ist offenbar, dafs eine Linie eines der resultirenden Systeme unverändert bleibt. Alsdann zeigt die Gleichung:

$$\xi+\xi' = 0,$$

dafs nicht nur ξ oder ξ' allein, sondern beide Gröfsen keine Aenderung erleiden, wie wir auch x, welches gleich ist $(-x')$, bestimmen mögen. Die zweite Linie des resultirenden Systems bleibt also immer mit sich selbst parallel.

Wenn wir zwei beliebige gerade Linien, die den Axen der Curve parallel sind, zu Coordinaten-Axen nehmen, so heifst die Bedingungs-Gleichung:

$$x+x' = 0,$$

anders nichts, als dafs die Linien des ursprünglichen Systems, die Axen der Curve unter solchen Winkeln schneiden, die sich zu π ergänzen. Dasselbe thun alsdann die beiden Linien jedes der resultirenden Systeme. Hieraus folgt denn ferner, dafs, wenn wir diese beiden Systeme unter sich oder eines derselben mit dem ursprünglichen Systeme zusammenstellen, eine Linie des einen Systems mit einer Linie des andern Systems dieselben Winkel bildet, als die andere Linie des einen Systems mit der andern Linie des andern.

Wenn die Curve, welche wir betrachten, ein Kreis ist, und wir denselben auf rechtwinklige Coordinaten beziehen, so verschwindet α. Wir können demnach irgend zwei beliebige gerade Linien für die Linien des ursprünglichen Systems nehmen, und alsdann, bei der Annahme rechtwinkliger Coordinaten, die erste Axe so bestimmen, dafs:

$$x+x' = 0,$$

und also auch:

$$\xi+\xi' = 0.$$

Hierin sind die allbekannten Sätze enthalten, dafs, wenn man in einen Kreis irgend ein beliebiges Viereck beschreibt, die Summe zweier gegenüberstehenden Winkel gleich ist π; und dafs solche Peripherie-Winkel, die auf demselben Bogen stehen, einander gleich sind.

291. Wir schliefsen hier noch einige Bemerkungen an, die bei der Vergleichung von Winkeln für die analytische Entwicklung von Bedeutung sind. Wenn durch die vier

Durchschnitts-Puncte zweier Systeme von zwei geraden Linien sich ein Kreis legen läfst; so müssen sich ihre Gleichungen zu der Gleichung eines Kreises verbinden lassen; wenn, umgekehrt, die Gleichungen zweier Linien-Systeme sich zu einer Kreis-Gleichung verbinden lassen, so läfst sich ein Kreis durch die vier Durchschnitts-Puncte beschreiben, und mithin schneidet eine gerade Linie des einen Systems eine des andern Systems unter denselben Winkeln, unter denen die beiden übrigen geraden Linien sich schneiden.

Wenn die beiden Linien beider Systeme alle vier durch denselben Punct gehen, so können wir, was *a priori* leicht ersichtlich ist, die Gleichungen der beiden Systeme zu der Gleichung eines Punctes verbinden, und wenn diese Gleichung alsdann die Form der Gleichung eines Kreises, dessen Radius gleich Null ist, annehmen kann, so finden dieselben Winkel-Beziehungen als eben noch immer Statt.

Wenn endlich irgend zwei gegebene gerade Linien von einer dritten, für deren Gleichung wir folgende nehmen:

$$y + Ax + B = 0,$$

unter gleichen Winkeln geschnitten werden sollen, so mufs die Gleichung des Systems der beiden ersten geraden Linien sich mit der Gleichung:

$$(y + Ax + B)^2 = 0,$$

die das System zweier in die dritte gerade Linie zusammenfallenden Linien bezeichnet, sich zu der Gleichung eines Kreises verbinden lassen. Dieser Kreis berührt offenbar die beiden ersten geraden Linien, in denjenigen beiden Puncten, in welchen sie von der dritten Linie geschnitten werden.

Im nächsten Paragraphen werden wir uns von der Fruchtbarkeit der in dieser Nummer gemachten Bemerkungen überzeugen.

295. Wie wir in den letzten Nummern die Gleichung (5) der 285. Nummer behandelt haben, wollen wir nun die Gleichung (6) derselben Nummer, nemlich folgende:

$$\frac{\mu\beta + xx'}{1 + \mu} = \xi\xi', \qquad (1)$$

behandeln. Aus dieser Gleichung verschwindet μ, wenn:

$$\beta = xx', \qquad (2)$$

und wir erhalten alsdann:

$$\beta = xx' = \xi\xi'. \qquad (3)$$

Wenn wir $\beta = -1$ setzen, so ist, in der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, die gegebene Curve eine gleichseitige Hyperbel, und um die Bedingungs-Gleichung (2) zu befriedigen, müssen wir die beiden geraden Linien des ersten Systems senkrecht auf einander annehmen. Die Gleichung (3) zeigt, dafs alsdann auch die beiden Linien jedes der resultirenden Systeme auf einander senkrecht stehen. In der 18. Figur seyen M′M″ und MM‴ die beiden sich rechtwinklig schneidenden geraden Linien des ursprünglichen Systems, alsdann sind MM′ und M″M‴, MM″ und M′M‴ die geraden Linien der resultirenden Systeme, und stehen also ebenfalls auf einander senkrecht. In jedem der vier Puncte M, M′, M″ und M‴ vereinigen sich drei gerade Linien, welche diejenigen Perpendikel sind, welche in dem, durch die drei übrigen Puncte bestimmten, Dreiecke von diesen Puncten auf die gegenüberstehenden, nöthigenfalls zu verlängernden, Seiten gefällt werden können. Dafs diese drei Perpendikel in jedem beliebigen Dreieck sich in demselben Puncte kreuzen, ist auf diese Weise indirect bewiesen, und zugleich ist dargethan, dafs in diesem Kreuzungs-Puncte alle möglichen gleichseitigen Hyperbeln sich schneiden, welche durch die drei Winkel-Puncte des Dreiecks gehen. Fig. 18.

Hiernach können wir, wenn vier Puncte gegeben sind, beliebig viele neue Puncte derjenigen gleichseitigen Hyperbel, die durch die vier gegebenen Puncte geht, bestimmen *).

Wenn wir als ursprüngliches System irgend zwei gerade Linien nehmen, die sich in irgend einem Puncte einer gleichseitigen Hyperbel rechtwinklig schneiden, so erhalten wir nur ein einziges resultirendes System, die Tangente im Durchschnitte und eine Chorde, die auf einander wiederum senkrecht sind **).

Wenn wir statt der gegebenen gleichseitigen Hyperbel ein System zweier sich rechtwinklig schneidenden geraden Linien nehmen, so erhalten wir unmittelbar jenen Satz, daſs die drei von den Winkel-Puncten eines Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Perpendikel sich in demselben Puncte schneiden.

296. Wenn wir ferner in eine gleichseitige Hyperbel durch irgend zwei feste Puncte derselben zwei auf einander senksechte Chorden legen, so bleibt diejenige gerade Linie, welche die beiden anderen End-Puncte dieser Chorden verbindet, stets mit sich selbst parallel, wie wir auch, unter den gemachten Bestimmungen, jene Chorden annehmen mögen. Wenn man insbesondere einen rechten Winkel sich um irgend einen festen Punct einer gleichseitigen Hyperbel drehen läſst, so sind alle Chorden, die durch die Durchschnitte der Schenkel des Winkels mit der Curve in allen verschiedenen Lagen des Winkels bestimmt werden, unter sich parallel.

297. Die Verallgemeinerung der Resultate der beiden vorigen Nummern für den Fall, wo β irgend ein beliebiges ist, hat keine Schwierigkeit. Wir erhalten hier zunächst einen allgemeinen Satz vom Dreiecke, der demjenigen vom Kreuzen der Perpendikel entspricht, und können, wenn drei Puncte, die Richtung der Coordinaten-Axen und β gegeben sind, sogleich einen vierten Punct bestimmen, in welchem alle Linien zweiter Ordnung sich schneiden, welche durch die drei gegebenen Puncte gehen, und in deren Gleichungen β Coefficient von x^2 ist. Wenn ursprünglich vier Puncte gegeben sind, so ist die Linie zweiter Ordnung vollkommen bestimmt, und wir können so viele Puncte derselben finden als wir wollen.

Um die Resultate der 296. Nummer in der Verallgemeinerung zu construiren, können wir eine Ellipse und eine Hyperbel, welche eine Axe gemeinschaftlich haben, und in denen das Axen-Verhältniſs dasselbe ist, mit einander verbinden.

298. Wir wenden uns nun zu der Gleichung (3) der 289. Nummer, nemlich zu folgender:

$$\frac{2\mu\gamma+\sigma+\sigma'}{1+\mu} = \zeta+\zeta'. \qquad (1)$$

Aus dieser Gleichung verschwindet μ, wenn:

$$\sigma+\sigma' = 2\gamma, \qquad (2)$$

und alsdann erhalten wir:

$$2\gamma = \sigma+\sigma' = \zeta+\zeta', \qquad (3)$$

*) *Recherches sur la determination d'une hyperbole equilatère au moyende quatre conditions données.* Par. MM. Brianchon et Poncelet. Gergonne Ann. XI, p. 205—220.

**) a. a. O.

wo sich im Allgemeinen ζ und ζ' auf ein zwiefaches Linien-System beziehen. Die allgemeine Bedeutung der Bedingungs-Gleichung (2) ist, dafs die beiden geraden Linien des ursprünglichen Systems die Axe der y in zweien solchen Puncten schneiden, die gleichweit von demjenigen Puncte abstehen, in welchem der alle dieser Axe parallele Chorden halbirende Durchmesser derselben begegnet. Wenn also die beiden geraden Linien des ursprünglichen Systems diese Bedingung erfüllen, so findet nach der Gleichung (3) dasselbe Statt für die beiden geraden Linien jedes der resultirenden Systeme. Hiernach ergeben sich nachstehende einzelne Resultate:

Wenn man auf einer Chorde oder ihrer Verlängerung zwei solche Puncte annimmt, die von der Mitte der Chorde und also auch von den Durchschnitten derselben mit der Curve gleichweit entfernt sind, und durch diese Puncte zwei beliebige gerade Linien legt, welche die Curve in vier Puncten schneiden, so begegnet jedes derjenigen Linien-Paare, die diese vier Puncte, paarweise genommen, verbinden, der Chorde oder ihrer Verlängerung wiederum in zwei solchen Puncten, die von der Mitte der Chorde, und also auch von den beiden obigen Durchschnitten, gleichweit abstehen.

Dieser Satz besteht auch dann noch, wenn wir die geraden Linien des ursprünglichen Systems beide durch die Mitte der Chorde legen. Lassen wir überdiefs noch diese beiden Linien in eine einzige zusammenfallen, so erhalten wir als einziges resultirende System zwei Tangenten, deren Durchschnitte mit obiger Chorde gleichweit von den Durchschnitten dieser mit der Curve abstehen. Und, umgekehrt, wenn wir von zwei Puncten einer geraden Linie, die gleichweit von den Durchschnitten derselben mit der Curve abstehen, Tangenten an dieselbe legen, so können wir die beiden Paare von Berührungs-Puncten durch vier gerade Linien mit einander verbinden; zwei dieser geraden Linien gehen durch die Mitte der auf der ersten geraden Linie von der Curve interceptirten Chorde, die zwei anderen aber sind dieser Linie parallel, was mit dem Vorstehenden durchaus in Uebereinstimmung ist; denn jede dieser Berührungs-Chorden ist als ein System zweier zusammenfallenden Linien anzusehen, die beide der beliebig angenommenen Chorde in unendlicher Entfernung begegnen, jedoch so, dafs diese Durchschnitts-Puncte zu beiden Seiten liegen.

Statt der bisher betrachteten, die Linie zweiter Ordnung schneidende, gerade Linie können wir auch eine Tangente oder auch eine der Curve nicht begegnende gerade Linie nehmen; wofür sich sogleich die Modificationen der vorstehenden Sätze ergeben.

Wir können endlich noch das ursprüngliche System auf unendlichmalig verschiedene Weise so bestimmen, dafs eine gerade Linie eines resultirenden Systems durch einen festen Punct der zweiten Axe, durch den Punct $(-\zeta, o)$ geht; alsdann geht die zweite Linie des Systems ebenfalls durch einen festen Punct

$$(-\zeta', o) \quad \text{oder} \quad ((\zeta-2\gamma), o).$$

299. Wir wollen in dieser Nummer die Gleichung (5) der 289. Nummer, nemlich folgende:

$$\frac{\mu\varepsilon+\sigma\sigma'}{1+\mu} = \zeta\zeta',$$

gerade so behandeln, wie die früheren. Aus dieser Gleichung verschwindet μ, wenn:

$$\varepsilon = \sigma\sigma',$$

und alsdann ergibt sich:

$$\varepsilon = \sigma\sigma' = \zeta\zeta'.$$

Wenn wir also auf der Axe der y irgend zwei Puncte bestimmen, deren Abstände vom Anfangs-Puncte, in einander multiplicirt, ein Product geben, das gleich ist ϵ (also gleich dem Producte der Ordinaten der Durchschnitte der Curve mit der zweiten Axe), und wir durch diese beiden Puncte ein System zweier geraden Linien legen, so schneiden die beiden Linien jedes der resultirenden Systeme die zweite Axe unter denselben Beziehungen. Wenn wir überdiefs das ursprüngliche System so bestimmen, dafs eine Linie eines resultirenden Systems durch einen festen Punct der zweiten Axe geht, so geht die andere Linie desselben Systems ebenfalls durch einen festen Punct; ist jene Linie der zweiten Axe parallel, so geht die andere durch den Anfangs-Punct, und umgekehrt. Wir gehen hier in kein Detail ein und heben nur Folgendes beispielweise hervor.

Wenn wir durch irgend einen Punct zwei Tangenten an eine Linie zweiter Ordnung und durch denselben Punct irgend eine gerade Linie legen, die der Curve begegnet, und jenen Punct als Anfangs-Punct, diese Linie als zweite Axe betrachten, so erhalten wir zwei Puncte, die den obigen Forderungen entsprechen, wenn wir die Mitte der auf der geraden Linie intercepirten Chorde und den Durchschnitt dieser Linie mit der Berührungs-Chorde nehmen (270). Hiernach ergibt sich eine specielle Construction, und indem wir noch mehr ins Besondere gehen, erhalten wir folgenden Satz:

Wenn man von irgend einem beliebigen Puncte Tangenten an eine Linie zweiter Ordnung zieht, und in dieselbe ein Dreieck beschreibt, dessen Basis die Berührungs-Chorde ist, so werden von jedem der beiden Schenkel des Dreiecks diejenigen Chorden halbirt, welche dem andern Schenkel parallel sind und, genugsam verlängert, durch den Durchschnitt der Tangenten gehen; und umgekehrt, wenn man irgend ein Dreieck in eine Linie zweiter Ordnung beschreibt, so schneiden sich zwei Chorden, die einem Schenkel desselben parallel sind, und von dem andern halbirt werden in dem Durchschnitte der in den Winkel-Puncten der Basis an die Curve gelegten Tangenten. Dieser Punct bleibt also derselbe, wohin die Spitze des Dreiecks auch fallen mag, so lange nur die Basis dieselbe bleibt.

300. Wir gehen weiter. Wenn wir die beiden Theile je zweier folgender fünf Gleichungen:

$$\frac{2\mu\alpha+\varkappa+\varkappa'}{1+\mu} = \xi+\xi', \quad (1)$$

$$\frac{\mu\beta+\varkappa\varkappa'}{1+\mu} = \xi\xi', \quad (2)$$

$$\frac{2\mu\gamma+\sigma+\sigma'}{1+\mu} = \zeta+\zeta', \quad (3)$$

$$\frac{2\mu\delta+\varkappa\sigma'+\varkappa'\sigma}{1+\mu} = \xi\zeta'+\xi'\zeta, \quad (4)$$

$$\frac{\mu\epsilon+\sigma\sigma'}{1+\mu} = \zeta\zeta', \quad (5)$$

in einander dividiren, so erhalten wir einen vom Coefficienten μ unabhängigen Ausdruck, wenn die jedesmaligen, in jenen beiden Gleichungen vorkommenden Coefficienten aus der Gleichung der Curve Null sind. Durch diese Bedingung erhalten wir Bestimmungen über die Natur der Curve oder die Annahme des Axen-Systems. Wir können hier nicht alle einzelnen Fälle behandeln, die folgenden Nummern werden aber hinlänglich deutlich machen, wie wir dabei zu verfahren haben.

301. Wenn wir zugleich: Fig. 19.

$$\gamma = 0, \quad \varepsilon = 0,$$

setzen, so stellt die Gleichung:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

irgend eine beliebige auf irgend eine ihrer Tengenten, als Axe der y, bezogene Linie zweiter Ordnung dar; der Berührungs-Punct ist zum Anfangs-Puncte der Coordinaten, die Richtung der ersten Axe aber ganz beliebig genommen. Bei dieser Annahme reduciren sich die Gleichungen (3) und (5) der vorigen Nummer auf folgende:

$$\frac{\sigma+\sigma'}{1+\mu} = \zeta+\zeta',$$

$$\frac{\sigma\sigma'}{1+\mu} = \zeta\zeta',$$

und wenn wir dividiren, kommt:

$$\frac{\sigma+\sigma'}{\sigma\sigma'} = \frac{\zeta+\zeta'}{\zeta\zeta'} \qquad (1)$$

oder auch:

$$\frac{1}{\sigma'}+\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\zeta}+\frac{1}{\zeta'},$$

wo sich der letzte Theil dieser Gleichungen auf ein zwiefaches Linien-System bezieht. Wenn man also irgend vier Puncte (von denen zwei oder auch zweimal zwei zusammenfallen können) auf einer Linie zweiter Ordnung beliebig annimmt, und man diese Puncte, paarweise genommen, was auf dreifache Art geschehen kann, durch zwei gerade Linien verbindet, so schneiden die Linien jedes Paares jede beliebige Berührende so, dafs die Summe der reciproken Werthe der Abstände der beiden Durchschnitte vom Berührungs-Puncte für alle drei Linien-Systeme dieselbe ist. In der 19. Figur seyen M, M', M'' und M''' die vier beliebig angenommenen Puncte, $\sigma\sigma'$ die beliebige Tangente, und T der Berührungs-Punct. Zugleich ist der besondere Fall genommen, dafs eine der Verbindungs-Linien, nemlich MM''', der Tangente parallel ist. Alsdann haben wir, indem wir auf die Lage der Durchschnitte der verschiedenen Chorden mit der Tangente in Beziehung auf den Berührungs-Punct Rücksicht nehmen.

$$\frac{1}{T\sigma}-\frac{1}{T\sigma'} = \frac{1}{T\zeta}-\frac{1}{T\zeta'} = \frac{1}{T\zeta}.$$

302. Wenn vier Puncte und eine Tangente einer Linie zweiter Ordnung gegeben sind, so können wir nach der vorigen Nummer den Berührungs-Punct bestimmen. Seyen nemlich M, M', M'' und M''' irgend vier gegebene Puncte, durch diese vier Puncte lege man zwei Paare von geraden Linien, etwa MM'' und MM''', MM' und M''M''', die der gegebenen die Curve berührenden geraden Linie in den Puncten σ und σ', ζ und ζ' begegnen. Durch die letzten Buchstaben, mit negativem Zeichen genommen, bezeichnen wir, wie bisher, die Abstände der Durchschnitte vom gesuchten Berührungs-Puncte, dessen (unbekannten) Abstand von irgend einem festen, beliebig auf der Tangente angenommenen, Puncte wir Z nennen wollen. Alsdann erhalten wir nach (1), indem wir σ mit $(z+\sigma)$, σ mit $(z+\sigma')$, ζ mit $(z+\zeta)$ und ζ' mit $(z-\zeta')$ vertauschen folgende Gleichung:

$$\frac{\sigma+\sigma'+2z}{(\sigma+z)(\sigma'+z)}, = \frac{\zeta+\zeta'+2z}{(\zeta+z)(\zeta'+z)}.$$

Diese Gleichung reducirt sich in Beziehung auf z auf den zweiten Grad und z, hat also einen zwiefachen Werth, dem zwei verschiedene Puncte entsprechen. Wir sehen hieraus, dafs es im Allgemeinen zwei verschiedene Linien zweiter Ordnung gibt, welche

durch die vier gegebenen Puncte gehen und die gegebene gerade Linie berühren. Wir können diese Curven construiren, da wir fünf Puncte jeder derselben kennen.

Fig. 20. 303. Wenn wir, um ein zweites Beispiel zu nehmen, zugleich:

$$\beta = 0, \quad \varepsilon = 0,$$

setzen, und wir mithin eine Parabel betrachten, die auf einen ihrer Durchmesser und der Tangente in dessen Scheitel bezogen ist, oder eine Hyperbel, die auf eine, einer ihrer Asymptoten parallelen geraden Linie, als erste Axe, und den Durchschnitt derselben mit der Curve als Anfangs-Punct bezogen ist, so gehen die Gleichungen (2) und (5) der 300. Nummer in folgende über:

$$\frac{\varkappa\varkappa'}{1+\mu'} = \xi\xi',$$

$$\frac{\sigma\sigma'}{1+\mu} = \zeta\zeta',$$

und wenn wir die beiden ersten Theile dieser Gleichungen in einander dividiren, ergibt sich:

$$\frac{\sigma\sigma'}{\varkappa\varkappa'} = \frac{\zeta\zeta'}{\xi\xi'}.$$

$\left(-\frac{\sigma}{\varkappa}\right)$ und $\left(-\frac{\sigma'}{\varkappa'}\right)$, $\left(-\frac{\zeta}{\xi}\right)$ und $\left(-\frac{\zeta'}{\xi'}\right)$ sind die Abscissen derjenigen Puncte, in welchen die beiden geraden Linien des ursprünglichen und des resultirenden Systems (letzteres ist in der Regel ein zwiefaches) die erste Axe schneidet, für welche wir irgend eine beliebige, den Durchmessern der Parabel oder einer der beiden Asymptoten der Hyperbel parallele, gerade Linie, auf der wir die Abscissen von deren Durchschnitt mit der Curve an rechnen, nehmen können. Wir haben hiernach in der 20. Figur, wo M, M′, M″ und M‴ irgend vier beliebige Puncte der Curve sind und AF die erste Axe ist:

$$OA.OB = OC.OF = OD.OE. \qquad (1)$$

Wenn man also in eine Parabel oder eine Hyperbel irgend ein Viereck beschreibt, so schneiden je zwei gegenüberstehende Seiten und die beiden Diagonalen jeden Durchmesser der Parabel oder jede einer Asymptote der Hyperbel parallele gerade Linie so, daſs die Producte der jedesmaligen beiden, vom Durchschnitte mit der Curve an gerechneten, Segmente gleich sind.

Wenn wir drei der beliebig angenommenen Puncte, etwa M, M′ und M″, als fest betrachten, den vierten aber M‴ auf der Curve fortrücken lassen, so sind A, E und F feste Puncte, so daſs wir, wo auch der Punct M‴ liegen mag, folgende Gleichungen haben:

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OF}{OA} = const., \quad \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = const., \quad \frac{OB}{OD} = \frac{OE}{OA} = const.$$

Die erste Axe wird also von zwei beliebigen geraden Linien, die durch irgend zwei feste Puncte (M und M″, M und M′, M′ und M″) gehen, und sich in einem auf der Curve beliebig fortrückenden Puncte, (in M‴), begegnen, so geschnitten, daſs die Abscissen der jedesmaligen beiden Durchschnitte immer in demselben Verhältnisse stehen. Hierin liegt der bekannte Satz, den wir schon beiläufig in der Note zur 272. Nummer anführten, und bei dessen Aussage wir hier nicht verweilen.

Wenn wir die erste Axe durch den Durchschnitt der beiden Diagonalen oder zweier gegenüberstehenden Seiten des Vierecks MM′M″M‴ legen, so ist die Abscisse dieses Durchschnittes mittlere Proportionale zwischen denjenigen beiden Segmenten, welche in

dem einen Falle jedem der beiden Paare gegenüberliegender Seiten, in dem andern Falle einem Paare derselben, so wie den beiden Diagonalen entsprechen.

Es können auch in der bisher betrachteten Construction zwei Puncte des Vierecks MM'M''M''' in einen einzigen zusammenfallen; dasselbe kann auch zwiefach geschehen. Diesem letztern Falle entsprechen folgende Sätze:

Wenn man an eine Parabel oder eine Hyperbel irgend zwei Tangenten legt und die Berührungs-Chorde zieht, so wird jeder Durchmesser der Parabel oder jede, einer Asymptote der Hyperbel parallel gezogene gerade Linie, so geschnitten, daſs dasjenige Segment, welches zwischen der Curve und der Berührungs-Chorde liegt, mittlere Proportionale zwischen denjenigen beiden Segmenten ist, die zwischen der Curve und den beiden Tangenten liegen. Wenn der Durchmesser oder die einer Asymptote parallele gerade Linie durch den Durchschnitt der Tangenten geht, so wird das zwischen diesem Durchschnitte und der Berührungs-Chorde liegende Segment von der Curve halbirt.

304. Nach der Gleichung (1) können wir, wenn irgend vier Puncte und eine gerade Linie gegeben sind, beliebig viele Puncte derjenigen Hyperbel bestimmen, welche durch die gegebenen Puncte geht, und eine der gegebenen geraden Linie parallele Asymptote hat. Seyen M, M', M'' und M''' die vier gegebenen Puncte, AF irgend eine gerade Linie, die der gegebenen parallel ist und deren Durchschnitt mit der Curve wir bestimmen wollen. Wir ziehen MM''' und M'M'', MM'' und M'M''', die der geraden Linie BF in C, F, E und D begegnen; wenn wir alsdann auf derselben geraden Linie irgend einen festen Punct annehmen, etwa A, und:

$$AO = z, \quad AC = c, \quad AF = f, \quad AE = e, \quad AD = d,$$

setzen, so erhalten wir aus (1) zur Bestimmung von z folgende Gleichung:

$$(c-z)(f-z) = (e-z)(d-z),$$

die, wenn wir entwickeln, sich auf den ersten Grad reducirt und folgende wird:

$$((e+d)-(c+f))z+cf-de = o.$$

Wir können diese Gleichung noch vereinfachen, indem wir statt des Punctes A irgend einen der vier Durchschnitts-Puncte C, D, E oder F nehmen.

Es ist gut zu bemerken, daſs wir für zwei bestimmte Richtungen der gegebenen geraden Linie rücksichtlich der vier gegebenen Puncte nicht eine Hyperbel, sondern eine Parabel erhalten.

305. Wenn die gerade Linie AF eine der Asymptoten selbst ist, so ist z gröſser als jede gegebene Gröſse, so daſs wir in der End-Gleichung der vorigen Nummer das von z unabhängige Glied vernachlässigen können, und also folgenden Ausdruck erhalten:

$$e+d = c+f,$$

oder:

$$e-c = f-d.$$

Wenn wir also in eine Hyperbel irgend ein Viereck beschreiben und in demselben die Diagonalen ziehen, so wird jede der Asymptoten von den beiden Paaren gegenüberstehender Seiten, so wie von einem derselben und den beiden Diagonalen so geschnitten, daſs die zwischen den beiden jedesmalig zusammengestellten Linien-Paare liegenden Segmente einander gleich sind.

Wenn wir zwei Puncte des Vierecks in einen einzigen zusammenfallen lassen, so erhalten wir eine Modification des letzten Satzes; wenn wir zugleich auch die beiden übri-

gen Puncte in einen einzigen zusammenfallen lassen, so ist der entsprechende Satz folgender:

Die Berührungs-Chorde halbirt das auf jeder der Asymptoten von irgend zweien Tangenten bestimmte Segment.

306. Wir brechen hier ab, um uns nun zur allgemeinen Theorie der Pole und Polaren zu wenden. Zum Behuf der nächsten Erörterungen nehmen wir für die Gleichung der Curve immer noch die allgemeine Gleichung:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0, \quad (1)$$

für das ursprüngliche Linien-System aber zwei im Anfangs-Puncte der Coordinaten sich schneidende gerade Linien, welche, beide zugleich, durch eine Gleichung von folgender Form dargestellt werden:

$$y^2+(\varkappa+\varkappa')xy+\varkappa\varkappa'x^2 = 0. \quad (2)$$

Bei diesen Voraussetzungen verwandeln sich die Gleichungen (7)—(9) der 285. Nummer in folgende:

$$\frac{2\mu\gamma}{1+\mu} = -(\xi+\xi')x''-2y'', \quad (4)$$

$$\frac{2\mu\delta}{1+\mu} = -(\xi+\xi')y''-2\xi\xi'x'', \quad (5)$$

$$\frac{\mu\varepsilon}{1+\mu} = y''^2+(\xi+\xi')x''y''+\xi\xi'x''^2. \quad (6)$$

Wenn wir die erste dieser Gleichungen mit $\frac{y''}{2}$, die zweite mit $\frac{x''}{2}$ multipliciren, alsdann alle drei Gleichungen addiren, und endlich alle Glieder der resultirenden Gleichung durch $\frac{\mu}{1+\mu}$ dividiren, so kommt:

$$\gamma y''+\delta x''+\varepsilon = 0. \quad (7)$$

Diese Gleichung ist unabhängig von $\varkappa$ und $\varkappa'$ und stellt, wenn wir y'' und x'' als veränderliche Gröſsen betrachten, die Polare des Anfangs-Punctes, oder des Durchschnittes der beiden geraden Linien des ursprünglichen Systems (1) dar. Diese Polare enthält also diejenigen Puncte, in welchen die beiden Linien der beiden resultirenden Systeme sich schneiden. Da wir ursprünglich auch von einem dieser beiden resultirenden Systeme hätten ausgehen können, und alsdann auf gleiche Weise gefunden hätten, daſs die Polare des Durchschnittes der Linien dieses Systems durch den Durchschnitt der Linien des andern dieser Systeme und durch den vorhin zum Anfangs-Puncte der Coordinaten genommenen Durchschnitt geht, so haben wir folgende Sätze bewiesen:

Wenn man in irgend eine Linie zweiter Ordnung irgend ein Viereck beschreibt, die Diagonalen desselben zieht, und die gegenüberstehenden Seiten bis zu ihrem Durchkreuzen verlängert, so erhalten wir drei Durchschnitts-Puncte, von denen je zwei auf der Polaren des dritten liegen. Wenn man in irgend eine Linie zweiter Ordnung mehrere Vierecke beschreibt, deren beide Diagonalen oder deren zwei gegenüberliegende Seiten sich in demselben Puncte schneiden, so liegen in dem einen Falle die Durchschnitte der beiden Paare gegenüberliegender Seiten, in dem andern Falle der beiden noch übrigen gegenüberstehenden Seiten und der beiden Diagonalen auf ein und derselben geraden Linie für alle jene Vierecke, nemlich auf der Polaren jenes festen Durchschnitts-Punctes.

307. Da die Gleichung (3) auch zwei gerade Linien darstellen kann, die in eine einzige durch den Anfangs-Punct gehende gerade Linie zusammenfallen, und alsdann das

resultirende System aus den in den beiden Durchschnitten dieser Linie mit der Curve, an die Curve gelegten Tangenten besteht, so liegt in dem Vorstehenden als besonderer Fall auch folgender Satz:

Wenn man durch irgend einen festen Punct gerade Linien legt, die einer Linie zweiter Ordnung begegnen, so schneiden sich die Tangenten in jedem Paare von Durchschnitten auf ein und derselben geraden Linie, der Polaren des Anfangs-Punctes; und, umgekehrt, wenn man von beliebigen Puncten irgend einer geraden Linie Tangenten-Paare an eine Linie zweiter Ordnung legt, so gehen alle Berührungs-Chorden durch ein und denselben Punct, den Pol der geraden Linie.

308. Wenn wir ein System zweier geraden Linien als Linie zweiter Ordnung nehmen, so liegt in der letzten analytischen Entwicklung der Beweis desjenigen Satzes, auf den sich die 17. Figur der 1. Tafel bezieht, und der schon in der 63. Nummer bewiesen worden ist. Sind nemlich in der eben angeführten Figur OY und OX die beiden, die Curve vertretenden, geraden Linien, und gehen die Linien aller ursprünglichen Systeme durch den beliebig angenommenen Punct S, so ist die gerade Linie Oσ der Ort für die Durchschnitte der beiden Linien der resultirenden Systeme. Zugleich folgt aus der Schlufs-Erörterung der 268. Nummer, dafs PS in σ und Q harmonisch geschnitten wird.

309. Wenn wir durch irgend einen festen Punct O zwei gerade Linien legen, die einer gegebenen Linie zweiter Ordnung in den vier Puncten M, M′, M″ und M‴ begegnen, so ist für alle diejenigen Linien zweiter Ordnung, welche durch dieselben vier Puncte gehen, ein und dieselbe gerade Linie PO′ Polare des festen Punctes O. Als eine jener Linien zweiter Ordnung können wir ein zwiefaches System zweier geraden Linien nehmen, O′M′ und O′M oder MM″ und M′M‴. Nach der vorigen Nummer wird also OM′ in M und R harmonisch geschnitten, so dafs: Fig. 21.

$$OM : MR = OM' : RM'.$$

Es ist leicht ersichtlich, dafs hierin folgender allgemeine Satz enthalten ist:

Wenn man durch irgend einen beliebigen Punct eine beliebige gerade Linie zieht, welche irgend einer gegebenen Curve zweiter Ordnung begegnet, so wird diese gerade Linie von der Polaren des Punctes (im besondern Falle, dafs dieser Punct aufserhalb liegt, von der Berührungs-Chorde) und der Curve harmonisch geschnitten.

310. Der Pol jeder geraden Linie, die durch P, den Durchschnitt der beiden Diagonalen MM″ und M′M‴, geht. liegt auf der Polaren dieses Punctes, alfso auch der Pol jeder der Diagonalen selbst. Wenn wir also in M, M′, M″ und M‴ Tangenten legen, so erhalten wir eine vollständige, um die Curve beschriebene, vierseitige Figur, deren gegenüberliegende Seiten NN′ und N″N‴, NN‴ und N′N″ sich in zwei Puncten Q und Q′ schneiden, die auf der Polaren von P, auf OO′, liegen. Aehnlich liegt der Pol jeder geraden Linie, die durch O geht, also auch der Pol von MM′, so wie von M″M‴, oder N″ und N, auf der Polaren von O, mithin auf PO′. Ebenso liegen endlich N′ und N‴ auf PO, der Polaren von O′. Hierin sind mehrere einzelne Sätze enthalten, die wir in Nachstehendem zusammenfassen wollen. Fig. 21.

Wenn man in eine beliebige Curve zweiter Ordnung irgend ein Viereck (MM′M″M‴) beschreibt, und die gegenüberliegenden Seiten desselben bis zu ihrem Durchschnitte verlängert, ferner ein zweites Viereck (NN′N″N‴) um die Curve beschreibt, dessen Seiten

dieselbe in den Winkel-Puncten des erstern Vierecks berühren, und wiederum die gegenüberliegenden Seiten bis zu ihrem Durchschnitte verlängert, und man also auf diese Weise zwei vollständige vierseitige Figuren erhält: so fallen die beiden dritten Diagonalen dieser Figuren in eine einzige gerade Linie ($O'QOQ'$) zusammen, während die ersten und zweiten Diagonalen sich alle vier in demselben Puncte (P), dem Pole jener geraden Linie, kreuzen. Jede der beiden ersteren Diagonalen der umschriebenen Figur (NN'' und $N'N'''$) enthält zugleich nebst dem Durchschnitte (P) der beiden Diagonalen des eingeschriebenen Vierecks auch noch einen der beiden Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten desselben (O' und O). Der Durchschnitt je zweier der drei Diagonalen einer der Curve umschriebenen vollständigen vierseitigen Figur ist der Pol der jedesmaligen dritten Diagonale.

Da OM' in M und R harmonisch getheilt ist, so wird auch jede andere gerade Linie, die durch O geht, von $N''M$, $N''R$ und $N''M'$ harmonisch geschnitten, also auch ON' und $O'Q'$, so dafs:

$$ON''' : N''P = ON' : PN',$$

$$O'Q : QO = O'Q' : OQ'.$$

Auf ähnliche Weise wird auch $O'N''$ in N und P harmonisch getheilt.

Fig. 21. 311. Wir können nach der, in der 306. Nummer entwickelten, allgemeinen Theorie der Pole und Polaren, auf eine leichte Weise von einem gegebenen Puncte aus Tangenten an eine gegebene Linie zweiter Ordnung legen. Sey O der gegebene Punct; durch diesen Punct lege man irgend zwei gerade Linien, die der Curve in M und M', M''' und M'' begegnen, man ziehe ferner MM''' und $M'M''$, MM'' und $M'M'''$, die sich in O' und P schneiden, und verbinde endlich O' und P durch eine gerade Linie. Die Durchschnitte der, auf diese Weise bestimmten, geraden Linie mit der Curve sind alsdann diejenigen beiden Puncte, in welchen die Curve von den durch den gegebenen Punct O gehenden Tangenten berührt wird.

312. Der Pol jeder geraden Linie, welche durch den Mittelpunct der Curve geht, liegt unendlich weit; die in den End-Puncten jedes Durchmessers an die Curve gelegten Tangenten sind parallel. Je zwei Durchmesser sind die beiden Diagonalen eines in die Curve beschriebenen Parallelogrammes. Wenn wir in die Curve irgend ein Viereck mit zwei parallelen Seiten beschreiben, so liegt einer der, durch dasselbe bestimmten, conjugirten Puncte unendlich weit; diejenige gerade Linie, welche durch die beiden übrigen dieser Puncte geht, ist mithin ein Durchmesser und zwar derjenige, welcher die beiden parallelen Seiten des Vierecks halbirt. Hiernach erhalten wir nachstehende Construction der Aufgabe, Tangenten an eine gegebene Linie zweiter Ordnung zu legen, die irgend einer gegebenen geraden Linie parallel sind. Man trage in die gegebene Curve irgend zwei beliebige, der gegebenen geraden Linie parallele, Chorden ein, und verbinde die End-Puncte derselben durch zwei Paar gerader Linien. Auf diese Weise erhalten wir zwei Durchschnitte, durch welche derjenige Durchmesser geht, welcher auf der Curve zwei Puncte bestimmt, in welchen dieselbe von den beiden gesuchten Tangenten berührt wird.

Fig. 22. 313. Die Polare eines Punctes ist den Coordinaten desjenigen Durchmessers, der durch jenen Punct geht, parallel. Für den Fall des Kreises, auf den wir uns hier beschränken wollen, steht also derjenige Durchmesser, der durch irgend einen Punct geht,

auf der Polaren dieses Punctes senkrecht, und, umgekehrt, diejenige gerade Linie, welche auf irgend einer gegebenen geraden Linie senkrecht steht, und durch den Pol derselben geht, geht auch durch den Mittelpunct des Kreises. Verbindet man also irgend drei, in Beziehung auf einen gegebenen Kreis, zugeordnete Puncte O, O' und P durch gerade Linien zu einem Dreieck, so gehen die von jedem der Puncte auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Perpendikel alle drei durch den Mittelpunct des gegebenen Kreises, durch C. Hierin liegt also wiederum ein indirecter Beweis des sich Kreuzens dieser Perpendikel in demselben Puncte, zugleich mit einer neuen geometrischen Beziehung dieses Punctes.

Wenn drei Puncte O, O' und P gegeben sind, so können wir einen Kreis beschreiben, für welche die drei gegebenen Puncte zugeordnete sind. Denn, wenn wir den Mittelpunct C des gesuchten Kreises nach dem Vorstehenden bestimmen, so sind die Fufs-Puncte der zum Behuf dieser Construction von O, O' und P aus, auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Perpendikel, nach der Figur also o, o' und p die zugeordneten Pole obiger drei Puncte. Wir brauchen also nur aus dem gefundenen Mittelpuncte einen Kreis zu beschreiben, der z. B. die Puncte P und p zu zugeordneten Polen hat. Dieser Kreis ist alsdann der verlangte. Es ist offenbar, dafs der Mittelpunct des Kreises nicht innerhalb des Dreiecks OO'P fallen kann, und mithin dieses Dreieck, wenn der verlangte Kreis möglich seyn soll, ein stumpfwinkliges seyn mufs.

Wir können die Construction der 22. Figur noch aus einem andern Gesichts-Puncte betrachten. Wenn wir nemlich von dem Mittelpuncte des Kreises und von zweien der drei zugeordneten Puncte, als von bekannten Puncten, ausgehen, so gibt uns gerade dieselbe Construction, die uns vorhin den Mittelpunct gab, nun den dritten zugeordneten Punct. Dieser Punct liegt z. B., wenn wir für die beiden ersten zugeordneten Puncte O und O' nehmen, in dem Kreuzungs-Puncte P der drei Perpendikel des Dreiecks OO'C.

Auf entsprechende Weise können wir, wenn irgend eine beliebige Linie zweiter Ordnung und zwei beliebige Puncte gegeben sind, den dritten zugeordneten Punct bestimmen.

314. Wenn fünf P u n c t e gegeben sind, so können wir nach der Theorie der Pole ungemein leicht beliebig viele Puncte derjenigen Linie zweiter Ordnung, welche durch jene fünf Puncte sich legen läfst, bestimmen. Seyen (wobei wir die Figur uns in Gedanken hinzuthun) A, B, C, D und E die fünf gegebenen Puncte. Zum Behuf der Construction eines sechsten Punctes der gesuchten Curve ziehe man AB und CD, die sich in P, AC und BD, die sich in P' und endlich AD und BC, die sich in P'' schneiden, Alsdann ist P'P'' die Polare von P für jede durch die vier Puncte A, B, C und D gehende Curve und mithin auch für die gesuchte. Zieht man nun PE, so können wir (nach 309) auf dieser geraden Linie einen sechsten Punct der Curve construiren. Man erhält denselben Punct auf der Stelle, wenn man AE zieht, die der Polaren P'P'' in N begegne, und endlich BN, von welcher PE in jenem gesuchten sechsten Puncte geschnitten wird. Auf ähnliche Weise erhalten wir so viele Puncte der Curve, als wir wollen.

315. Wenn irgend fünf g e r a d e L i n i e n gegeben sind, so können wir beliebig viele Tangenten derjenigen Curve zweiter Ordnung, welche die gegebenen Linien berührt, construiren, ohne dafs die Curve selbst gegeben ist. Es mögen sich zwei der gegebenen Tangenten in A, zwei andere in B schneiden, und die fünfte Tangente derjenigen geraden Linie, welche durch A und B geht, in C begegnen. Alsdann können wir sogleich die andere durch C gehende Tangente bestimmen. Die in A und B sich schneidenden

Tangenten-Paare bilden nemlich eine vollständige vierseitige Figur, ebenso die in A und C sich schneidenden beiden Tangenten-Paare. Eine gemeinschaftliche Diagonale beider Figuren ist AB, die anderen Diagonalen schneiden sich in demselben Punct (310). Dieser Punct ergibt sich unmittelbar, da die erste vierseitige Figur vollständig gegeben ist, und ebenso, nachdem dieser Punct bestimmt ist, die vierte, uns unbekannte, Seite der zweiten vierseitigen Figur, oder, mit anderen Worten, die gesuchte, durch C gehende Tangente. Auf ähnliche Weise können wir so viele Tangenten finden, als wir wollen.

Fig. 21. 316. Wenn vier gerade Linien und ein Punct gegeben sind, so können wir eine Linie zweiter Ordnung bestimmen, welche die gegebenen geraden Linien berührt und durch den gegebenen Punct geht. Die Theorie der Pole gibt uns hier sogleich noch drei Puncte, so dafs wir auf diese Weise die Aufgabe auf die Construction der 302. Nummer, wo vier Puncte und eine Tangente die gegebenen Bestimmungs-Stücke waren, zurückführen können. Wir wollen uns hier auf die 21. Figur beziehen, ohne die Constructionen alle auszuführen.

Sey U der gegebene Punct, und seyen QN'', QN', Q'N' und Q'N die vier gegebenen geraden Linien, die eine vollständige vierseitige Figur bilden, deren drei Diagonalen sich in O, O' und P schneiden. OP ist mithin für jede Curve, welche von den vier gegebenen geraden Linien berührt wird, die Polare von O'; ziehen wir also O'U, die von dieser Polaren in S geschnitten wird, so erhalten wir einen zweiten Punct der gesuchten Curve, indem wir auf der letztgezogenen geraden Linie zu O', S und U den vierten harmonischen Theilungs-Punct V bestimmen (309).

Am leichtesten verfahren wir hierbei auf folgende Weise. Man ziehe QU, die der OP in irgend einem Puncte begegnet, und verbinde diesen Punct mit Q' durch eine gerade Linie, von welcher alsdann O'U in dem verlangten Puncte V geschnitten wird. Diese Construction gründet sich darauf, dafs O'QOQ' harmonisch getheilt ist.

Oder: man ziehe NU, welche der OP in irgend einem Puncte begegnet, und verbinde diesen Punct mit N'' durch eine gerade Linie. Diese Linie schneidet O'U im gesuchten Puncte V. Diese Construction gründet sich auf die harmonische Theilung von O'NPN''.

Wenn zwei Puncte U und V einmal bekannt sind, so ergibt sich unmittelbar ein dritter und vierter Punct durch die Durchschnitte von OV und PU, und von OU und VP.

Wir haben also vier Puncte bestimmt; da es (302) zwei Curven gibt, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen, so sind jene Puncte diejenigen Puncte, in welchen diese Curven sich schneiden, während die vier gegebenen geraden Linien gemeinschaftliche Tangenten derselben sind.

317. Wenn man in irgend eine Curve zweiter Ordnung mehrere Vierecke beschreibt, denen zwei Winkel-Puncte gemeinschaftlich sind, so haben alle diese Vierecke diejenige gerade Linie, welche jene festen Winkel-Puncte verbindet, entweder zu einer ihrer Diagonalen, oder zu einer ihrer Seiten. Es bleibt also einer der drei, durch jedes jener Vierecke bestimmten, drei zugeordneten Puncte auf einer geraden Linie, also geht die Polare jenes Punctes, d. h. diejenige gerade Linie, welche die jedesmaligen beiden übrigen Puncte verbindet, durch einen festen und unveränderlichen Punct, nemlich durch den Pol derjenigen geraden Linie, auf welcher der erste der drei zugeordneten Puncte fortrückt. Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

In allen in eine beliebige Linie zweiter Ordnung beschriebenen Vierecke, welche irgend zwei Winkel-Puncte gemeinschaftlich haben, gehen diejenigen geraden Linien, welche die beiden Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten verbinden, wenn jene festen Winkel-Puncte gegenüberstehende sind, oder diejenigen geraden Linien, welche den Durchschnitt der beiden Diagonalen mit dem Durchschnitte der beiden durch die festen Winkel-Puncte gehenden gegenüberliegenden Seiten verbindet, wenn diese Puncte nicht gegenüberstehende sind: alle durch einen festen Punct *).

318. Nach dem Satze der vorigen Nummer können wir, wenn fünf Puncte gegeben sind, den Mittelpunct der durch diese fünf Puncte gehenden Linie zweiter Ordnung finden, und zugleich in diesen Puncten die Tangenten construiren. Seyen A, B, C, D und E die fünf gegebenen Puncte, wir können alsdann drei der Curve eingeschriebene Vierecke bestimmen, deren zwei Winkel-Puncte A und B sind, nemlich ABCD, ABDE und ABCE, und also drei gerade Linien finden, die durch denselben Punct, den Pol von AB gehen. Zwei dieser Linien sind zur Bestimmung dieses Poles hinreichend. Betrachten wir daher nur die beiden ersten Vierecke, und schneiden sich AD und BC in F, AC und BD in G, ferner AE und BD in F′, AD und BE in G′, so sind FG und F′G′ die beiden geraden Linien, welche sich in dem in Rede stehenden Pol, den wir α nennen wollen, schneiden. Aα und Bα sind alsdann Tangenten, und diejenige gerade Linie, die α mit der Mitte von AB verbindet, geht durch den Mittelpunct der Curve. Auf ähnliche Weise können wir die Pole von BC, CD, DE und EA, die wir durch β, γ, δ und ε bezeichnen wollen, finden. In jedem dieser Puncte vereinigen sich drei, leicht sich ergebende, gerade Linien. α, β, γ, δ und ε sind die Winkel-Puncte eines um die Curve beschriebenen Fünfecks, dessen Seiten die Curve in den Winkel-Puncten des eingeschriebenen Fünfecks ABCDE berühren. Wir erhalten ferner, indem wir die Mitten der Seiten des letztgenannten Fünfecks mit den Polen derselben verbinden, fünf gerade Linien, die sich alle in demselben Puncte, dem Mittelpuncte der Curve, den wir also durch irgend zwei dieser Linien bestimmen können, schneiden.

319. Wenn fünf Puncte A, B, C, D und E gegeben sind, so können wir noch einen sechsten Punct F hinzunehmen, und diesen mit einem der gegebenen, etwa mit A, zusammenfallen lassen. Alsdann schneiden sich (292) AB und DE, BC und EF (oder EA), CD und FA (oder die Tangente in A) in drei Puncten ein und derselben geraden Linie. Hiernach ergibt sich wiederum eine Construction der Tangente in A, und dem entsprechend der Tangenten in den übrigen vier Puncten.

320. *In jedem um irgend eine Linie zweiter Ordnung beschriebenen Sechseck schneiden sich die drei Diagonalen in ein und demselben Puncte.*

Dieser Satz folgt nach der Theorie der Pole unmittelbar aus dem Satze der 292. Nummer vom eingeschriebenen Sechseck. Seyen α, β, γ, δ, ε und $\varkappa$ die sechs Winkel-Puncte der umschriebenen Figur, alsdann sind diese sechs Puncte die Pole der Seiten eines eingeschriebenen Sechsecks, die wir der Ordnung nach durch AB, BC, CD, DE, EK und KA bezeichnen. Wenn wir nun in der umschriebenen Figur $\alpha\delta$ ziehen, so geht

*) Dieser Satz ist für den Fall des Kreises und nicht in seiner ganzen Ausdehnung von H. Hachette bemerkt worden nach: Puissant, Recenil etc. Nro. 66.

diese Linie durch die Pole von AB und DE, und ist also die Polare des Durchschnitts dieser beiden Seiten der eingeschriebenen Figur; ebenso ist $\beta\varepsilon$ die Polare des Durchschnitts von BC und EK, und endlich $\gamma\varkappa$ die Polare des Durchschnitts von CD und KA. Da diese drei Durchschnitte in gerader Linie liegen, so gehen die Polaren derselben durch ein und denselben Punct, den Pol jener geraden Linie. Hiermit ist der obige Satz bewiesen, und zwar in derselben Ausdehnung als der Satz der 292. Nummer.

Der eben bewiesene Satz ist ein besonderer Fall von folgendem:

Wenn zwei Sechsecke dadurch bestimmt sind, daſs die Winkel-Puncte des einen, rücksichtlich irgend einer beliebigen Linie zweiter Ordnung, die Pole der Seiten des andern sind, und wenn überdieſs in dem einen Sechseck die Durchschnitte der drei Paare gegenüberliegender Seiten in gerader Linie liegen: so schneiden sich die drei Diagonalen des andern Sechsecks in ein und demselben Puncte.

Der Beweis ist dem obigen ganz gleich *).

321. Aus dem Satze vom umschriebenen Sechsecke, den wir in der vorigen Nummer bewiesen haben, ergibt sich, indem wir die Richtung von zwei an einander stoſsenden Seiten so nehmen, daſs dieselben nur eine einzige gerade Linie bilden, und mithin der Berührungs-Punct dieser geraden Linie mit der Curve an die Stelle eines Winkel-Punctes des Sechsecks tritt, folgender Satz:

Wenn man in einem umschriebenen Fünfecke zwei Paare gegenüberstehender Winkel-Puncte durch zwei Diagonalen verbindet, so geht diejenige gerade Linie, welche man durch den fünften Winkel-Punct und den Berührungs-Punct der gegenüberliegenden Seite legen kann, durch den Durchschnitt jener beiden Diagonalen.

Auf ähnliche Weise ergeben sich nachstehende Sätze:

Wenn man in einem umschriebenen Vierecke die beiden Diagonalen zieht, so geht durch den Durchschnitt derselben jede derjenigen beiden geraden Linien, welche zwei gegenüberliegende Berührungen verbindet. Verbindet man zwei nicht gegenüberliegende Berührungen durch eine gerade Linie, so geht dieselbe durch den Durchschnitt zweier gegenüberliegenden Seiten des umschriebenen Vierecks (310).

Wenn man in einem umschriebenen Dreiecke die drei Winkel-Puncte mit den gegenüberliegenden Berührungs-Puncten durch gerade Linien verbindet, so schneiden sich diese drei geraden Linien in ein und demselben Puncte.

322. Nach dem an die Spitze der 320. Nummer gestellten Satze können wir, wenn fünf Tangenten einer Curve zweiter Ordnung gegeben sind, auch ohne die Curve selbst zu kennen, so viele neue Tangenten derselben construiren, als wir wollen. Das von den gegebenen Tangenten gebildete Fünfeck sey ABCDG. Zieht man nun z. B. AD, und nimmt auf dieser Linie irgend einen Punct P beliebig an, und zieht BP und CP, so wird DG von BP in irgend einem Puncte E, GA von CP in irgend einem Puncte F geschnitten. Durch E und F geht alsdann eine sechste Tangente der Curve.

Nach dem ersten Satze der vorigen Nummer können wir, wenn fünf Tangenten gegeben sind, sogleich die Berührungs-Puncte auf denselben bestimmen. Man ziehe zu diesem Ende, wenn wiederum ABCDG das von den gegebenen Tangenten gebildete Fünfeck ist, die Diagonalen AC und BG, die sich in irgend einem Puncte, den wir Q nennen

*) Gerg. Ann. IV. 379.

wollen, schneiden. Alsdann schneidet die durch D und Q gehende gerade Linie die Seite AB im gesuchten Berührungs-Puncte. Auf ähnliche Weise ergeben sich die übrigen vier Berührungs-Puncte.

323. An die Theorie der Pole schliefst sich auch dasjenige Verfahren an, welches Robert Simson zur Bestimmung der Berührungs-Puncte, wenn fünf Tangenten gegeben sind, angewendet hat. Es sey nemlich ABCDE das von den Tangenten gebildete Fünfeck. Man verlängere AB und DE bis zu ihrem gegenseitigen Durchschnitte F; verlängere ferner CB und CD, bis sie der verlängerten AE in G und H begegnen. Alsdann bilden die beiden in F und G sich vereinigenden Tangenten-Paare eine vollständige vierseitige Figur, und ebenso auch die beiden in F und H sich vereinigenden Tangenten-Paare. FG und FH sind Diagonalen dieser beiden Figuren; die Pole derselben können wir also leicht durch den Durchschnitt der jedesmaligen beiden übrigen Diagonalen bestimmen. Diejenige gerade Linie, welche durch die auf diese Weise bestimmten Pole der beiden Diagonalen FG und FH geht, ist die Polare ihres Durchschnittes, des Punctes F, durch welchen auch die beiden gegebenen Tangenten AB und DE gehen, und diese Polare bestimmt folglich auf diesen beiden Tangenten die Berührungs-Puncte *).

324. Die vorstehenden Erörterungen, denen wir eine noch weit gröfsere Ausdehnung hätten geben können, schliefsen sich an die analytische Entwicklung der 306. Nummer an. Wir haben überall denjenigen Fall bisher nur vor Augen gehabt, wo eine Linie zweiter Ordnung von einem Systeme zweier geraden Linien wirklich geschnitten wird, und wir also zu zwei neuen resultirenden Linien-Systemen kommen. Aber wir dürfen auch den andern Fall nicht aufser Acht lassen, wo die Linien des gegebenen Systems beide der Curve nicht begegnen. Alsdann erhalten wir statt der beiden resultirenden Linien-Systeme zwei Puncte, und diese Puncte liegen nach der eben angezogenen Nummer auf der Polaren des Durchschnittes der beiden Linien des ursprünglichen Systems, gerade so, wie in dem bisher betrachteten Falle, auf dieser Polaren die Durchschnitte der beiden geraden Linien der resultirenden Systeme lagen. Ebenso liegt der Durchschnitt des ursprünglichen Systems auf der Polaren jedes der resultirenden Puncte. Hiervon überzeugen wir uns leicht. Wir wollen, der Kürze wegen, durch die erste und zweite der nachstehenden Gleichungen:

$$A = o, \quad B = o,$$

die Gleichungen des ursprünglichen Linien-Systems und der Curve bezeichnen. Alsdann stellen, bei gehöriger Bestimmung von μ' und μ'', die Gleichungen:

$$A+\mu'B = o, \quad A+\mu''B = o,$$

die beiden resultirenden Puncte dar. Hierbei dürfen wir nicht übersehen, dafs diese Gleichungen eine bestimmte Form haben, die von der Gleichung der Curve und des ursprünglichen Linien-Systems abhängt, und dafs sie mithin einen Punct darstellen, auf den sich eine Ellipse von bestimmtem Axen-Verhältnifs reducirt hat. Aus der Verbindung einer der letzten beiden Gleichungen mit der Gleichung der Curve erhalten wir wiederum die andere dieser Gleichungen und die Gleichung des Linien-Systems. Nehmen wir hier nun denjenigen Punct, dessen Gleichung wir mit der Gleichung der Curve ver-

*) Hamilton, Lehre von den Kegelschnitten. 5. Buch, letzter Satz.

binden, zum Anfangs-Puncte der Coordinaten, so können wir ihn durch eine Gleichung von der Form der Gleichung (2) der 306. Nummer:

$$y^2+(\varkappa+\varkappa')xy+\varkappa\varkappa'x^2 = 0,$$

darstellen, und erhalten wie dort, bei derselben Bezeichnung:

$$\gamma y''+\delta x''+\varepsilon = 0,$$

wo (y'', x'') einmal den resultirenden Punct, das andere Mal den Durchschnitt des resultirenden Linien-Systems bezeichnet.

Wenn wir die Gleichung eines Punctes, unter was für einer Form diese Gleichung (des zweiten Grades) auch erscheinen mag, mit der Gleichung irgend einer Linie zweiter Ordnung verbinden, so können wir niemals zu den Gleichungen von noch zwei neuen Puncten kommen; wir erhalten immer die Gleichung eines Systems zweier geraden Linien. Es ist nicht nöthig, hier in Entwicklungen einzugehen, die denen der 287. Nummer ähnlich sind; wir können uns von der Richtigkeit des eben Ausgesprochenen leicht *a priori* auf folgende Weise überzeugen. Wenn wir nemlich zwischen der Gleichung des Punctes und der Gleichung der Curve nach einander x und y eliminiren, so kommen wir zu zweien Gleichungen vom vierten Grade in y und x, also zu Gleichungen von folgender Form:

$$\begin{aligned} x^4+Py^3+Qy^2+Ry+S &= 0, \\ x^4+Tx^3+bx^2+Vx+W &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Wenn es nun ein System zweier geraden Linien gibt, dessen Gleichung eine algebraische Folge aus den Gleichungen des Punctes und der Curve ist, so müssen wir zu denselben Gleichungen, als eben, kommen, wenn wir zwischen der Gleichung des Systems und der Curve (oder des Punctes) x und y eliminiren. Hiernach können wir die Realität eines solchen Linien-Systems nachweisen und zugleich die Gleichung desselben bestimmen. Vorausgesetzt, dafs der Punct nicht auf der Curve selbst liegt, mufs offenber jede der beiden Gleichungen (1) vier imaginäre Wurzeln haben. Diese Wurzeln ordnen sich aber, wie bekannt, paarweise zusammen, und jedem Paare entspricht ein reeller Factor des zweiten Grades, so dafs obige beiden Gleichungen (für den Fall imaginärer Wurzeln nur auf eine einzige Weise) sich in zwei reelle Factoren des zweiten Grades zerlegen lassen. Dem entsprechend können wir also den beiden Gleichungen (1) folgende Form geben:

$$\begin{aligned} (y^2+py+q)(y^2+ry+s) &= 0, \\ (x^2+tx+u)(x^2+vx+w) &= 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Die vier Wurzeln der ersten Gleichung entsprechen den vier Wurzeln der zweiten in einer bestimmten Ordnung, so nemlich, dafs, wenn wir zwei solcher sich entsprechenden Wurzeln durch y' und x' bezeichnen, die Gleichungen der Curve und des Punctes beide befriedigt werden, wenn wir in denselben jene (imaginären) Werthe für y und x substituiren. Der Punct (y', x') spielt die Rolle eines imaginären Durchschnittes von jenem gegebenen Puncte und der Curve. Offenbar ordnen sich ferner die Wurzeln beider Gleichungen so zusammen, dafs den beiden Wurzeln, auf welche sich derselbe quadratische Factor der einen Gleichung bezieht, zwei solche Wurzeln der andern Gleichung entsprechen, die ebenfalls in demselben Factor enthalten sind. Dem entsprechend mögen die beiden ersten Factoren der Gleichungen (2) sich auf entsprechende Wurzeln beziehen, und ebenso die zweiten Factoren. Bei dieser Voraussetzung bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichungen:

$$y^2+py+q = 0, \qquad x^2+tx+u = 0, \qquad (3)$$

durch y' und y'', und durch x' und x'', und erhalten alsdann Ausdrücke von folgenden Formen:

$$y' = m + n\sqrt{-1}, \qquad y'' = m - n\sqrt{-1};$$
$$x' = g + h\sqrt{-1}, \qquad x'' = g - h\sqrt{-1}.$$

Wir können nun ferner eine lineare Gleichung:

$$y + \varkappa x + \sigma = 0,$$

finden, in welcher die beiden Werthe von $\varkappa$ und σ so bestimmt sind, dafs die Elimination von x und y zwischen dieser Gleichung (4) und der Gleichung der Curve (oder des Punctes) ebenfalls zu den Gleichungen (3) führt. Wir kommen am leichtesten zu jener Gleichung, indem wir nach der bekannten Weise die Gleichung derjenigen geraden Linie bilden, welche durch die beiden (imaginären) Puncte (y'', x'') und (y', x') geht. Substituiren wir nemlich in folgender Gleichung:

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x'),$$

für y'', y', x'' und x' ihre Werthe, so erhalten wir eine Gleichung, aus der alle imaginären Gröfsen verschwunden sind:

$$y - m = \frac{n}{h}(x - g),$$

und wir haben also:

$$\varkappa = -\frac{n}{h}, \qquad \sigma = \frac{ng - mh}{h}.$$

Ganz auf dieselbe Weise können wir eine zweite lineare Gleichung:

$$y + \varkappa' x + \sigma' = 0,$$

bestimmen, welche so beschaffen ist, dafs die Elimination von x und y zwischen dieser Gleichung und der Gleichung der Curve (oder des Punctes) zu folgenden Gleichungen führt:

$$y^2 + ry + s = 0,$$
$$x^2 + vx + w = 0.$$

Und endlich ist klar, dafs alsdann die Elimination jeder der beiden veränderlichen Gröfsen zwischen der Gleichung:

$$(y + \varkappa x + \sigma)(y + \varkappa' x + \sigma') = 0, \qquad (4)$$

und der Gleichung der Curve (oder des Punctes) zu derselben Gleichung führt, als die Elimination derselben veränderlichen Gröfse zwischen den Gleichungen der Curve und des Punctes, und also die vorstehende Gleichung (4) des Systems zweier reellen geraden Linien eine algebraische Folge aus den Gleichungen der Curve und des Punctes ist.

325. Wenn wir irgend vier der Gleichungen (5) — (9) der 285. Nummer zusammenstellen, so können wir zwischen denselben μ, $\xi + \xi'$ und $\xi\xi'$ eliminiren, und kommen alsdann zu einer Gleichung zwischen y'' und x'', also zu der Gleichung eines geometrischen Ortes, auf welchem sich die Durchschnitte der beiden geraden Linien der resultirenden Systeme, oder die resultirenden Puncte selbst, befinden. Zugleich ist, da wir nur zwischen vier jener fünf Gleichungen eliminirt haben, die Gleichung jenes geometrischen Ortes unabhängig von einer Constanten der Linie zweiter Ordnung. Wir gehen hier in diese Entwicklungen, die sich durch eine schickliche Annahme der Coordinaten-Axen sehr vereinfachen, nicht ein, und wollen nur einen einzigen solchen Ort auf eine etwas abweichende Weise bestimmen.

Da wir in der vorigen Nummer gesehen haben, dafs wir durch die Verbindung der Gleichung eines Punctes, unter irgend einer quadratischen Form, mit der Gleichung einer

Curve zweiter Ordnung immer zu der Gleichung eines reellen Linien-Systems gelangen können, so wollen wir die beiden geraden Linien dieses Systems gleich als Coordinaten-Axen nehmen. Ist bei dieser Annahme:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

die Gleichung der Curve, so sind die Gleichungen der resultirenden Linien-Systeme oder Puncte in folgender Gleichung enthalten:

$$y^2+2\alpha' xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

in der wir α' als einen unbestimmten Coefficienten betrachten. Diese Gleichung stellt alsdann alle möglichen Linien zweiter Ordnung dar, welche jede der beiden Coordinaten-Axen in denselben beiden (reellen oder imaginären) Puncten schneiden (264). Der Mittelpunct jeder besondern dieser Curven, und also auch — wenn überhaupt die letzte Gleichung bei einer schicklichen Annahme von α' ein System zweier geraden Linien oder einen Punct darstellen kann — der Durchschnitt der beiden geraden Linien des Systems oder der Punct selbst, liegt zugleich auf den durch folgende Gleichungen dargestellten beiden Durchmessern:

$$y+\alpha' x+\gamma = 0,$$

$$\alpha' y+\beta x+\delta = 0.$$

Wenn wir α' zwischen diesen beiden Gleichungen eliminiren, so kommt:

$$y^2-\beta x^2+\gamma y-\delta x = 0. \qquad (1)$$

Der durch die letzte Gleichung dargestellte geometrische Ort ist eine neue Linie zweiter Ordnung, die durch den Anfangs-Punct der Coordinaten geht und somit alle drei zugeordneten Pole enthält. Wir können demnach, in dem Falle, daſs ein gegebenes Linien-System der Curve nicht begegnet, und wir also zu zwei resultirenden Puncten kommen, diese Puncte durch den Durchschnitt der eben bestimmten Curve und der Polaren desjenigen Punctes, in welchem die beiden geraden Linien des gegebenen Systems sich kreuzen, bestimmen. Diese Durchschnitte sind für den eben bezeichneten Fall nothwendig reell, ebenso wie für den Fall, daſs beide Linien des gegebenen Systems der gegebenen Curve begegnen. Wenn eine dieser geraden Linien die gegebene Curve berührt, so wird in demselben Puncte die eben bestimmte Curve (1) von der Polaren des Durchschnittes derselben berührt. Wenn eine dieser geraden Linien die gegebene Curve schneidet, die andere aber ihr nicht begegnet, so wird die Curve (1) von der Polaren nicht geschnitten, die Durchschnitte sind imaginär.

326. Wir wollen diesen Paragraphen beschlieſsen, indem wir in einige Details über die Entwicklungen der letzten Nummer eingehen. Wir haben in dieser Nummer folgenden Satz bewiesen:

Der geometrische Ort für die Mittelpuncte aller Linien zweiter Ordnung, welche durch dieselben vier Puncte gehen, ist eine Linie derselben Ordnung.

Zwei der vier Durchschnitts-Puncte können hierbei imaginär seyn, und diese sind alsdann bestimmt, indem eine jener Curven und eine derselben nicht begegnende gerade Linie gegeben ist; es können auch zwei Paar Durchschnitte imaginär seyn, und diese sind wiederum bestimmt, wenn eine der Curven und zwei derselben nicht begegnende gerade Linien gegeben sind.

Da in der Gleichung der in Rede stehenden Curve:

$$y^2-\beta x^2+\gamma y-\delta x = 0, \qquad (1)$$

das zweite Glied fehlt, so sind zwei zugeordnete Durchmesser derselben den Coordinaten-Axen parallel. Wenn die Durchschnitte der in der vorigen Nummer durch:

$$y^2+2\alpha' xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0, \qquad (2)$$

dargestellten Curven alle vier reell sind, so erhalten wir mithin die Richtung von drei Paaren zugeordneter Durchmesser der Curve (1), indem wir nach einander jedes der beiden Paare gegenüberliegender Seiten und die beiden Diagonalen des, durch jene vier Durchschnitts-Puncte bestimmten, Vierecks zu Coordinaten-Axen nehmen.

Die Gleichung (1) wird befriedigt, wenn wir zugleich:

$$y = -\gamma \quad \text{und} \quad x = 0,$$
$$y = 0 \quad \text{„} \quad x = -\frac{\delta}{\beta};$$

setzen, woraus wir denn ersehen, dafs die bezügliche Curve durch die Mitten der, in die erste und zweite Axe fallenden gemeinschaftlichen Chorden aller Curven (2) geht, also, indem wir wiederum die Coordinaten-Axen auf dreifache Weise bestimmen, durch die Mitten derjenigen sechs geraden Linien, welche die vier Durchschnitts-Puncte, paarweise genommen, verbinden. Dieselbe Curve geht durch den dreifachen Anfangs-Punct der Coordinaten. Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

Wenn man vier gegebene Puncte, paarweise genommen, durch sechs gerade Linien verbindet, so liegen die Durchschnitte jedes Paares dieser Linien und die sechs Mitten derselben auf ein und derselben Linie zweiter Ordnung, in welcher überdiefs drei Paare zugeordneter Durchmesser jenen drei Linien-Paaren parallel sind. Diese Linie zweiter Ordnung ist der Ort der Mittelpuncte aller möglichen Linien derselben Ordnung, welche durch die vier gegebenen Puncte gehen.

Wir können unmittelbar noch drei andere Puncte derselben Curve bestimmen, denn die Gleichung derselben wird auch dann befriedigt, indem wir zugleich:

$$y = -\gamma, \quad x = -\frac{\delta}{\beta},$$

nehmen. Wir haben also im Ganzen zwölf Puncte der Curve bestimmt; diese Puncte liegen, wie wir gleich sehen werden, auf sechs Durchmessern.

327. Wir können der Gleichung (1) folgende Form geben:

$$\left(y+\frac{\gamma}{2}\right)^2-\beta\left(x+\frac{\delta}{2\beta}\right)^2 = \frac{\beta\gamma^2-\delta^2}{4\beta}, \qquad (3)$$

woraus wir erkennen, dafs

$$y = -\frac{\gamma}{2}, \quad x = -\frac{\delta}{2\beta},$$

die Coordinaten des Mittelpunctes der bezüglichen Curve sind. Es ist leicht, diese Coordinaten geradezu zu construiren. Wir sehen aber auch, dafs der Mittelpunct auf den beiden, durch die Puncte (0, 0) und $\left(-\gamma, -\frac{\delta}{\beta}\right)$, $(-\gamma, 0)$ und $\left(0, -\frac{\delta}{\beta}\right)$ gehenden, geraden Linien liegt. Die zweite der eben bezeichneten geraden Linien ist diejenige, welche die Mitten zweier durch die vier Durchschnitts-Puncte gelegten geraden Linien verbindet. Mit Berücksichtigung der dreifachen Verbindung der vier Durchschnitte durch zwei gerade Linien, wonach ein dreifaches Coordinaten-System sich ergibt, haben wir also folgenden Satz bewiesen:

Wenn man in einem Viereck die Mitten der gegenüberstehenden Seiten und der beiden Diagonalen durch drei gerade Linien verbindet, so schneiden sich diese Linien in demselben Puncte. Dieser Punct ist der Mittelpunct derjenigen Curve, welche die

Mittelpuncte aller durch die vier Winkel-Puncte des Vierecks gehenden Linien zweiter Ordnung enthält.

328. Die Gleichung (3) stellt ein System zweier geraden Linien dar, wenn

$$\beta\gamma^2 = \delta^2,$$

und aus der geometrischen Bedeutung von β, γ und δ ist leicht einzusehen, dafs diese Bedingungs-Gleichung dann Statt findet, wenn die vier Durchschnitts-Puncte ein Viereck mit zwei parallelen Seiten bilden. Ein besonderer Fall ist derjenige, wo die vier Durchschnitts-Puncte sich in zwei Berührungs-Puncten vereinigen; alsdann ist, indem wir die beiden gemeinschaftlichen Tangenten zu Coordinaten-Axen nehmen:

$$\beta\gamma^2 = \delta^2 = \beta\varepsilon.$$

Die Art der durch (1) oder (3) dargestellten Curve hängt einzig vom Coefficienten β ab. Ist $\beta = 0$, so stellt die Gleichung (2) nur solche Curven dar, deren eine Asymptote der ersten Coordinaten-Axe parallel ist. Die Gleichung (1) bezeichnet in diesem Falle eine Parabel. Der geometrische Ort für die Mittelpuncte aller Hyperbeln, welche durch drei gegebene Puncte gehen, und deren eine Asymptote einer gegebenen geraden Linie parallel ist, ist also eine Parabel.

Fig. 18. 329. Wir wollen in dieser Nummer denjenigen Fall noch besonders hervorheben, wo $\beta = -1$, und also, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, alle sich schneidenden Curven gleichseitige Hyperbeln sind und (1) einen Kreis darstellt. Wir haben früher (295.) gezeigt, dafs alle gleichseitige Hyperbeln, welche durch dieselben drei Puncte M, M′ und M″ gehen, sich noch in ein und demselben vierten Puncte M‴ schneiden, und dafs durch diese vier Puncte sich dreimal zwei auf einander senkrechte gerade Linien legen lassen. Also:

Die Mittelpuncte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche durch dieselben drei Puncte gehen, liegen auf dem Umfange eines Kreises.

Dieser Kreis geht durch die Fufs-Puncte der von den Winkel-Puncten des Dreiecks MM′M″ auf die gegenüberstehenden Seiten gefällten Perpendikel. Diese Fufs-Puncte Q, Q′ und Q″ sind drei zugeordnete Puncte für jede der, durch M, M′ und M″ gehenden, gleichseitigen Hyperbeln, so dafs also die drei Seiten des Dreiecks QQ′Q″ die Polaren der drei gegenüberstehenden Winkel-Puncte sind. Derselbe Kreis geht durch die Mitten der sechs Chorden MM′, MM″, MM‴, M′M″, M′M‴ und M″M‴, nemlich durch die Puncte R, S, T, U, V und W. In dem Mittelpuncte des Kreises schneiden sich RW, SV und TU.

Wir können hiernach, wenn vier Puncte gegeben sind, den Mittelpunct derjenigen gleichseitigen Hyperbel finden, welche durch die vier gegebenen Puncte geht. Indem wir nemlich je drei dieser Puncte durch gerade Linien verbinden, erhalten wir vier Dreiecke; durch die Mitten der drei Seiten jedes dieser Dreiecke, oder (was hiemit auf Eins hinauskommt) durch die Fufs-Puncte der drei von den Winkel-Puncten auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten drei Perpendikel, können wir einen Kreis legen. Die vier auf diese Weise bestimmten Kreise schneiden sich in demselben Puncte, dem gesuchten Mittelpuncte.

Wenn sich durch die vier gegebenen Puncte ein System zweier auf einander senkrechten geraden Linien legen läfst, so ist die Aufgabe unbestimmt, sonst läfst sie immer nur eine einzige Auflösung zu. Es können sich zwei gleichseitige Hyperbeln nur in sol-

chen vier Puncten schneiden, durch welche sich zwei, auf einander senkrechte, gerade Linien legen lassen.

Wenn vier gerade Linien gegeben sind, so sind in der von denselben gebildeten vollständigen vierseitigen Figur die Durchschnitts-Puncte der drei Diagonalen drei zugeordnete Puncte für alle diejenigen Curven zweiter Ordnung, welche die vier gegebenen geraden Linien berühren. Wenn unter diesen Curven sich eine gleichseitige Hyperbel befindet, so liegt ihr Mittelpunct auf dem durch die drei zugeordneten Puncte gehenden Kreise, und befindet sich also nach dem Satze der 278. Nummer in einem Durchschnitte dieses Kreises und derjenigen geraden Linie, welche durch die Mitten der Diagonalen der von den Tangenten gebildeten vollständigen vierseitigen Figur geht.

Die Resultate dieser Nummer sind bekannt *).

§. 7.

Winkel-Beziehungen. Brennpuncte.

330. Wir wollen in diesem Paragraphen zuvörderst eine **Ellipse** betrachten, und dieselbe auf ihre beiden Axen beziehen; dem entsprechend gehen wir von folgender Gleichung aus: Fig. 23.

$$A^2y^2+B^2x^2 = A^2B^2. \qquad (1)$$

Bezeichnen wir ferner irgend einen beliebigen Punct durch (y′, x′), so wird das System der beiden durch diesen Punct gehenden Tangenten nach der 277. Nummer durch folgende Gleichung dargestellt:

$$A^2(y-y')^2-(xy'-x'y)^2+B^2(x-x')^2 = 0,$$

die, entwickelt, folgende Form annimmt:

$$(A^2-x'^2)y^2+2x'y'xy+(B^2-y'^2)x^2-2A^2y'y-2B^2x'x+A^2y'^2+B^2x'^2 = 0. \qquad (2)$$

Wir können endlich in der allgemeinen Gleichung eines Systems zweier geraden Linien:

$$y^2+(\varkappa+\varkappa')xy+\varkappa\varkappa'x^2+ \text{ etc.} = 0$$

$(\varkappa+\varkappa')$ und $\varkappa\varkappa'$ so bestimmen, daſs diese Gleichung sich mit der Gleichung (2) zu der Gleichung eines Kreises (der für den Fall, daſs die geraden Linien des Systems durch den Durchschnitt der Tangenten gehen, sich auf einen Punct reducirt) verbinden läſst. Alsdann bilden die beiden, durch die so bestimmte Gleichung bezeichneten, geraden Linien, paarweise mit den beiden Tangenten zusammengestellt, gleiche Winkel mit diesen (294). Folgende Gleichung, die ein System zweier durch den Punct (y′, x′) gehenden, geraden Linien ausdrückt:

$$n(y-y')^2+2x'y'(x-x')(y-y')+m(x-x')^2 = 0,$$

erfüllt die eben gemachte Bedingung, wenn wir n und m so bestimmen, daſs die Gleichung:

$$A^2-x'^2-n = B^2-y'^2-m$$

befriedigt wird, was auf unendlichfache Art geschehen kann. Unter den auf diese Weise bestimmten Systemen zweier geraden Linien, die durch den Punct (y′, x′), den Durchschnitt der Tangenten, gehen, gibt es ein solches, welches der ersten Axe in zweien

*) Determination d'une hyperbole équilatère par **Brianchon** et **Poncelet**. Gerg. Ann. XI. 205 — 220:

Puncten begegnet, deren Abscissen unabhängig sind von y′ und x′. Die Gleichung dieses Linien-Systems, (welche wir leicht auf directe Weise bestimmen können,) ist, indem wir $A^2-B^2 = E^2$ setzen, folgende:

$$(E^2-x'^2)y^2+2x'y'(x-x')(y-y')-y'^2(x-x')^2 = 0;$$

denn ziehen wir diese Gleichung von (2) ab, so erhalten wir die Gleichung eines Kreises (dessen Radius gleich Null ist), und wenn wir in derselben $y = 0$ setzen, so kommt:

$$x = \pm E.$$

Wenn wir statt einer Ellipse eine Hyperbel betrachten, und also statt der Gleichung (1) folgende genommen hätten:

$$A^2y^2-B^2x^2 = -A^2B^2,$$

so wären die vorstehenden Entwicklungen ganz dieselben geblieben, nur hätten wir überall $(-B^2)$ mit B^2 vertauschen, und also auch E^2 gleich (A^2+B^2) setzen müssen.

Wir haben also bewiesen, dafs es in jeder Ellipse und Hyperbel zwei Puncte gibt, welche die Eigenschaft besitzen, dafs wenn man von irgend einem beliebigen Puncte Tangenten an die Curve und nach den beiden festen Puncten gerade Linien zieht, die eine dieser geraden Linien, die eine Tangente unter denselben Winkeln schneidet, als die andere gerade Linie die andere Tangente. In der 23. Figur, die sich auf den Fall der Ellipse bezieht, ist:

$$TPF = T'PF', \qquad TPF' = T'PF.$$

Die beiden in Rede stehenden Puncte heifsen Brennpuncte. Für den Fall der Ellipse liegen dieselben auf der gröfsern Axe, zu beiden Seiten des Mittelpunctes in einer Entfernung, die gleich ist $\sqrt{A^2-B^2}$. Wir erhalten hiernach die beiden Brennpuncte der Ellipse, indem wir aus einem der End-Puncte der kleinern Axe, mit der halben gröfsern Axe, als Radius, einen Kreis beschreiben; dieser Kreis schneidet die gröfsere Axe in den beiden Brennpuncten F und F′. Diese Puncte liegen zwischen zweien beliebigen Tangenten. Für den Fall der Hyperbel befinden sich die beiden Brennpuncte auf derjenigen Axe, welche der Curve begegnet, zu beiden Seiten des Mittelpunctes in einer Entfernung $\sqrt{A^2+B^2}$, die der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks gleich ist, dessen beide Katheden die halben beiden Axen sind. Die so bestimmten Puncte liegen immer in zwei von irgend zweien Tangenten gebildeten Scheitel-Winkeln.

Auf der kleinern Axe der Ellipse, so wie auf derjenigen Axe der Hyperbel, welche der Curve nicht begegnet, liegen keine Brennpuncte, da die entsprechenden Werthe von E imaginär werden.

Man kann, wie es in jeder elementaren Behandlung der Linien zweiter Ordnung geschieht, ohne alle Mühe zeigen, dafs, für den Fall der Ellipse, die Summe, für den Fall der Hyperbel der Unterschied der Abstände jedes Punctes der Curve von jenen beiden, auf die eben angezeigte Art bestimmten, Puncten, Brennpuncte genannt, constant, und zwar der ersten Axe der Curven gleich ist.

331. Der in der vorigen Nummer analytisch bewiesene Satz gilt für jede beliebige Lage des Punctes P oder (y′, x′), nur mufs dieser Punct aufserhalb der Ellipse oder Hyperbel liegen, denn nur in diesem Falle lassen sich von einem solchen Puncte Tangenten ziehen, und nur in diesem Falle stellt die Gleichung (2) zwei reelle gerade Linien und nicht einen isolirten Punct dar. Wenn der Punct (y′, x′) auf der Curve selbst liegt, so stellt die letztgenannte Gleichung (2) zwei in eine einzige Tangente zusammenfallende gerade Linien dar, so dafs als ganz specieller Fall des oben Bewiesenen dargethan ist,

dafs die Tangente in irgend einem Puncte der Ellipse oder Hyperbel mit den, von demselben Puncte nach den beiden Brennpuncten gezogenen, geraden Linien gleiche Winkel bildet; und zwar so, dafs in dem Falle der Hyperbel der von den eben bezeichneten geraden Linien gebildete Winkel selbst, in dem Falle der Ellipse aber der Nebenwinkel desselben von der Tangente halbirt wird. Hieraus folgt denn, nach dem Grundgesetze aller Spiegelung, dafs, bei der Ellipse, ein Lichtstrahl, der, von einem Brennpuncte ausgehend, auf einen Punct der Ellipse fällt, nach dem andern Brennpuncte zurückgeworfen wird; bei der Hyperbel hingegen ein von einem Brennpuncte ausgehender, und auf irgend einen Punct eines der beiden Zweige der Hyperbel fallender Lichtstrahl, so zurückgeworfen wird, als käme er von dem andern Brennpuncte.

Die Art, wie wir in der vorigen Nummer die Brennpuncte eingeführt haben, ist also ihrer Benennung ganz entsprechend.

232. Wir wollen in dieser Nummer sehen, wie die Resultate der beiden vorigen Nummern sich für den Fall der Parabel modificiren. Die Gleichung der Parabel, die wir zum Grunde legen wollen, ist, bei der Annahme rechtwinkliger Coordinaten, folgende: Fig. 24.

$$y^2 = 2px. \qquad (1)$$

Die Gleichung zweier sich in irgend einem Puncte (y', x') schneidenden Tangenten, ist hiernach (277):

$$2(y-y')(y'x-x'y)-p(x-x')^2 = 0,$$

und, wenn wir entwickeln, geht diese Gleichung in folgende über:

$$x'y^2-y'xy+\tfrac{1}{2}px^2-x'y'y+(y'^2-px')x+\tfrac{1}{2}px'^2 = 0, \qquad (2)$$

Wir können hier wiederum unendlich viele Systeme zweier geraden Linien bestimmen, deren Gleichung sich mit vorstehender Gleichung des Tangenten-Systems zu der Gleichung eines Kreises verbinden läfst. Geben wir zu diesem Ende der Gleichung eines solchen Systems zweier geraden Linien, von denen wir zugleich voraussetzen, dafs sich dieselben im Puncte (y', x'), dem Durchschnitte der Tangenten schneiden, folgende Form:

$$n(y-y')^2-y'(x-x')(y-y')+m(x-x')^2 = 0, \qquad (3)$$

so brauchen wir blofs n und m auf solche Weise zu bestimmen, dafs folgende Gleichung befriedigt wird:

$$x'-n = \tfrac{1}{2}p-m.$$

Setzen wir $m = 0$, und also $n = x'-\tfrac{1}{2}p$, so erhalten wir statt (3) folgende Gleichung:

$$(y-y')((x'-\tfrac{1}{2}p)(y-y')-y'(x-x')) = 0.$$

Von den beiden einzelnen geraden Linien, welche diese Gleichung darstellt, ist eine parallel der Axe der Parabel, die andere, für sich allein durch folgende Gleichung dargestellt:

$$y-y' = \frac{y'}{x'-\tfrac{1}{2}p}(x-x'),$$

schneidet die Axe der Parabel in einem Puncte $(0, \tfrac{1}{2}p)$, der immer derselbe bleibt, wo wir auch den Durchschnitt der Tangenten (y', x') annehmen mögen. Es gibt also in der Parabel einen festen und constanten Punct, der die Eigenschaft besitzt, dafs, wenn man von irgend einem beliebigen Puncte aus zwei Tangenten an die Curve und eine gerade Linie nach jenem festen Puncte zieht, diese gerade Linie mit einer der beiden Tangenten dieselben Winkel bildet, als die andere Tangente mit einem beliebigen Durchmesser der Parabel. Dieser feste Punct heifst der Brennpunct der Parabel, und liegt auf der Axe derselben, in einer Entfernung

vom Scheitel, die gleich ist $\frac{1}{2}p$, d. h. dem vierten Theile des Parameters. In der 24. Figur ist F der Brennpunct, und nach dem eben bewiesenen Satze ist:

$$TPG = FPT', \qquad TPF = GPT'.$$

Wenn wir den Punct P oder (y', x') auf der Parabel selbst annehmen, so fallen die beiden durch (2) dargestellten Tangenten in eine einzige zusammen, und alsdann liegt in der vorstehenden analytischen Entwicklung unmittelbar, als besonderer Fall, der bekannte Satz, dafs, wenn man irgend eine beliebige Tangente an die Parabel legt und durch den Berührungs Punct eine gerade Linie parallel mit der Axe, eine andere nach dem Brennpuncte zieht, diese beiden geraden Linien mit der Tangente gleiche Winkel bilden. Hieraus ergibt sich denn wiederum, nach dem vorhin schon erwähnten Spiegelungs-Gesetze, dafs jeder Lichtstrahl, der in irgend einem Puncte der Parabel parallel mit der Axe auffällt, in den Brennpunct zurückgeworfen wird, und, umgekehrt, dafs alle von dem Brennpuncte ausgehenden Strahlen so von der Parabel reflectirt werden, dafs sie parallel unter sich und mit der Axe fortgehen.

333. Die in den letzten Nummern bewiesenen allgemeinen Sätze sind folgende:

Wenn man von irgend einem gegebenen Puncte Tangenten an eine gegebene Ellipse oder Hyperbel und zwei gerade Linien nach den beiden Brennpuncten zieht, so bildet eine dieser geraden Linien mit einer Tangente dieselben Winkel, als die andere gerade Linie mit der andern Tangente.

Wenn man von irgend einem Puncte Tangenten an eine gegebene Parabel legt und eine gerade Linie nach dem Brennpuncte zieht, so bildet eine Tangente mit der zuletztgezogenen geraden Linie dieselben Winkel, als die andere Tangente mit einem beliebigen Durchmesser der Parabel.

Aus diesen beiden Sätzen (von denen der letztere, indem wir annehmen, dafs der zweite Brennpunct der Parabel unendlich weit entfernt liegt, in dem erstern enthalten ist,) lassen sich durch leichte Combinationen eine Menge anderer herleiten, und aus diesem Grunde stellen wir dieselben, als Hauptsätze, an die Spitze der nächsten Nummern. Auf die glückliche Auswahl solcher Sätze beruhet die Leichtigkeit und Eleganz der Darstellung. Mir scheint es hierbei ein characteristischer Umstand zu seyn, dafs diejenigen Sätze, um welche sich eine Reihe von Sätzen, gleichsam als Corollarien, gruppirt, aus einer unmittelbaren Verbindung der analytischen Ausdrücke sich ergeben.

334. Wenn irgend eine Hyperbel gegeben ist, und wir statt einer der bisher betrachteten Tangenten eine Asymptote nehmen, so ergibt sich aus der vorigen Nummer sogleich folgender Satz:

Wenn man von irgend einem Puncte einer Asymptote einer gegebenen Hyperbel eine Tangente an die Curve legt, und zwei gerade Linien nach den beiden Brennpuncten zieht, so bildet eine dieser beiden geraden Linien mit der Tangente dieselben Winkel, als die andere gerade Linie mit der Asymptote.

335. Wenn irgend ein Punct einer Linie zweiter Ordnung und die beiden Brennpuncte derselben gegeben sind, so kann man, auf bekannte Weise, in dem gegebenen Puncte die Tangente construiren, indem man von diesem Puncte nach den beiden Brennpuncten gerade Linien zieht, und einmal den Winkel, den diese beiden geraden Linien mit einander bilden, das andere Mal den Nebenwinkel desselben, durch eine

gerade Linie halbirt. Es lassen sich hiernach durch den gegebenen Punct zwei verschiedene Linien zweiter Ordnung legen, welche zwei gegebene Puncte zu Brennpuncten haben, eine Hyperbel und eine Ellipse; die eine der eben bezeichneten Halbirungs-Linien berührt die Hyperbel, die andere die Ellipse.

Zugleich ergibt sich hier auf ganz elementare Weise folgender Satz, der nicht ohne Aufwand von Rechnung in den Annalen von Gergonne *) bewiesen worden ist:

Wenn eine Ellipse und Hyperbel dieselben Brennpuncte haben, so schneiden sich dieselben unter rechtem Winkel. Oder: *Alle Ellipsen oder Hyperbeln, welche dieselben Brennpuncte haben, werden von ein und derselben Hyperbel oder Ellipse, die ebenfalls dieselben Brennpuncte hat, unter rechten Winkeln geschnitten.*

Wenn die Richtung der Durchmesser einer Parabel, der Brennpunct und irgend ein Punct ihres Umfanges gegeben ist, so können wir, ähnlich wie bei der Ellipse und der Hyperbel, in dem gegebenen Puncte die Tangente construiren. Wir erhalten für dieselbe eine von zwei auf einander senkrechten geraden Linien, wodurch zwei unter rechten Winkeln sich schneidende Parabeln angezeigt werden, welche denselben Brennpunct und dieselbe Axe haben, und sich im gegebenen Puncte schneiden.

336. Wenn die beiden Brennpuncte und eine Tangente gegeben sind, so können wir, wie bekannt, leicht den Berührungs-Punct auf derselben bestimmen. Dieser Punct ist für den Fall der Ellipse, wo die beiden Brennpuncte auf derselben Seite der Tangente liegen, von allen Puncten dieser Linie derjenige, für welchen die Summe der Abstände von den beiden Brennpuncten ein *minimum* ist; für den Fall der Hyperbel, wo die beiden Brennpuncte zu beiden Seiten der Tangente liegen, derjenige, für welchen die Differenz jener Abstände ein *maximum* ist. Wir können ferner, nach der 333. Nummer, von jedem beliebig auf der gegebenen Tangente angenommenen Puncte unmittelbar eine zweite Tangente construiren. Seyen in der 23. Figur F und F′ die beiden Brennpuncte, TP irgend eine Tangente, und auf derselben P der beliebig angenommene Punct. Zieht man nun PF und PF′, und endlich PT′ so, dafs F′PT′ = FPT, so ist die zuletzt gezogene gerade Linie PT′ die verlangte Tangente. Durch die beiden Brennpuncte und eine Tangente ist eine einzige Linie zweiter Ordnung bestimmt.

Auf ähnliche Weise können wir, wenn der Brennpunct einer Parabel, die Richtung ihrer Durchmesser und irgend eine Tangente derselben gegeben ist, durch jeden Punct dieser Tangente eine neue Tangente legen. Sey in der 24. Figur F der Brennpunct, PG ein Durchmesser, TP die gegebene Tangente und P der beliebig auf derselben angenommene Punct. Bestimmt man nun eine gerade Linie PT′ so, dafs TPG = FPT′, so ist diese Linie die gesuchte Tangente. Der Winkel FPT′ bleibt immer derselbe, wo wir auch den Punct P auf der gegebenen Tangente annehmen mögen. Hiernach ergeben sich folgende beiden bekannten Sätze:

Wenn man den Scheitel eines Winkels von gegebener Gröfse auf einer gegebenen geraden Linie fortrücken läfst, während ein Schenkel desselben um irgend einen festen Punct sich dreht, so berührt der andere Schenkel in allen seinen Lagen ein und dieselbe Parabel. Der feste Punct ist der Brennpunct und die gegebene gerade Linie eine Tangente dieser Parabel.

*) Gerg. Ann. XIII. p. 316.

Wenn man von dem Brennpuncte einer Parabel aus nach allen möglichen Tangenten unter demselben Winkel gerade Linien zieht, so liegen alle Fuſs-Puncte dieser geraden Linien auf einer neuen geraden Linie, die selbst eine jener Tangenten ist *).

337. Wenn nur ein Brennpunct gegeben ist, so sind noch drei Puncte oder Tangenten nöthig, damit eine Linie zweiter Ordnung vollständig bestimmt sey. Wir wollen uns auf denjenigen Fall beschränken, daſs drei Tangenten gegeben sind, und, indem wir uns auf die 23. Figur beziehen, F für den gegebenen Brennpunct und PMN für das, von den drei gegebenen Tangenten gebildete, Dreieck nehmen. Die 333. Nummer führt uns hier auf der Stelle zur Bestimmung des andern Brennpunctes. Verbinden wir nemlich zwei Winkel-Puncte jenes Dreiecks, etwa P und M, durch zwei gerade Linien mit dem gegebenen Brennpuncte F, so liegt der andere Brennpunct in dem Durchschnitte derjenigen beiden geraden Linien PF′ und MF′, die wir sogleich erhalten, indem wir die Winkel TPF und T′PF′, TMF und SMF′ gleich nehmen.

Durch den auf diese Weise bestimmten Brennpunct F′ geht auch noch eine dritte gerade Linie NF′, welche dadurch bestimmt ist, daſs die Winkel SNF und T′NF′ gleich sind. Hierdurch ist also für jedes Dreieck nachstehender Satz bewiesen, der als eine Verallgemeinerung des Satzes anzusehen ist, daſs diejenigen drei geraden Linien, welche die drei Winkel eines Dreiecks halbiren, in demselben Puncte sich schneiden.

Wenn man in der Ebene eines gegebenen Dreiecks irgendwo einen Punct annimmt, und durch jeden Winkel-Punct des Dreiecks eine gerade Linie nach diesem Puncte und eine andere so zieht, daſs die beiden geraden Linien mit den in demselben Winkel-Punct sich schneidenden beiden Seiten des Dreiecks gleiche Winkel bilden, so erhalten wir auſser den drei, sich im beliebig angenommenen Puncte schneidenden, geraden Linien, noch drei andere, welche ebenfalls durch ein und denselben Punct gehen.

Wenn der beliebig angenommene, innerhalb oder auſserhalb des Dreiecks liegende, Punct auf der, einen Winkel des Dreiecks halbirenden geraden Linie sich befindet, so enthält diese gerade Linie auch den Constructions-Punct, und ist mithin die Axe der Curve.

Der letzte Satz vom Dreieck besteht auch dann noch, wenn der gegebene Punct unendlich weit liegt und man also (Fig. 24.) durch die Winkel-Puncte des Dreiecks PMN in beliebiger Richtung drei parallele gerade Linien MK, PG und MH zieht. Alsdann ist der Durchschnitt der, wie eben, bestimmten drei geraden Linien MF, PF und NF der Brennpunct derjenigen Parabel, welche die drei Seiten des Dreiecks berührt, und welche MK, PG und NH zu Durchmessern hat.

338. Wenn man in einem gegebenen Dreieck, erstens den Mittelpunct des um dasselbe beschriebenen Kreises, zweitens denjenigen Punct, in welchem sich die drei, von den Winkel-Puncten auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten, Perpendikel kreuzen, bestimmt, und alsdann von diesen beiden Puncten zwei gerade Linien nach jedem der drei Winkel-Puncte des Dreiecks zieht, so bildet jedes Paar solcher Linien mit denjenigen beiden Dreiecks-Seiten, durch deren Durchschnitt dieselben gehen, gleiche Win-

*) Théorèmes nouveaux sur les lignes du second ordre. Par Poncelet. Gerg. Ann. VIII. p 3 — 13.

kel *). Nach der vorigen Nummer sind also die eben bezeichneten Puncte die beiden Brennpuncte einer in das gegebene Dreieck beschriebenen Linie zweiter Ordnung, die, was leicht erhellt, eine Ellipse oder Hyperbel ist, je nachdem das gegebene Dreieck nur spitze, oder auch einen stumpfen Winkel hat. Da diese Linie zweiter Ordnung die drei Seiten des Dreiecks berührt, so ist nebenbei bewiesen, dafs, für den Fall eines spitzwinkligen Dreiecks, das *minimum* der Summe der Abstände aller einzelnen Puncte der Dreiecks-Seiten von jenen beiden eben bestimmten Puncten, für alle drei Seiten ein und derselben Gröfse, nemlich der gröfsern Axe der eingeschriebenen Ellipse, gleich ist. Für den Fall eines stumpfwinkligen Dreiecks ist das *maximum* der Unterschiede solcher Abstände, für alle drei Seiten ein constantes, nemlich der Haupt-Axe der eingeschriebenen Hyperbel gleich.

Es ist ferner leicht zu beweisen, dafs das in Rede stehende *minimum* oder *maximum* gleich ist dem Radius des, um das Dreieck beschriebenen, Kreises. In der 23. Figur sey PMN das gegebene Dreieck, F der Mittelpunct des um dasselbe zu beschreibenden Kreises, und F′ derjenige Punct, in welchem die drei von den Winkel-Puncten auf die gegenüberstehenden Seiten gefällten Perpendikel sich kreuzen. Legt man nun einen Kreis durch die drei Fufs-Puncte dieser Perpendikel, durch die Puncte G, H und K, so geht derselbe Kreis (nach dem beiläufig in der 329. Nummer erwähnten Satze, der sich auch ohne Mühe direct beweisen läfst) ebenfalls durch die Mitten von F′P, F′M und F′N. Errichtet man in diesen Mitten Perpendikel, so berühren dieselben diejenige Linie zweiter Ordnung, (wir heben den Fall hier hervor, wo dieselbe eine Ellipse ist,) welche F und F′ zu Brennpuncten hat und die drei Seiten des gegebenen Dreiecks berührt **). Eine solche Tangente

*) Der Beweis der im Texte aufgestellten Behauptung hat keine Schwierigkeit. Es sey nemlich (Fig. 23.) PMN das gegebene Dreieck, F der Mittelpunct des um dasselbe besrhriebenen Kreises, alsdann brauchen wir nur zu zeigen, dafs, wenn wir in dem gegebenen Dreieck einen zweiten Punct F′, wie in der vorigen Nummer, so bestimmen, dafs:

$$MPF = F'PN, \quad PMF = F'MN, \quad MNF = F'NP,$$

jede durch einen der Winkel-Puncte des Dreiecks und den so bestimmten Punct F′ gehende gerade Linie (z. B. PF′) die gegenüberliegende Seite (MN) unter rechten Winkeln schneidet. Wir erhalten aber nach allbekannten Sätzen schrittweise folgende Ausdrücke.

$$\begin{aligned}\pi &= MPN + PMN + PNM,\\ &= MPF + FPN + PMF + FMN + PNM,\\ &= MPF + PMF + (FNP + FNM) + PNM,\\ &= 2GPN + 2PNM,\end{aligned}$$

mithin:

$$\frac{\pi}{2} = GPN + PNM,$$

woraus denn folgt, dafs PG senkrecht steht auf MN.

**) Wir werden nemlich in einer spätern Nummer, im Zusammenhange mit anderen Sätzen, beweisen, dafs die Fufs-Puncte der von den beiden Brennpuncten auf alle mögliche Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel gefällten Perpendikel auf dem Umfange ein und desselben Kreises liegen, und zwar desjenigen Kreises, der über der ersten Axe als Durchmesser beschrieben werden kann. Wir können diesen Satz, allein für sich, auch auf nachstehende Art beweisen. Wenn wir von der Gleichung:

ist QR, welche auf PF' in der Mitte dieser Linie, in Q, senkrecht steht. Der Berührungs-Punct R liegt in dem Durchschnitte dieses Perpendikels mit FP; denn ziehen wir RF', so wird PRF', der Nebenwinkel von FRF', von jener Tangente QR halbirt. Es ist also die gröſsere Axe der in Rede stehenden Ellipse gleich:

$$FR+RF' = FR+RP = FP,$$

mithin gleich dem Radius des um das Dreieck beschriebenen Kreises.

Aus dem Bisherigen ergeben sich nachstehende Resultate:

Wenn eine Ellipse oder Hyperbel gegeben ist, und man beschreibt aus einem Brennpuncte derselben mit der ersten Axe als Radius einen Kreis, so lassen sich in diesen Kreis unendlich viele Dreiecke eintragen, welche alle der Ellipse oder Hyperbel umschrieben sind; wenn wir nemlich durch irgend einen Punct dieses Kreises zwei Tangenten an jene Curve zweiter Ordnung legen, so bestimmen die zweiten Durchschnitte dieser beiden Tangenten mit dem Kreise eine dritte Tangente. Die von den Winkel-Puncten aller dieser Dreiecke auf die gegenüberstehenden Seiten gefällten Perpendikel schneiden sich alle in einem constanten Puncte, dem andern Brennpuncte der Curve. Alle diese Dreiecke haben hiernach auch einen gemeinschaftlichen Schwerpunct (69). Die Fuſs-Puncte aller von den Winkel-Puncten solcher Dreiecke auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Perpendikel befinden sich auf dem Umfange des über der gröſsern Axe, als Durchmesser, beschriebenen Kreises. Auf demselben Kreise liegen die Mitten der drei Seiten jedes Dreiecks (329), oder, mit anderen Worten, die Mitten aller Chorden des Kreises, von welchen die Curve berührt wird.

Beiläufig sehen wir, daſs der Radius des um ein gegebenes Dreieck beschriebenen Kreises doppelt so groſs ist, als der Radius desjenigen Kreises, der durch die Mitten der drei Seiten, oder, was dasselbe heiſst, durch die Fuſs-Puncte der drei von den Winkel-Puncten auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Perpendikel geht, und daſs der Mittelpunct des letztgenannten Kreises auf derjenigen geraden Linie liegt, welche den Mittelpunct des umschriebenen Kreises und den Kreuzungs-Punct der Perpendikel verbindet, und zwar in der Mitte zwischen diesen beiden Puncten.

Der aus einem Brennpuncte einer Hyperbel mit der Axe als Radius beschriebene Kreis begegnet der Curve in zweien Puncten; die Tangente in jedem dieser Puncte be-

$$A^2y^2 \pm B^2x^2 = \pm A^2B^2,$$

ausgehen, so erhalten wir sogleich nach der 276. Nummer:

$$(y-ax)^2 - A^2a^2 \mp B^2 = o, \qquad (1)$$

für die Gleichung des Systems irgend zweier parallelen Linien, welche die Ellipse oder Hyperbel berühren. Es ist ferner:

$$(y-a'x)^2 - (A^2 \mp B^2)a'^2 = o,$$

die Gleichung des Systems zweier durch die beiden Brennpuncte gehenden geraden Linien. Sollen diese beiden geraden Linien auf den Tangenten senkrecht stehen, so nimmt die letzte Gleichung, indem wir durch a'^2 dividiren und a für $(-\frac{1}{a'})$ schreiben, folgende Form an:

$$(ay+x)^2 - A^2 \mp B^2 = o. \qquad (2)$$

Ziehen wir die beiden Gleichungen (1) und (2) von einander ab, und dividiren alsdann durch $(1+a^2)$, so kommt:

$$y^2 + x^2 - A^2 = o.$$

stimmt auf dem Kreise einen zweiten Durchschnitts-Punct: die in demselben an den Kreis gelegte Tangente berührt zugleich die Hyperbel. Zwei in den Kreis und um die Hyperbel beschriebenen Dreiecke haben die beiden Asymptoten zu einer ihrer Seiten.

Alle diejenigen, in einen gegebenen Kreis beschriebenen, Dreiecke, welche denselben Schwerpunct haben, sind ein und derselben Linie zweiter Ordnung umschrieben, die, je nachdem der Schwerpunct innerhalb oder aufserhalb liegt, eine Ellipse oder Hyperbel ist.

339. Wir wenden uns zu neuen Winkel-Beziehungen. Sey, indem wir zuvörderst eine Ellipse betrachten, NN′ das von zweien festen Tangenten, PQ und PQ′, interceptirte Stück irgend einer beliebigen dritten Tangente. Indem wir die Winkel-Summe der beiden Dreiecke NFN′ und NF′N′ nehmen, kommt: Fig. 25.

$$2\pi = NFN' + NF'N' + \left\{\begin{matrix} NN'F + NN'F' \\ NN'Q' \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} N'NF + N'NF' \\ N'NQ \end{matrix}\right\} \quad (333)$$

und hiernach ergibt sich

$$\pi - NPN' = NFN' + NF'N'. \qquad (1)$$

Nehmen wir statt der Tangente NN′ die Tangente QQ′, so ergibt sich gerade auf dieselbe Weise:

$$2\pi = QFQ' + QF'Q' + \left\{\begin{matrix} QQ'F + QQ'F' \\ QQ'P \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} Q'QF + Q'QF' \\ Q'QP, \end{matrix}\right\}$$

und endlich:

$$\pi + QPQ' = QFQ' + QF'Q'. \qquad (2)$$

Wenn also eine Ellipse und zwei an dieselbe gelegte Tangenten gegeben sind, so ist die Summe derjenigen beiden Winkel, unter welchen das von den beiden gegebenen Tangenten interceptirte Stück irgend einer beliebigen dritten Tangente, von den beiden Brennpuncten aus, gesehen wird, constant und zwar, je nachdem die Ellipse von den drei Tangenten eingeschlossen wird oder nicht, gleich der Summe oder dem Unterschiede von zweien rechten Winkeln und demjenigen Winkel, der von den beiden festen Tangenten gebildet wird.

Wenn wir die beiden Gleichungen (1) und (2) addiren, so kommt:

$$2\pi = NFN' + NF'N' + QFQ' + QF'Q'.$$

Wenn man also um eine gegebene Ellipse irgend ein Viereck beschreibt, von welchem dieselbe umschlossen wird, so ist die Summe derjenigen vier Winkel, unter welchen zwei gegenüberliegende Seiten des Vierecks von den beiden Brennpuncten aus gesehen werden, gleich vier rechten Winkeln.

340. Wir wollen in dieser Nummer statt der Ellipse eine Hyperbel betrachten; in diesem Falle ist der Unterschied derjenigen Winkel, unter welchen das von zweien festen Tangenten interceptirte Stück irgend einer dritten beweglichen Tangente von den beiden Brennpuncten aus gesehen wird, constant und zwar, je nachdem die beiden festen Tangenten beide Hyperbel-Zweige oder nur einen derselben berühren, gleich dem von diesen Tangenten gebildeten Winkel oder dessen Nebenwinkel. Wir wollen uns hier darauf beschränken, den ersten Fall zu beweisen. Die beiden festen Tangenten seyen PN und PN′, und das von ihnen interceptirte Stück einer dritten Tangente NN′. Es ist: Fig. 26.

$$NF'N' = \pi - N'NF' - NN'F',$$

$$NFN' = \pi - N'NF - NN'F,$$

mithin

$$NF'N'-NFN' = \left\{\frac{N'NF-N'NF'}{N'NG}\right\} - \left\{\frac{NN'F'-NN'F}{NN'P}\right\} \quad (333)$$
$$= NPN'.$$

Fig. 24. 341. Sey endlich F der Brennpunct einer Parabel, seyen PT und PT' zwei feste Tangenten, und MN das von denselben auf einer beliebigen dritten Tangente interceptirte Stück. Alsdann ist:

$$\begin{aligned} MFN &= \pi - FNM - FMN, \\ &= \pi - HNT' - KMT, \\ &= \pi - MPN. \end{aligned}$$

Hiernach ergibt sich folgender Satz:

Derjenige Winkel, unter welchem das von zweien festen an eine gegebene Parabel gelegten Tangenten interceptirte Stück einer dritten Tangente vom Brennpuncte aus gesehen wird, ist constant und ergänzt den von den beiden festen Tangenten gebildeten Winkel zu zwei rechten Winkeln.

Wenn man also ein Dreieck um eine gegebene Parabel beschreibt, und um dieses Dreieck wiederum einen Kreis, so geht dieser Kreis durch den Brennpunct. Der Ort für die Brennpuncte aller Parabeln, die drei gegebene gerade Linien berühren, ist derjenige Kreis, welcher um das von den drei gegebenen geraden Linien gebildete Dreieck beschrieben werden kann. Wenn mithin vier gerade Linien gegeben sind, so erhält man leicht den Brennpunct derjenigen Parabel, welche von diesen Linien berührt wird; dieser Brennpunct liegt zugleich auf vier verschiedenen Kreisen. Da jeder Punct des um ein gegebenes Dreieck beschriebenen Kreises als der Brennpunct einer Parabel anzusehen ist, die von den Seiten des Dreiecks berührt wird, so haben wir (336) indirect folgenden bekannten Satz bewiesen:

Wenn man von irgend einem Puncte auf dem Umfange eines Kreises nach den drei Seiten irgend eines in denselben beschriebenen Dreiecks unter demselben beliebig angenommenen Winkel gerade Linien zieht, so liegen die drei Fuſs-Puncte dieser Linien in einer neuen geraden Linie.

Nach der in der 337. Nummer angezeigten Construction einer Linie zweiter Ordnung, welche die drei Seiten eines Dreiecks berührt und einen gegebenen Punct zum Brennpuncte hat, und nach dem Vorstehenden ergibt sich, wo der gegebene Punct liegen muſs, damit die Curve eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel sey. Im Fall einer Ellipse muſs der Punct innerhalb des Dreiecks oder in einem derjenigen drei unendlichen Flächen-Räume liegen, die von dem Bogen des umschriebenen Kreises und zwei Seiten bestimmt werden.

Nicht allein für die Parabel, sondern auch für jede Linie zweiter Ordnung ist derjenige Winkel, unter welchem eine von zwei festen Tangenten interceptirte dritte bewegliche Tangente, von einem der Brennpuncte aus, gesehen wird, ein constanter. Diesen Satz stellt H. Poncelet an die Spitze einer schon citirten Abhandlung, und als nächste Folgerung ergibt sich daraus der bekannte, leicht synthetisch zu beweisende Satz, daſs, wenn man an eine gegebene Linie zweiter Ordnung zwei Tangenten legt, und den Durchschnitt dieser beiden Tangenten, so wie die beiden Berührungs-Puncte mit einem Brennpuncte durch gerade Linien verbindet, an diesem Brennpuncte gleiche Winkel entstehen. Umgekehrt folgt jener Satz sogleich aus diesem. Der Raum verbietet uns hier in ausführliche Entwicklungen einzugehen.

342. Wir haben früher gesehen, dafs die Fufs-Puncte der, von dem Brennpuncte der Parabel aus, nach allen Tangenten unter irgend einem gegebenen Winkel gezogenen geraden Linien auf einer neuen geraden Linie, und zwar auf einer Tangente der Parabel, liegen. Wir wollen untersuchen, ob diesem Satze nicht ein ähnlicher für den Fall der Ellipse und Hyperbel entspricht. Zu diesem Ende sey:

$$A^2y^2+B^2x^2 = A^2B^2,$$

die Gleichung einer gegebenen Ellipse, bezogen auf rechtwinklige Coordinaten, alsdann ist (276):

$$y^2-2axy+a^2x^2-A^2a^2-B^2 = 0 \qquad (1)$$

die Gleichung des Systems irgend zweier parallelen Tangenten. Ferner sind, indem wir

$$A^2-B^2 = E^2$$

setzen, (+E) und (—E) die Abscissen der beiden Brennpuncte; zwei durch diese beiden Puncte gehende gerade Linien haben Gleichungen von folgenden Formen:

$$y-a'(x-E) = 0, \qquad y-a''(x+E) = 0,$$

und, indem wir diese Gleichungen in eine einzige zusammenziehen, kommt:

$$y^2-(a'+a'')xy+a'a''x^2+(a'-a'')Ey-a'a''E^2 = 0. \qquad (2)$$

Wenn wir die Voraussetzung machen, dafs die beiden, durch die Brennpuncte gehenden, geraden Linien mit den beiden parallelen Tangenten gleiche Winkel bilden, jedoch so, dafs dieselben nicht unter einander parallel sind, sondern mit jeder der beiden Tangenten ein gleichschenkliches Dreieck bilden, so haben wir, indem wir die Basis-Winkel dieses Dreiecks gleich ξ setzen, und für die trigonometrische Tangente von ξ der Kürze wegen v schreiben, für a' und a'' folgende Ausdrücke:

$$\frac{a+v}{1-av}, \quad \frac{a-v}{1+av},$$

und hiernach:

$$a'a'' = \frac{a^2-v^2}{1-a^2v^2}, \qquad a'+a'' = 2a.\frac{1+v^2}{1-a^2v^2}, \qquad a'-a'' = \pm 2v\frac{1+a^2}{1-a^2v^2}.$$

Durch Substitution der Werthe von a'a'', (a'+a'') und (a'—a'') geht die Gleichung (2) in folgende über:

$$(1-a^2v^2)y^2-2a(1+v^2)xy+(a^2-v^2)x^2\pm 2v(1+a^2)Ey-(a^2-v^2)E^2 = 0. \qquad (3)$$

Multipliciren wir ferner alle Glieder der Gleichung (1) mit $(1+v^2)$, so kommt:

$$(1+v^2)y^2-2a(1+v^2)xy+a^2(1+v^2)x^2-(1+v^2)(A^2a^2+B^2) = 0,$$

und wenn wir von dieser Gleichung die vorhergehende abziehen:

$$(1+a^2)(v^2y^2+v^2x^2\mp 2vEy-A^2v^2-B^2) = 0.$$

Diese Gleichung ist unabhängig von a, wenn wir den gemeinschaftlichen Factor $(1+a^2)$ fortlassen, und stellt einen Kreis dar; eine leichte Umformung derselben führt, indem wir wieder für v seinen Werth $tang\,\xi$ schreiben, zu folgender Gleichung:

$$(y\mp E\,cotg\,\xi)^2+x^2 = \frac{A^2}{sin^2\xi}. \qquad (4)$$

Es ist offenbar, dafs diese Gleichung unmittelbar auch dann noch besteht, wenn wir eine Hyperbel an die Stelle der bisher betrachteten Ellipse setzen, und wiederum durch E den Abstand der Brennpuncte vom Mittelpuncte bezeichnen.

Wir wollen die Gleichung des Kreises, die wir eben entwickelt haben, genauer discutiren. Um zwischen derselben und der Gleichung der gegebenen Curve x zu eliminiren, ziehen wir diese beiden Gleichungen von einander ab, nachdem wir sie zuvor unter folgende Formen gebracht haben:

$$\frac{A^2}{B^2}y^2+x^2-A^2 = 0,$$

$$y^2+x^2\mp 2E\,cotg\xi - A^2 - B^2 cotg^2\xi = 0.$$

Auf diese Weise erhalten wir:

$$\frac{E^2}{B^2}y^2 \pm 2E\,cotg\xi + B^2 cotg^2\xi = 0,$$

und durch eine leichte Umformung:

$$\left(y \pm \frac{B^2}{E}cotg\xi\right)^2 = 0:$$

die Gleichung zweier zusammenfallenden, der ersten Axe parallelen, geraden Linien. Im Allgemeinen berührt also der in Rede stehende Kreis die gegebene Curve in zweien Puncten. Für den Fall der Hyperbel findet diefs immer Statt, für den Fall der Ellipse aber nur dann, wenn die durch die Gleichung:

$$y \pm \frac{B^2}{E}cotg\xi = 0, \qquad (5)$$

bestimmte gerade Linie die Curve wirklich schneidet, was nur dann geschieht, wenn der Winkel ξ so angenommen wird, dafs

$$E^2 > B^2 cotg^2\xi.$$

Die beiden Berührungen fallen in einen einzigen Punct, in einen Scheitel der kleinen Axe zusammen, wenn die Ellipse von der geraden Linie (5) berührt wird, wenn nemlich:

$$E^2 = B^2 cotg^2\xi.$$

Diese Gleichung bildet den Uebergang zu dem dritten möglichen Fall, dafs

$$E^2 < B^2 cotg^2\xi,$$

wo Kreis und Ellipse keinen Punct mehr gemein haben, ihre Gleichungen aber, was nicht zu übersehen ist, sich immer noch zu der Gleichung eines Systems zweier zusammenfallenden geraden Linien verbinden lassen.

Es ist leicht, sich von diesen verschiedenen Resultaten *a priori* Rechenschaft zu geben. Zuvörderst ist offenbar, dafs kein Punct des Kreises innerhalb der Ellipse oder Hyperbel liegen kann. Wenn der Winkel ξ so angenommen wird, dafs er demjenigen Winkel gleich ist, welchen irgend eine Tangente mit einer, von einem der beiden Brennpuncte nach dem Berührungs-Puncte gezogenen, geraden Linie bildet, so liegt dieser Berührungs-Punct nothwendig auf dem Umfange des in dem Vorstehenden bestimmten Kreises. Dieser Kreis berührt also die Curve in diesem Puncte und aufserdem noch in einem andern Puncte, der in Beziehung auf die zweite Axe eine symmetrische Lage hat.

Für den Fall der Hyperbel kann der Winkel, den eine Tangente mit der von einem Brennpuncte nach dem Berührungs-Puncte gezogenen geraden Linie bildet, jeder beliebige seyn; denn rücksichtlich der Asymptoten ist er gleich Null zu setzen. Für den Fall der Ellipse gibt es ein *minimum* dieses Winkels, dieses entspricht den Scheiteln der kleinern Axe; und hierdurch ist denn auch das *minimum* für den Winkel ξ bestimmt, wenn der in Rede stehende Kreis die Ellipse reell berühren soll.

In der 27. Figur sind MN und M′N′ zwei parallele Tangenten einer gegebenen Ellipse, PM und PN zwei durch die beiden Brennpuncte, F und F′, gehende gerade Linien, welche mit jeder jener beiden parallelen Tangenten ein gleichschenkliches Dreieck bilden: alsdann liegen, nach dem eben Bewiesenen, die vier Durchschnitts-Puncte M und N, M′ und N′ auf dem Umfange ein und desselben Kreises, der die gegebene Ellipse aufserhalb in zwei Puncten berührt. Wir erhalten vier neue Puncte, welche auf

dem Umfange desselben Kreises liegen, wenn wir die Richtung der beiden Tangenten beliebig ändern, und wiederum, wie vorhin, die Winkel-Puncte eines solchen Trapezes construiren, in welchem zwei gegenüberliegende Seiten zwei parallele Tangenten sind, die beiden anderen durch die beiden Brennpuncte gehen und dessen Winkel den Winkeln des Trapezes MM'N'N gleich sind. Derjenige Winkel, welchen die beiden durch die beiden Brennpuncte gehenden, Seiten, nöthigen Falls verlängert, mit einander bilden, ist für alle wie eben bestimmten Trapeze constant, und zwar, der frühern Bezeichnung zufolge, gleich $(\pi-2\xi)$; hieraus folgt denn, dafs der Durchschnitt je zweier solcher Seiten auf dem Umfange ein und desselben, durch die beiden Brennpuncte gehenden, Kreises bleibt, und zwar in dem Bogen desjenigen Abschnittes, der jenen Winkel $(\pi-2\xi)$ fafst. Im Falle der Figur bleibt also der Punct P auf dem von F und F' begränzten und durch P gehenden Bogen. Wenn dieser Bogen die gegebene Ellipse schneidet, so sind die Durchschnitts-Puncte diejenigen Puncte, in welchen diese von dem, durch M, M', N und N' gehenden Kreis berührt wird. Wir können hiernach diese Berührungs-Puncte T und T' leicht construiren, wenn der Winkel ξ gegeben ist. Wenn der Kreisbogen FPF' die Ellipse im Scheitel ihrer zweiten Axe berührt, so fallen die beiden Puncte T und T' in einen einzigen zusammen, der Winkel $(\pi-2\xi)$ ist alsdann der gröfste Winkel, den zwei von den beiden Brennpuncten nach irgend einem Puncte der Ellipse gezogene gerade Linien mit einander bilden können. Wenn der Bogen FPF' des durch die beiden Brennpuncte gehenden Kreises der Ellipse nicht begegnet, so kann der durch die Gleichung (4) dargestellte Kreis dieselbe auch nicht mehr berühren; es ist aber leicht ersichtlich, dafs die Chordale der beiden eben bezeichneten Kreise auch dann noch zusammenfällt, mit dem Systeme der beiden schon unter sich zusammenfallenden geraden Linien, zu dessen Gleichung man durch Verbindung der Gleichung (4) und der Gleichung der Ellipse gelangen kann.

Aus dem Bisherigen ergeben sich nachstehende Resultate:

Wenn man aus einem der beiden Brennpuncte einer Ellipse oder Hyperbel nach allen Tangenten derselben unter einem gegebenen Winkel gerade Linien zieht, so liegen die Fufs-Puncte aller dieser geraden Linien auf dem Umfange eines Kreises, der im Allgemeinen die Curve zwiefach berührt.

Wir erhalten zwei solcher Kreise, denen das zwiefache Zeichen in der Gleichung (4) entspricht, wenn wir statt des gegebenen Winkels auch seinen Nebenwinkel nehmen.

Wenn eine gegebene Ellipse oder Hyperbel von einem Kreise in zwei Puncten aufserhalb berührt wird (die beiden Berührungs-Puncte können insbesondere in einen einzigen Punct zusammenfallen); so ist jede Chorde des Kreises, die zugleich eine Tangente der Curve ist, die Basis eines gleichschenklichen Dreiecks, dessen Schenkel durch die beiden Brennpuncte gehen, und dessen Winkel constant sind.

Wenn man in einem solchen Dreieck MPN überdiefs noch von den beiden Brennpuncten F und F' nach dem Berührungs-Puncte der Basis, nach G, zwei gerade Linien zieht, so erhält man zwei ähnliche Dreiecke FMG und F'NG.

Wenn man den Scheitel eines Winkels von constanter Gröfse auf dem Umfange eines gegebenen Kreises fortrücken läfst, so berührt, wenn ein Schenkel desselben durch einen festen Punct geht, der andere Schenkel in allen seinen Lagen ein und dieselbe Ellipse oder Hyperbel, deren ein Brennpunct mit dem festen Puncte zusammenfällt, und die, im Allgemeinen, den Kreis in zwei Puncten berührt.

Die in Rede stehende Curve ist eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem der feste Punct innerhalb oder aufserhalb des gegebenen Kreises liegt. Wenn (im Falle der Ellipse) der constante Winkel kleiner als derjenige Winkel ist, den der gröfste Abschnitt, der auf dem gegebenen Kreise durch eine durch den festen Punct gehende gerade Linie bestimmt werden kann, fafst: so kann die Curve den Kreis nicht mehr berühren. Wenn jener constante Winkel dem eben bezeichneten gleich ist, so fallen die beiden Berührungs-Puncte in einen einzigen Punct zusammen. Jede derjenigen beiden geraden Linien, die durch den angenommenen festen Punct so gezogen werden können, dafs auf dem gegebenen Kreise ein Abschnitt entsteht, der den constanten Winkel fafst, bestimmt einen derjenigen beiden Puncte, in welchen dieser Kreis von der Curve berührt wird. Die andern beiden Durchschnitte beziehen sich auch auf einen andern constanten Winkel, auf denjenigen nemlich, der den vorigen zu π ergänzt.

343. Sey wiederum:

$$A^2y^2 \pm B^2x^2 = \pm A^2B^2,$$

die Gleichung einer Ellipse oder Hyperbel, alsdann ist (277):

$$(A^2-x'^2)y^2+2x'y'xy+(\pm B^2-y'^2)x^2-2A^2y'y\mp 2B^2x'x+A^2y'^2\pm B^2x'^2 = 0,$$

die Gleichung des Systems zweier durch irgend einen Punct (y', x') gehenden Tangenten. Der Anblick der drei ersten Glieder dieser Gleichung gibt, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten:

$$tang\omega + tang\omega' = -\frac{2x'y'}{A^2-x'^2},\quad tang\omega\, tang\omega' = \frac{\pm B^2-y'^2}{A^2-x'^2},$$

indem wir diejenigen Winkel, welche die beiden Tangenten mit der ersten Axe bilden, ω und ω' nennen; und hiernach ergibt sich für den von den beiden Tangenten eingeschlossenen Winkel, den wir durch φ bezeichnen wollen, folgende Bestimmung:

$$tang\varphi = \frac{tang\omega - tang\omega'}{1+tang\omega\, tang\omega'} = \frac{2(A^2y'^2\pm B^2x'^2\mp A^2B^2)^{1/2}}{A^2\pm B^2-x'^2-y'^2}. \quad (1)$$

Diese Gleichung stellt, indem wir y' und x' als veränderliche Gröfsen und φ als gegeben betrachten, den Ort aller derjenigen Puncte dar, von welchen aus die gegebene Ellipse oder Hyperbel unter dem gegebenen Winkel gesehen wird. Indem wir die letzte Gleichung rational machen, steigt dieselbe in Beziehung auf y' und x' bis zum vierten Grade und bezieht sich, weil alsdann $tang\varphi$ nur im Quadrate vorkommt, zugleich auf den gegebenen Winkel und seinen Nebenwinkel. Indem wir φ gleich Null oder gleich π nehmen, ist der in Rede stehende Ort die gegebene Curve selbst, aufserdem reducirt er sich nur dann auf den zweiten Grad, wenn $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, wir erhalten alsdann:

$$y^2+x^2 = A^2 \pm B^2:$$

die Gleichung eines Kreises, der sich für den Fall einer gleichseitigen Hyperbel auf einen Punct reducirt, und imaginär wird, wenn für den Fall einer Hyperbel $B > A$. Also:

Der Ort aller Puncte, von denen aus eine Ellipse oder Hyperbel unter rechtem Winkel gesehen wird, ist ein Kreis.

Die Gleichung des vierten Grades, zu welcher der Ausdruck bei (1) für eine beliebige Annahme von φ führt, läfst sich nur für den Fall, dafs die gegebene Curve ein Kreis ist, in zwei Factoren des zweiten Grades zerlegen. Alsdann kommt nemlich:

$$(2A^2-y^2-x^2)^2 tang^2\varphi = 4A^2(y^2+x^2-A^2),$$

und nach einigen Umformungen:

$$\left(y^2+x^2-\frac{A^2}{sin^2 \frac{1}{2}\varphi}\right)\left(y^2+x^2-\frac{A^2}{cos^2 \frac{1}{2}\varphi}\right) = 0:$$

die Gleichung eines Systems zweier Kreise, die in einen einzigen zusammenfallen, wenn $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Wir wollen nun statt der Ellipse oder Hyperbel eine Parabel betrachten, und bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten:

$$y^2 = 2px$$

für deren Gleichung nehmen, wonach sich für die Gleichung des durch den Punct (y', x') gehenden Tangenten-Systems folgende ergibt (277 (10)):

$$x'y^2 - y'xy + \frac{1}{2}px^2 + \text{etc.} = 0,$$

Bei einer ähnlichen Bezeichnung, wie eben, haben wir also:

$$tang\omega + tang\omega' = \frac{y'}{x'}, \qquad tang\omega\, tang\omega' = \frac{\frac{1}{2}p}{x'};$$

$$tang\omega - tang\omega' = \frac{(y'^2 - 2px')^{\frac{1}{2}}}{x'}, \qquad 1 + tang\omega\, tang\omega' = \frac{x' + \frac{1}{2}p}{x'};$$

und endlich:

$$tang\varphi = \frac{(y'^2 - 2px')^{\frac{1}{2}}}{x' + \frac{1}{2}p}. \qquad (2)$$

Wenn wir entwickeln, und zugleich, indem wir $(x + \frac{1}{2}p)$ für x' schreiben, die Abscissen vom Brennpuncte der gegebenen Parabel an rechnen, so kommt:

$$y^2 - tang^2\varphi x^2 - \frac{2px}{cos^2\varphi} - \frac{p^2}{cos^2\varphi} = 0.$$

Diese Gleichung stellt, wenn wir y und x als veränderliche Gröſsen betrachten, eine Hyperbel dar, deren Axen-Verhältniſs $tang\varphi$ und deren Asymptoten-Winkel mithin 2φ ist. Setzen wir in der letzten Gleichung $y = 0$, so ergibt sich:

$$x^2 + \frac{2px}{sin^2\varphi} + \frac{p^2}{sin^2\varphi} = 0;$$

die halbe Summe der Wurzeln dieser Gleichung bezeichnet die Mittelpuncts-Abscisse der Hyperbel und ist gleich $\left(-\frac{p}{sin^2\varphi}\right)$; die halbe Differenz der Wurzeln gibt die halbe Quer-Axe und ist gleich $\frac{p\cos\varphi}{sin^2\varphi}$. Die halbe zweite Axe ist gleich dem letzten Ausdrucke multiplicirt mit $tang\varphi$, mithin gleich $\frac{p}{sin\varphi}$; die Entfernung der Brennpuncte vom Mittelpuncte gleich $\frac{p}{sin^2\varphi}$, woraus wir denn ersehen, daſs ein Brennpunct der Hyperbel mit dem Brennpuncte der gegebenen Parabel zusammenfällt.

Einer der beiden Hyperbel-Zweige entspricht dem gegebenen Winkel φ, der andere dem Winkel $\pi - \varphi$. Wenn $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, so geht, was sogleich aus dem Anblick der Gleichung (2) erhellet, die in Rede stehende Hyperbel in eine gerade Linie, die Polare des Brennpunctes der Parabel, über.

§. 8.

Linien zweiter Ordnung, welche sich in denselben beiden Puncten schneiden, oder sich in demselben Puncte berühren. Einfache Osculation. Höhere Osculation. Zwiefache Berührung.

344. Seyen:

$$\begin{aligned} y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon &= 0, \\ y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\gamma' y+2\delta' x+\varepsilon' &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

die Gleichungen irgend zweier Linien zweiter Ordnung. Sollen beide Linien durch einen festen Punct gehen, und nehmen wir diesen festen Punct zum Anfangs-Puncte, so ist:

$$\varepsilon = \varepsilon' = 0.$$

Hiernach nehmen die beiden Gleichungen (1) folgende Form an:

$$\begin{aligned} y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x &= 0, \\ y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\gamma' y+2\delta' x &= 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Sollen die beiden Linien zweiter Ordnung noch durch einen zweiten festen Punct gehen, und legen wir durch denselben die zweite Axe, so kommt:

$$\gamma = \gamma'.$$

Wenn wir die beiden Gleichungen (2) auf irgend eine beliebige Weise zu einer neuen Gleichung verbinden, so stellt diese Gleichung eine neue Linie dar, welche durch die Durchschnitte der beiden gegebenen geht; wenn wir bloſs abziehen, so kommt, mit Berücksichtigung der letzten Bedingungs-Gleichung:

$$2(\alpha-\alpha')xy+(\beta-\beta')x^2+2(\delta-\delta')x = 0:$$

die Gleichung eines Systems zweier geraden Linien, welche einzeln durch folgende beiden Gleichungen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ 2(\alpha-\alpha')y+(\beta-\beta')x+2(\delta-\delta') &= 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Die eine dieser beiden Gleichungen bezeichnet die zweite Axe, welche zwei Durchschnitte der beiden gegebenen Curven enthält; die andere eine gerade Linie, welche die übrigen (reellen oder imaginären) Durchschnitte enthalten muſs, und mithin eine gemeinschaftliche (reelle oder ideale) Chorde der beiden Curven ist. Beiläufig sehen wir, daſs zwei Linien zweiter Ordnung sich nur in vier Puncten schneiden können.

Die Gleichung (3) bleibt dieselbe, wenn wir annehmen, daſs die beiden gegebenen Curven die zweite Axe im Anfangs-Puncte berühren, d. h. wenn wir γ und γ' gleich Null setzen, und also statt der Gleichungen (2) folgende nehmen:

$$\begin{aligned} y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta x &= 0, \\ y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\delta' x &= 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Wir wollen in den folgenden Nummern die Gleichung (3) discutiren. Diese Discussion ergibt sich auf die leichteste Weise, und führt zu manchen Resultaten.

345. Wenn wir durch jede der Gleichungen (2) nach einander verschiedene, unter einander ähnliche Curven zweiter Ordnung darstellen, so ändert sich in diesen Gleichungen nur δ und δ'. In der Gleichung (3) bleiben also die Coefficienten von y und x immer dieselben, und nur das constante Glied $(\delta-\delta')$ erhält verschiedene Werthe. Die durch diese Gleichung dargestellte gemeinschaftliche Chorde bleibt also immer mit sich selbst parallel. Hierin ist folgender Satz enthalten:

Wenn man durch zwei feste Puncte zwei Reihen unter einander ähnlicher Curven legt, so sind die gemeinschaftlichen Chorden je zweier aus beiden Reihen genommenen Curven unter einander parallel. Diese Chorden bleiben auch dann parallel, wenn alle Curven sich in demselben Puncte berühren.

Alle Kreise insbesondere, welche irgend eine gegebene Curve zweiter Ordnung in denselben beiden Puncten schneiden oder in demselben Puncte berühren, haben mit dieser Curve eine parallele gemeinschaftliche Chorde.

Wir können ferner für eine der beiden durch die Gleichungen (2) dargestellten Linien zweiter Ordnung ein System zweier geraden Linien nehmen. Es bestimmen also in allen ähnlichen Curven, welche sich in denselben beiden Puncten schneiden oder in demselben Puncte berühren, zwei beliebige, durch die beiden Durchschnitte oder die Berührung gelegten, geraden Linien parallele Chorden. Wenn die durch die beiden Durchschnitte gelegten geraden Linien sich auf einer der ähnlichen Curven schneiden, so ordnet sich eine Tangente in die Reihe der parallelen Chorden. Wir erhalten lauter parallele Tangenten, wenn wir durch den gemeinschaftlichen Berührungs-Punct nach beliebiger Richtung eine gerade Linie ziehen, die wir als ein System von zwei zusammenfallenden geraden Linien betrachten.

Nach der 279. Nummer gehören mit ähnlichen Hyperbeln Systeme zweier den beiden Asymptoten parallelen geraden Linien und mit ähnlichen Parabeln Systeme irgend zweier Durchmesser derselben zusammen. Wenn also eine Hyperbel oder Parabel in irgend zweien Puncten von einer beliebigen Linie zweiter Ordnung (namentlich von einem Systeme zweier geraden Linien) geschnitten wird; so bestimmen zwei durch diese beiden Puncte den Asymptoten der Hyperbel parallel gezogene gerade Linien, oder zwei Durchmesser der Parabel, auf den beiden sich schneidenden Linien zweiter Ordnung zwei parallele Chorden. Hiernach können wir eine Parabel beschreiben, wenn drei Puncte derselben und die Richtung ihrer Durchmesser gegeben sind. Seyen nemlich M, M′ und M″ die drei gegebenen Puncte, MA und M′B zwei Durchmesser. Alsdann ziehe man MM″, welche dem Durckmesser M′B in B begegne, ziehe ferner nach beliebiger Richtung M′S, welche dem Durchmesser MA in A begegne, und endlich M″S parallel mit AB: so ist S ein Punct der gesuchten Parabel. Es ist leicht, diese Parabel durch eine stetige Bewegung des Punctes S zu beschreiben. Wenn MA und M′B nicht parallel sind, so erhalten wir, gerade nach derselben Construction als eben, eine Hyperbel, die durch M, M′ und M″ geht, und deren Asymptoten mit jenen Linien MA und M′B parallel sind. Fig. 28.

Beschreibt man endlich irgend ein Parallelogramm, dessen zwei gegenüberstehende Winkel-Puncte in dem Umfange irgend einer gegebenen Linie zweiter Ordnung liegen, so bestimmen die beiden Paare in den übrigen beiden Winkel-Puncten zusammenstofsender Seiten (die als zwei ähnliche Linien zweiter Ordnung anzusehen sind) auf der gegebenen Linie zweiter Ordnung zwei parallele Chorden.

346. Auf eine Weise, die sich von selbst darbietet und gar keine Rechnung erfordert, knüpft sich an die Gleichung (3) die Theorie der Osculation irgend zweier beliebigen Linien zweiter Ordnung.

Wir legen den nächsten Entwicklungen die Gleichungen (4) zu Grunde, welche zwei die Axe der y im Anfangs-Puncte berührende und sich im Allgemeinen noch in zwei Puncten schneidende Linien zweiter Ordnung darstellen. Wenn wir irgend eine Bestimmung über die, durch die beiden Durchschnitte dieser Curven gehende gemeinschaftliche

Chorde derselben machen, so setzen wir dadurch eine Beziehung zwischen den beiden Curven, eine Bedingungs-Gleichung zwischen den Constanten ihrer Gleichungen fest. Soll die gemeinschaftliche Chorde durch den Anfangs-Punct der Coordinaten, der zugleich der Berührungs-Punct ist, gehen, so heifst diefs, dafs drei Durchschnitts-Puncte der beiden Curven in einen einzigen zusammenfallen, oder, mit anderen Worten, dafs die beiden Curven sich einfach (dreipunctig) osculiren, oder einen Contact der zweiten Ordnung haben. Damit aber die in Rede stehende gemeinschaftliche Chorde durch den Anfangs-Punct der Coordinaten gehe, mufs aus ihrer Gleichung:

$$2(\alpha-\alpha')y+(\beta-\beta')x+2(\delta-\delta') = 0,$$

das constante Glied verschwinden, was nur dann geschicht, wenn:

$$\delta = \delta'.$$

Diefs ist also die Bedingung der einfachen Osculation.

Die Gleichung der gemeinschaftlichen Chorde wird bei dieser Voraussetzung folgende:

$$2(\alpha-\alpha')y+(\beta-\beta')x = 0. \qquad (5)$$

Da wir über die Richtung der ersten Axe durchaus keine Bestimmung gemacht haben, so können wir für dieselbe jene gemeinschaftliche Chorde nehmen, und also dieselbe durch den Osculations-Punct und den Durchschnitts-Punct der beiden Curven legen. Damit aber die letzte Gleichung die Gleichung der ersten Axe werde und mithin folgende Form:

$$y = 0,$$

annehme, mufs folgende Gleichung Statt finden:

$$\beta = \beta'.$$

Indem man also die gemeinschaftliche Tangente im Osculations-Puncte als zweite Axe nimmt, und die erste Axe durch diesen Punct und den Durchschnitts-Punct der beiden Curven legt, so hat man zwischen den Constanten ihrer Gleichungen:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta x = 0,$$
$$y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\delta' x = 0,$$

zugleich folgende beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$\beta = \beta', \qquad \delta = \delta'.$$

Für die in dieser Nummer bestimmte Art der Osculation findet jedesmal ein sich Durchschneiden der beiden Curven Statt, was sogleich daraus sich ergibt, dafs die durch (5) dargestellte gerade Linie, welche die Curven im Anfangs-Puncte schneidet, nothwendig jeder derselben noch in einem zweiten Puncte begegnet; und dieser Punct fällt mit dem Anfangs-Puncte so lange nicht zusammen, als jene gerade Linie nicht in eine Tangente übergeht. (Wir sehen hierbei von dem speciellen Falle ab, dafs die beiden sich osculirenden Curven Hyperbeln sind, die eine parallele Asymptote haben. Dieser Fall tritt dann ein, wenn $\beta = \beta' = 0$.) Daraus, dafs zwei sich osculirende Curven zweiter Ordnung aufser dem Osculations-Puncte nur noch einen einzigen Durchschnitts-Punct gemein haben, folgt, dafs jede der Curven in diesen beiden Puncten in solche zwei Theile getheilt wird, von welchen der eine aufserhalb, der andere innerhalb der andern Curve liegt.

347. Wenn die durch die Gleichung:

$$2(\alpha-\alpha')y+(\beta-\beta')x = 0,$$

dargestellte gerade Linie eine Tangente ist, so fällt der Durchschnitts-Punct mit dem Osculations-Puncte zusammen, es vereinigen sich also alle vier Durchschnitte in einen einzigen; es findet zwischen den beiden Curven der höchste Grad der Osculation Statt,

ein Contact der dritten Ordnung oder von vier Puncten. Damit aber die letzte Gleichung eine Tangente darstelle, mufs sie mit der zweiten Axe zusammenfallen, und also folgende Form annehmen können:

$$x = o,$$

und hierzu ist erforderlich, dafs:

$$\alpha = \alpha'.$$

Indem man also die gemeinschaftliche Tangente im Osculations-Puncte zweier sich vierpunctig osculirenden Curven zur zweiten Axe nimmt, während man der ersten Axe irgend eine beliebige Richtung gibt, so hat man zwischen den Constanten in den Gleichungen der beiden Curven:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta x = o,$$
$$y^2+2\alpha' xy'+\beta' x^2+2\delta' x = o,$$

zugleich folgende beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$\alpha = \alpha', \quad \delta = \delta'.$$

Zu denselben beiden Bedingungs-Gleichungen kommen wir auch auf folgendem Wege. Wenn nemlich die gemeinschaftliche Chorde zweier sich berührenden Curven zweiter Ordnung der gemeinschaftlichen Tangente parallel seyn soll, so ergibt sich, bei der bisherigen Coordinaten-Bestimmung, sogleich aus dem Anblick der Gleichung (3) folgende Bedingungs-Gleichung:

$$\alpha = \alpha'.$$

Die eben angezogene Gleichung der Chorde wird alsdann:

$$(\beta-\beta')x+2(\delta-\delta') = o.$$

Wenn diese Chorde (indem wir etwa eine Curve als gegeben, die andere als veränderlich betrachten) ihre Richtung beibehaltend der Tangente so lange immer näher rückt, bis sie endlich ganz mit ihr zusammenfällt, wo alsdann vier Durchschnitte sich in einen einzigen Punct vereinigen: so mufs aus der letzten Gleichung der Coëfficient von x verschwinden, und wir erhalten also neben der obigen Bedingungs-Gleichung noch folgende:

$$\delta = \delta',$$

welche, für sich allein, eine dreipunctige Osculation anzeigt.

348. Die Resultate der beiden letzten Nummern sind symmetrisch und einfach, und hiervon können wir schon mit Zuversicht abnehmen, dafs alle geometrischen Beziehungen zweier sich osculirenden Curven zu einander, sich auf eine leichte Weise aus der Combination der Gleichungen (4) werden herleiten lassen, indem wir die jedem Falle entsprechenden Bedingungs-Gleichungen zwischen den Constanten dieser Gleichungen berücksichtigen.

Einen Augenblick wollen wir noch bei den Betrachtungen verweilen, auf welchen die vorstehenden Entwicklungen beruhen. Jede Tangenten-Theorie und jede Theorie der Osculation gründet sich auf die Voraussetzung, dafs zwei und mehrere Durchschnitts-Puncte in einen einzigen zusammenfallen, eine Voraussetzung, die man auf verschiedene Arten umschreiben, aber, nach meiner Meinung, nicht ganz umgehen oder mit einer andern Betrachtungs-Weise, welche eine deutlichere und allgemeinere Idee von der Sache gibt, vertauschen kann.

Der erste Gedanke, der sich darbietet, um das Zusammenfallen zweier oder mehrerer Durchschnitts-Puncte zweier beliebigen Curven in einen einzigen Punct analytisch auszudrücken, ist, zwischen den Gleichungen derselben eine der veränderlichen Gröfsen zu eliminiren. Auf diese Weise erhält man eine Gleichung in der übrig bleibenden ver-

änderlichen Gröſse, deren Wurzeln die Ordinaten oder Abscissen der Durchschnitts-Puncte sind. Wenn wir alsdann die Constanten in den Gleichungen der beiden Curven als unbestimmte Coefficienten betrachten, und bei dieser Voraussetzung Bestimmungen über die Realität oder Imaginärität, Gleichheit oder Ungleichheit der Wurzeln der durch Elimination resultirenden Gleichung machen, so unterwerfen wir dadurch die beiden Curven gewissen Bedingungen. Wenn wir uns auf zwei Linien zweiter Ordnung beschränken, so erhalten wir im Allgemeinen in Beziehung auf jede der veränderlichen Gröſsen eine Gleichung vom vierten Grade, deren Wurzeln die Coordinaten ihrer Durchschnitte bezeichnen. Soll zwischen den beiden Curven eine einfache Berührung Statt finden, so müssen die beiden eben bezeichneten Gleichungen zwei gleiche Wurzeln haben, soll eine zwiefache Berührung Statt finden, so muſs es zwei Paare gleicher Wurzeln geben. Verlangt man, daſs die beiden Curven sich dreipunctig osculiren, so müssen drei Wurzeln einander gleich seyn, und da die vierte Wurzel allein nicht imaginär seyn kann, so müssen in diesem Falle die beiden Curven sich zu gleicher Zeit schneiden. Sollen endlich die beiden Curven zweiter Ordnung einen Contact der höchsten Ordnung unter einander haben, so müssen alle Wurzeln einander gleich seyn, und ein sich Durchschneiden der Curven kann nicht mehr Statt finden. Der hierdurch angezeigte Gang der Discussion hat den Mangel, daſs eine der resultirenden Gleichung, für sich allein, unbestimmt läſst, ob zwei gleiche Wurzeln einen Berührungs-Punct, oder zwei solche Puncte anzeigen, die auf einer der einen Coordinaten-Axe parallelen geraden Linie liegen. Bei den Entwicklungen in den vorigen Nummern ist dieſs nicht der Fall, und zugleich führen dieselben leichter zum Ziele.

Die Theorie der Osculation ist also die geometrische Deutung eines analytischen Factums, nemlich der gleichen Wurzeln solcher Gleichungen, zu denen wir durch Elimination einer veränderlichen Gröſse zwischen zweien Gleichungen mit zweien veränderlichen Gröſsen gelangen *).

*) Die im Texte in Beziehung auf zwei Linien zweiter Ordnung entwickelte Theorie der Osculation beschränkt sich nicht auf diesen besondern Fall. Um dieſs durch Beispiele zu belegen, wollen wir in einer Note die Linien dritter Ordnung mit einer geraden Linie und den Linien zweiter Ordnung zusammenstellen, und dann einige allgemeine Bemerkungen anknüpfen. Die allgemeine Gleichung des dritten Grades sey:

$$y^3+Ay^2x+Byx^2+Cx^3+Dy^2+Exy+Fx^2+Gy+Hx+I = o.$$

Setzen wir in dieser Gleichung $x = o$, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$y^3+Dy^2+Gy+I = o,$$

zur Bestimmung der Durchschnitte der zweiten Axe mit der Curve. Der Anblick dieser Gleichung zeigt, daſs $I = o$ seyn muſs, wenn der Anfangs-Punct auf dem Umfange der Curve angenommen wird, und daſs überdieſs noch $G = o$ seyn muſs, wenn die zweite Axe die Curve im Anfangs-Puncte berühren soll. Es kann aber auch in der Gleichung der Curve zugleich noch $D = o$ seyn: alsdann hat die zweite Axe mit der Curve einen dreipunctigen Contact, den wir mit vollem Rechte Osculation nennen können. Es ist aber im Allgemeinen möglich, aus der Gleichung der Linien dritter Ordnung durch Verlegung des Anfangs-Punctes und durch Veränderung der Richtung der zweiten Axe das constante Glied und die mit y und y^2 behafteten Glieder fortzuschaffen. Hieraus erhellet, daſs zwischen einer gera-

349. Man mißt die Krümmung einer Curve in irgend einem ihrer Puncte nach dem Radius desjenigen Kreises, von welcher dieselbe im gegebenen Puncte osculirt wird, der

den Linie und einer Linie dritter Ordnung im Allgemeinen zwar nur eine einfache Berührung, für gewisse Puncte aber eine dreipunctige Osculation Statt finden kann.

Wenn wir irgend eine gegebene Linie dritter Ordnung auf irgend einen Punct ihres Umfanges, als Anfangs-Punct, und die Tangente in diesem Puncte, als zweite Axe, beziehen und durch denselben Punct eine Linie zweiter Ordnung, die ebenfalls von der zweiten Axe berührt wird, legen, so erhalten wir für die beiden Curven Gleichungen von folgenden Formen:

$$y^3+Ay^2x+Byx^2+Cx^3+Dy^2+Exy+Fx^2+Hx = 0, \qquad (1)$$

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta x = 0, \qquad (2)$$

Substituiren wir in die erste Gleichung $-y(2\alpha xy+\beta x^2+2\delta x)$ für y^3 und $-D(2\alpha xy+\beta x^2+2\delta x)$ für Dy^2, so erhalten wir die Gleichung einer neuen Linie dritter Ordnung, von welcher (2) in denselben Puncten geschnitten wird als von (1). Diese Gleichung, der wir folgende Form geben können:

$$x((A-2\alpha)y^2+(B-\beta)xy+Cx^2+(E-2\delta-2D\alpha)y+(F-D\beta)x+(H-2D\delta)) = 0,$$

stellt das System einer Linie zweiter Ordnung und der zweiten Axe dar. Es liegen also zwei, in einen Berührungs-Punct susammenfallende Durchschnitte der beiden Curven (1) und (2) auf dieser Axe, die eine gemeinschaftliche Tangente derselben ist, die übrigen vier Durchschnitte liegen auf der durch folgende Gleichung dargestellten Linie zweiter Ordnung:

$$(A-2\alpha)y^2+(B-\beta)xy+Cx^2+(E-2\delta-2D\alpha)y+(F-D\beta)x+(H-2D\delta) = 0. \qquad (3)$$

Wenn sich also die beiden Curven (1) und (2) drei-, vier-, fünf- oder endlich sechspunctig osculiren sollen, so muſs die Curve (3) durch den Anfangs-Punct der Coordinaten gehen, in diesem Puncte mit der Curve (2) eine gemeinschaftliche Tangente haben, dieselbe dreipunctig oder endlich vierpunctig osculiren. Dieſs führt uns zu folgenden Bedingungs-Gleichungen:

$$H-2D\delta = 0, \qquad (4)$$

$$E-2\delta-2D\alpha = 0, \qquad (5)$$

$$F-D\beta = (A-2\alpha)2\delta, \qquad (6)$$

$$B-\beta = (A-2\alpha)2\alpha. \qquad (7)$$

Die einfache Osculation der beiden Curven (1) und (2) wird durch die erste dieser Gleichungen angezeigt. Die osculirende Linie zweiter Ordnung kann auch ein Kreis seyn, und somit erhalten wir, bei der Annahme rechtwinkliger Coordinaten, für den Krümmungs-Halbmesser, abgesehen vom Zeichen, folgenden Werth: $\frac{H}{2D}$. In dem Falle der vierpunctigen Osculation müssen die beiden Gleichungen (4) und (5) zugleich bestehen; es gibt noch unendlich viele osculirende Linien zweiter Ordnung, aber im Allgemeinen gehört in die Reihe derselben kein Kreis mehr. Dieſs findet nur in demjenigen Falle Statt, daſs folgende Bedingungs-Gleichung:

$$H = DE, \qquad (8)$$

zu der wir kommen, wenn wir $\alpha = 0$ setzen, und alsdann 2δ zwischen den Gleichungen (4) und (5) eliminiren, zwischen den Constanten der Linie dritter Ordnung besteht. In dem Falle der fünfpunctigen Osculation müssen die Gleichungen (4), (5) und (6) zugleich

Radius dieses Kreises heiſst aus diesem Grunde der Krümmungs-Halbmesser der Curve in dem gegebenen Puncte. Die 345. Nummer gibt sogleich eine Construction des Oscu-

Statt haben; wir erhalten alsdann für α, β und δ bestimmte und einzige Werthe: es gibt nur eine einzige osculirende Linie zweiter Ordnung. Soll diese Linie ein Kreis seyn, so erhalten wir, ähnlich wie eben, folgende Bedingungs-Gleichung:

$$F - D = AE, \tag{9}$$

die zugleich mit (8) bestehen muſs. Der höchstmögliche Grad der Osculation ist ein sechspunctiger, der aber nicht in jedem Puncte der gegebenen Linie dritter Ordnung Statt finden kann. Denn in diesem Falle müssen die Gleichungen (4) — (7) alle vier befriedigt werden, wodurch wir nach der Elimination von α, β und δ zu folgender Bedingungs-Gleichung zwischen den Constanten der Gleichung (1) kommen:

$$BD^4 - (F + AE)D^3 + (2AH + E^2)D^2 - 3EHD + 2H^2 = 0. \tag{10}$$

Diese Gleichung reducirt sich vermittelst der Bedingungs-Gleichungen (8) und (9) auf:

$$B = 1,$$

und diese Gleichung muſs zugleich mit (8) und (9) befriedigt werden, wenn die sechspunctig osculirende Curve ein Kreis seyn soll. Die letzte Gleichung ergibt sich unmittelbar aus (7). Wenn eine Curve des dritten Grades durch mehr als sechs, auf dem Umfange einer Linie zweiter Ordnung beliebig angenommene, Puncte, die namentlich auch in einen einzigen Punct zusammenfallen können, gehen soll, so muſs die Gleichung der letztern Curve als Factor der Gleichung der Linie dritter Ordnung erscheinen, und diese daher das System der Linie zweiter Ordnung und irgend einer geraden Linie seyn.

Bei einiger Aufmerksamkeit können wir die vorstehenden Entwicklungen auch auf die Zusammenstellung beliebiger andern Curven ausdehnen. Es können überhaupt zwei Linien der m. und n. Ordnung einen Contact von mn. Puncten haben, deren Zahl derjenigen der möglichen Durchschnitts-Puncte der beiden Curven gleichkommt. Wenn wir die Curve des m. Grades als eine gegebene betrachten, so können wir aber nur durch so viele, beliebig auf derselben angenommenen Puncte, die auch zusammenfallen können, eine Linie der n. Ordnung legen, als diese Linien Constante hat, deren Zahl $2 + 3 + .. (n+1) = \frac{n(n+3)}{1.2}$ beträgt. Diese Zahl müssen wir, wenn $m = n$ ist, damit die beiden Curven nicht zusammenfallen, noch um Eins vermindern. Es kann also auch eine Curve vom m. Grade in einem gegebenen Puncte von einer Curve des n. Grades im Allgemeinen nur $\frac{n(n+3)}{1.2}$ punctig osculirt werden. Die osculirende Curve ist alsdann vollkommen bestimmt und einzig. Es kann eine Linie des n. Grades in einem gegebenen Puncte, im Allgemeinen, von einer andern (und zwar von unendlich vielen anderen) desselben Grades höchstens $\left(\frac{n(n+3)}{1.2} - 1\right)$ punctig osculirt werden. Ist in den beiden letzten Fällen die zu osculirende Curve eine gegebene, der Osculations-Punct aber irgend ein beliebiger, so steigt der höchstmögliche Grad der Osculation um Eins. Daſs dieser Grad für gewisse Curven des m. und n. Grades in gewissen Puncten derselben bis zum mn. steigen kann, ist daraus offenbar, daſs die diesen Fall anzeigenden mn. Bedingungs-Gleichungen im Allgemeinen befriedigt

lations-Kreises. Denn da die gemeinschaftlichen Chorden einer gegebenen Linie zweiter Ordnung und aller Kreise, welche mit derselben in einem gegebenen Puncte eine gemein-

werden können, da die Zahl der Constanten der Gleichungen der beiden Curven zusammen, nemlich

$$\frac{m(m+3)}{1.2}+\frac{n(n+3)}{1.2} = mn+\frac{(m-n)^2+3(m+n)}{2},$$

grölser ist als mn.

Wenn eine Linie der n. Ordnung gegeben ist, so läſst sich durch irgend $\left(\frac{n(n+3)}{2}-1\right)$ Puncte derselben eine neue Linie derselben Ordnung legen. Diese Linie schneidet die gegebene in n^2 Puncte. Aber auch wenn diese n^2 Puncte bekannt sind, bleibt die Construction der zweiten Curve eine unbestimmte Aufgabe. Denn durch die n^2 Durchschnitte irgend zweier Curven des n. Grades, deren Gleichungen wir durch $A = o$ und $A' = o$ darstellen wollen, lassen sich unendlich viele Curven desselben Grades legen, deren allgemeine Gleichung (indem μ einen unbestimmten Coefficienten bedeutet) folgende ist: $A+\mu A' = o$. Um die zweite Curve vollständig zu bestimmen, gehört noch die Annahme irgend eines $\frac{n(n+3)}{1.2}$. Punctes, der nicht auf der ersten Curve liegt. Es folgt hieraus, daſs alle Curven des n. Grades, welche durch $\left(\frac{n(n+3)}{1.2}-1\right)$ gegebene Puncte gehen, sich auſser in diesen gegebenen Puncten noch in denselben

$$n^2-\frac{n(n+3)}{1.2}+1 = \frac{n(n-3)}{1.2}+1$$

Puncten schneiden. Also wird auch eine gegebene Curve des n. Grades von allen Curven desselben Grades, von welchen sie in einem gegebenen Puncte $\left(\frac{n(n+3)}{1.2}-1\right)$ punctig osculirt wird, in denselben $\left(\frac{n(n-3)}{1.2}+1\right)$ Puncten geschnitten. Diese Durchschnitts-Puncte können in besonderen Fällen alle oder zum Theil mit dem Osculations-Puncte zusammenfallen, alsdann kann die gegebene Curve in dem gegebenen Puncte von Curven desselben Grades nur in dem hierdurch bestimmten höhern Grade osculirt werden. Alle Curven des dritten Grades, um ein einzelnes Beispiel hervorzuheben, die eine gegebene Curve desselben Grades in einem gegebenen Puncte achtpunctig osculiren, schneiden dieselbe überdieſs noch in ein und demselben Puncte; in gewissen Puncten der gegebenen Curve kann dieselbe von einer andern neunpunctig osculirt werden; alsdann gibt es in einem solchen Puncte keine acht-, sondern nur eine neunpunctige Osculation. Hierher gehört endlich auch der Fall zweier gleichseitigen Hyperbeln, die sich in vier Puncten schneiden, und deren Gleichungen eben so viele Constante haben (295, 351).

Es gibt überhaupt, indem wir $n > m$ und $nm \overset{=}{>} \frac{n(n+3)}{1.2}$ nehmen, unendlich viele Curven des n. Grades, welche durch $\left(\frac{n(n+3)}{1.2}-1\right)$ beliebig auf dem Umfange einer gegebenen Linie des m. Grades angenommenen Puncte gehen, oder welche insbesondere die letztgenannte Linie in einem beliebig angenommenen Puncte $\left(\frac{n(n+3)}{1.2}-1\right)$ punctig osculiren.

schaftliche Tangente haben, in deren Zahl auch der verlangte Osculations-Kreis gehört, parallel sind, so brauchen wir nur irgend einen dieser Berührungs-Kreise zu construiren, und parallel mit der gemeinschaftlichen Chorde der Curve und dieses Kreises, durch den gegebenen Punct eine gerade Linie zu ziehen. Der Osculations-Kreis geht alsdann durch den Durchschnitt dieser geraden Linie mit der Curve, und ist mithin leicht zu construiren.

350. Bei derselben Axen-Bestimmung als früher sey:

$$y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\delta' x = 0, \qquad (1)$$

die Gleichung irgend einer Curve zweiter Ordnung, die wir als gegeben betrachten; alsdann können wir die Gleichungen aller Curven derselben Ordnung, welche die gegebene

Alle diese Linien der m. Ordnung schneiden die gegebene Linie der n. Ordnung überdiefs noch in denselben

$$nm-\frac{n(n+3)}{1.2}+1 = \frac{n(2m-n-3)}{2}+1$$

Puncten. Alle Curven des 9. Grades z. B., welche durch 53 beliebig auf einer gegebenen Curve des 6., 7., oder endlich des 8. Grades geht, schneiden die gegebene Curve aufserdem noch in 1, 10 oder endlich in 19 constanten Puncten.

Wir wollen noch zum Schlusse dieser Note eine allgemeine Construction des Krümmungs-Halbmessers einer Curve irgend eines beliebigen Grades in einem gegebenen Puncte derselben entwickeln. Indem wir wiederum diesen Punct zum Anfangs-Puncte und die Tangente in demselben zur zweiten Axe nehmen, sey die Gleichung der Curve:

$$y^n + ay^{n-1}x \,..\, + cx^n + dy^{n-1} + ey^{n-2}x \,..\, + gy^2 + hyx + ix^2 + kx = 0,$$

Alsdann ist offenbar, bei der Annahme rechtwinkliger Coordinaten, der Krümmungs-Halbmesser gleich $k:2g$. Es ist aber ferner, wenn wir die Abstände der Durchschnitte der Tangente und der Normalen mit der Curve (den Anfangspunct nicht mitgerechnet) durch:

$$y_1, y_2 \,\ldots\, y_{n-2}; \quad x_1, x_2 \,\ldots\, x_{n-1};$$

bezeichnen:

$$k:c = x_1 . x_2 \ldots x_{n-1}; \quad g = y_1 . y_2 \ldots y_{n-2}.$$

Es ist endlich, wenn wir durch irgend einen beliebigen Punct der Normalen eine gerade Linie der Tangente parallel ziehen, und die Abstände der Durchschnitte dieser Parallelen und der Normaten mit der Curve von jenem beliebigen Puncte durch:

$$\eta_1, \eta_2 \,\ldots\, \eta_n; \quad \xi_1, \xi_2 \,\ldots\, \xi_n;$$

bezeichnen:

$$c = \frac{\eta_1 \cdot \eta_2 \cdots \eta_n}{\xi_1 \cdot \xi_2 \cdots \xi_n},$$

und mithin der in Rede stehende Krümmungs-Halbmesser:

$$1/2 \cdot \frac{\eta_1 \cdot \eta_2 \cdots \eta_n}{\xi_1 \cdot \xi_2 \cdots \xi_n} \cdot \frac{x_1 \cdot x_2 \cdots x_{n-2} \cdot x_{n-1}}{y_1 \cdot y_2 \cdots y_{n-2}}.$$

Wir können diesen Ausdruck leicht construiren, und somit, wenn irgend eine Curve gegeben ist, in einem beliebigen Puncte derselben den Krümmungs-Halbmesser bestimmen. Nur dürfen wir hierbei nicht übersehen, dafs, um diese Construction graphisch auszuführen, alle Durchschnitte reell seyn müssen. Dieser Bestimmung können wir bei Linien dritter Ordnung immer Genüge leisten, wenn wir, was nur eine leichte Modification in die vorstehende Entwicklung bringt, statt der Normalen eine gerade Linie nehmen, welche mit der Tangente irgend einen beliebigen Winkel bildet.

im Anfangs-Puncte der Coordinaten einfach osculiren, in folgende Gleichung zusammenfassen:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta' x = 0, \qquad (2)$$

indem wir α und β als unbestimmte Coefficienten betrachten. Die letzte Gleichung kann hiernach eine Parabel, eine Ellipse mit jedem beliebigen Axen-Verhältnifs oder eine Hyperbel mit jedem beliebigen Asymptoten-Winkel darstellen. Bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten ist die Gleichung des Osculations-Kreises folgende:

$$y^2+x^2+2\delta' x = 0,$$

und hiernach ist der Krümmungs-Halbmesser gleich δ', und nach §.3 leicht zu construiren.

Wenn wir die Coordinaten-Axen irgend einem beliebigen Systeme zweier zugeordneten Durchmesser der Curve parallel nehmen, und also an die Stelle der Gleichung (1) folgende setzen:

$$y^2+\beta' x^2+2\delta' x = 0,$$

so ist, indem wir den Coordinaten-Winkel durch ξ bezeichnen, die Gleichung des Osculations-Kreises folgende:

$$y^2+2xy\cos\xi+x^2+2\delta' x = 0.$$

Dieser Kreis schneidet auf der ersten Axe, d. h. auf demjenigen Durchmesser, der durch den Berührungs-Punct geht, ein Segment $(-2\delta')$ ab, und dieses Segment ist, wenn wir die Gröfse des eben bezeichneten Durchmessers 2A und die Gröfse seines zugeordneten 2B nennen, gleich $\frac{2B^2}{A}$ (243), welchen Ausdruck man auch wohl den Parameter des erstgenannten Durchmessers nennt. Hiernach ergibt sich die gewöhnliche Construction des Osculations-Kreises.

Für den Fall der gleichseitigen Hyperbel ist die vom Osculations-Kreise auf dem durch den Osculations-Punct gehenden Durchmesser interceptirte Chorde der Länge dieses Durchmessers gleich.

Der Krümmungs-Halbmesser überhaupt ist gleich $\frac{B^2}{A\sin\xi}$.

Auch bei der Parabel ist das vom Osculations-Kreise auf dem durch den Osculations-Punct gehenden Durchmesser bestimmte Segment gleich dem Parameter dieses Durchmessers; der Krümmungs-Halbmesser ist

$$\frac{\delta'}{\sin\xi} = \frac{p}{\sin^3\xi}.$$

351. Wir wollen statt der Gleichung (2) der vorigen Nummer nun folgende nehmen:

$$y^2+2\alpha xy+\beta' x^2+2\delta' x = 0, \qquad (3)$$

welche bei einer schicklichen Annahme von α alle Linien zweiter Ordnung darstellt, die die gegebene im Anfangs-Puncte der Coordinaten osculiren und in einem constanten Puncte der ersten Axe sich schneiden. Diese Gleichung kann nicht mehr jede besondere Art von Linien zweiter Ordnung darstellen; sie bezeichnet z. B. bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten nur gleichseitige Hyperbeln, wenn die gegebene Curve eine gleichseitige Hyperbel, und also der Coefficient β' gleich (-1) ist. Solcher Hyperbeln gibt es unendlich viele, die sich alle in demselben Puncte osculiren und in demselben Puncte der ersten Axe, die senkrecht auf der Tangente im Osculations-Puncte steht, schneiden. Hieraus folgt, dafs alle gleichseitige Hyperbeln, welche sich in demselben Puncte osculiren, sich auch in demselben Puncte schneiden.

Indem wir $\beta' = 0$ setzen, stellt die Gleichung (3) unendlich viele sich in demselben Puncte osculirende Hyperbeln dar, die eine Asymptote parallel, und keinen Punct aufser dem Osculations-Puncte mit einander gemein haben. In die Reihe derselben ordnet sich eine Parabel, deren Durchmesser den parallelen Asymptoten parallel sind.

Soll die Gleichung (3), bei einer beliebigen Coordinaten-Annahme, auch die Gleichung eines Kreises in sich schliefsen, so mufs in der Gleichung der gegebenen Curve β' gleich Eins seyn. Diefs vorausgesetzt, brauchen wir alsdann, um die Gleichung des Kreises selbst zu erhalten, nur den unbestimmten Coefficienten α dem Cosinus des Coordinaten-Winkels gleich zu nehmen. Damit aber β in der Gleichung der zu osculirenden Curve gleich Eins sey, müssen die Coordinaten-Axen mit der Haupt-Axe der Curve gleiche Winkel bilden. Wenn man also in irgend einem gegebenen Puncte einer gegebenen Curve zweiter Ordnung eine Tangente (die Axe der y) legt, und durch denselben Punct eine gerade Linie (die Axe der x), welche die Axen der Curve unter denselben Winkeln schneidet, als die Tangente es thut, so begegnet diese gerade Linie der Curve in einem Puncte, durch welchen zugleich auch derjenige Kreis geht, welcher die gegebene Curve im gegebenen Puncte osculirt. Hiernach können wir diesen Kreis auf die leichteste Weise construiren.

352. Indem wir wieder von folgender Gleichung einer gegebenen Curve zweiter Ordnung ausgehen:

$$y^2+2\alpha'xy+\beta'x^2+2\delta'x = 0,$$

können wir alle diejenigen Curven, welche die gegebene im Anfangs-Puncte der Coordinaten vierpunctig osculiren, durch nachstehende Gleichung, in der β allein unbestimmt bleibt, darstellen:

$$y^2+2\alpha'xy+\beta x^2+2\delta'x = 0.$$

Diese Gleichung kann wiederum nicht alle besonderen Arten von Linien zweiter Ordnung darstellen, z. B. bei der Annahme rechtwinkliger Coordinaten keinen Kreis, als nur in dem besondern Falle, wo in der Gleichung der gegebenen Curve das zweite mit xy behaftete Glied ganz ausfällt. Diefs heifst, mit anderen Worten, dafs eine gegebene Linie zweiter Ordnung nur in den End-Puncten ihrer Axen (eine Hyperbel nur in den beiden Scheiteln der Quer-Axe, eine Parabel nur in dem Scheitel ihres Haupt-Durchmessers) mit einem Kreise einen Contact von vier Puncten haben kann.

Wenn wir die Krümmung irgend einer Curve in einem ihrer Puncte noch genauer darstellen wollen, als vermittelst des Osculations-Kreises, so können wir diefs am füglichsten vermittelst einer Osculations-Parabel. Sey insbesondere:

$$y^2+\beta x^2+2\delta x = 0,$$

die Gleichung einer Linie zweiter Ordnung, die auf einen ihrer Durchmesser und der Tangente in einem Scheitel desselben, als Coordinaten-Axen, bezogen ist: so ist:

$$y^2+2\delta x = 0,$$

die Gleichung der Osculations-Parabel; die erste Axe ist ein Durchmesser dieser Parabel, und der Parameter desselben ist gleich:

$$2\delta = \frac{2B^2}{A}.$$

353. Alle sich in demselben Puncte berührende Linien zweiter Ordnung können wir, indem wir die Coordinaten-Axen wie bisher bestimmen, durch folgende Gleichung darstellen:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta x = 0,$$

Hiernach erhalten wir für die Gleichungen zweier Durchmesser:

$$y+\alpha x = 0,$$
$$\alpha y+\beta x+\delta = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt, daſs die Mittelpuncte aller sich in demselben Puncte vierpunctig osculirenden Curven zweiter Ordnung auf einer geraden Linie liegen. Die Elimination von α zwischen den letzten beiden Gleichungen führt zu einer Gleichung des zweiten Grades in Beziehung auf y und x; es liegen also die Mittelpuncte aller derjenigen Linien zweiter Ordnung, welche sich in denselben beiden Puncten dreipunctig osculiren und schneiden, auf einer neuen Linie zweiter Ordnung. Der Ort der Mittelpuncte aller gleichseitigen Hyperbeln, die sich in demselben Puncte osculiren, ist ein Kreis.

354. Herr Poncelet gibt in den Annalen von Gergonne *), um den Vorzug der ihm eigenthümlichen, rein geometrischen, Behandlungs-Weise vor der analytischen bei der Behandlung geometrischer Aufgaben zu zeigen, unter anderen Constructionen die Construction folgender Aufgabe an:

„Wenn eine Curve zweiter Ordnung und zwei Puncte, von welchen der eine auf dem „Umfange der Curve sich befindet, der andere irgend ein beliebiger ist, gegeben sind: be„liebig viele Puncte einer andern Linie zweiter Ordnung, welche durch die beiden gege„benen Puncte geht, und in dem ersten derselben mit der gegebenen Curve einen Con„tact der dritten Ordnung hat, zu bestimmen, und zwar mit bloſser Hülfe eines Lineals."

Wir wollen nach unserer Verfahrungs-Weise eine Construction dieser Aufgabe suchen; zu diesem Ende sey wiederum wie früher:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta x = 0, \qquad (1)$$

die Gleichung irgend einer Linie zweiter Ordnung. Die Gleichung eines Systems irgend zweier geraden Linien, die durch den Anfangs-Punct der Coordinaten, also durch denjenigen Punct, in welchem die Curve von der zweiten Axe berührt wird, gehen, sey folgende:

$$y^2+(\varkappa+\varkappa')xy+\varkappa\varkappa' x^2 = 0. \qquad (2)$$

Indem wir die beiden Gleichungen (1) und (2) von einander abziehen und die resultirende Gleichung durch x dividiren, ergibt sich:

$$(2\alpha-(\varkappa+\varkappa'))y+(\beta-\varkappa\varkappa')x+2\delta = 0, \qquad (3)$$

für die Gleichung derjenigen Chorde, die diejenigen Puncte verbindet, in welchen die beiden, durch den Berührungs-Punct gehenden, geraden Linien der Curve zum zweiten Male begegnen. Wenn wir einen der drei Coefficienten α, β und γ als eine beliebig zu bestimmende Gröſse betrachten, so stellt die Gleichung (1) unendlich viele, gewissen Bedingungen unterworfene, Linien zweiter Ordnung dar, während die Gleichung (3) unendlich viele gerade Linien darstellt, die ebenfalls gewisse Bedingungen erfüllen müssen. Betrachten wir erstens α und β als unveränderlich, so bleibt die durch (3) dargestellte gerade Linie immer mit sich selbst parallel. Die Discussion dieses Falles ist in der 345. Nummer einschlieſslich enthalten.

Betrachten wir zweitens α und δ als constant, so haben alle durch (1) dargestellte Curven unter einander eine vierpunctige Osculation; die durch (3) dargestellten geraden Linien schneiden die Axe der y alle in demselben Puncte, dessen Ordinate ist:

$$y = -\frac{2\delta}{2\alpha-(\varkappa+\varkappa')}.$$

*) Gerg. Ann. VIII. p. 153.

Betrachten wir drittens β und δ als constant, so osculiren sich alle Curven dreipunctig im Anfangs-Puncte, und schneiden sich überdiefs in demselben Puncte der ersten Axe; alle gerade Linien (3) schneiden sich in demselben Puncte der ersten Axe, dessen Abscisse ist:

$$x = -\frac{2\delta}{\beta - \varkappa\varkappa}.$$

Fig. 29. 355. Der zweite Fall führt gerade zur Ponceletschen Construction der oben angeführten Aufgabe, denn die geometrische Deutung dieses Resultates gibt folgenden Satz:

Wenn man durch den Osculations-Punct mehrerer, sich in demselben Puncte vierpunctig osculirenden, Curven nach beliebiger Richtung zwei diesen Curven zum zweiten Male begegnende, gerade Linien zieht, so schneiden sich die, durch die beiden zweiten Durchschnitte auf jeder der Curven bestimmten, Chorden in demselben Puncte der gemeinschaftlichen Tangente.

In der 29. Figur ist O der Osculations-Punct zweier solcher Curven, OM und ON sind zwei beliebige durch O gehende gerade Linien, MN und M'N' die beiden Chorden, die sich in S, einem Puncte der gemeinschaftlichen Tangente, schneiden. Wenn mithin eine der beiden sich osculirenden Curven, OMN, ein Punct M' der andern und zugleich des Osculations-Punct O gegeben sind, so können wir sogleich auf einer beliebig durch O gezogenen geraden Linie ON einen neuen Punct N' der zweiten Curve bestimmen.

Wenn die beiden geraden Linien OM und ON in eine einzige zusammenfallen, wo wir, dem entsprechend, in der Gleichung (2) $\varkappa = \varkappa'$ nehmen müssen, so gehen die durch (3) dargestellten Chorden in Tangenten über. Hiernach haben wir also auch folgenden Satz:

Wenn man durch den Osculations-Punct mehrerer sich in demselben Puncte vierpunctig osculirenden Curven nach beliebiger Richtung eine diesen Curven zum zweiten Male begegnende gerade Linie zieht, so vereinigen sich die Tangenten in allen diesen zweiten Durchschnitten in ein und demselben Puncte der gemeinschaftlichen Tangente.

In der 29. Figur sey ON die beliebig durch O gelegte gerade Linie, NQ und N'Q sind alsdann zwei Tangenten, die sich in einem Puncte Q der gemeinschaftlichen Tangente OQ schneiden. Wenn also in der eben behandelten Aufgabe statt des Punctes M' eine gerade Linie QN', von der die zweite gesuchte Curve berührt werden soll, gegeben ist, so können wir die so modificirte Aufgabe auf die frühere zurückführen, indem wir auf QN' den Berührungs-Punct bestimmen. Man lege zu diesem Ende von Q aus, dem Durchschnitte von QN' und der Tangente in O, eine zweite Tangente an die gegebene Curve, von welcher diese in N berührt werde, und ziehe ON; diese gerade Linie bestimmt alsdann auf der gegebenen Tangente QN' den gesuchten Berührungs-Punct N'. Auch diese Aufgabe erfordert nur den Gebrauch eines Lineals. (311).

Fig. 30. 356. Die geometrische Deutung des dritten Falles in der 354. Nummer gibt folgenden Satz:

Wenn mehrere Linien zweiter Ordnung sich in denselben beiden Puncten dreipunctig osculiren und schneiden, und man durch den Osculations-Punct nach beliebiger Richtung zwei den Curven zum zweiten Male begegnende gerade Linien zieht, so schneiden sich die durch die zweiten Durchschnitte auf jeder dieser Curven bestimmten Chorden in demselben Puncte derjenigen geraden Linie, welche den gemeinschaftlichen Osculations- und Durchschnitts-Punct verbindet.

In der Construction der 30. Figur sind O und P der Osculations- und Durchschnitts-Punct zweier in Rede stehenden Curven, ON und OM′ zwei nach beliebiger Richtung durch O gelegte gerade Linien, und MN und M′N′ die beiden sich in S, einem Puncte der geraden Linie OP, schneidenden Chorden.

Nach dem letzten Satze können wir folgende Aufgabe construiren:

„Wenn eine Curve zweiter Ordnung, und drei Puncte, von welchen zwei auf dem „Umfange derselben sich befinden, und der dritte ein ganz beliebiger ist, gegeben sind: „beliebig viele Puncte einer neuen Curve derselben Ordnung zu finden, welche die gege-„bene in einem der beiden ersten gegebenen Puncte dreipunctig osculirt, im andern schnei-„det, und endlich noch durch den dritten gegebenen Punct geht.“

Sey nemlich OMPN die gegebene Curve, O der erste, P der zweite und M′ der dritte gegebene Punct. Man ziehe OM′ und nach beliebiger Richtung ON, von welchen beiden geraden Linien die gegebene Curve in M und N getroffen werde, man ziehe ferner MN und OP, welche einander in S begegnen, und endlich M′S, die, genugsam verlängert, die beliebig durch O gezogene gerade Linie ON in einem Puncte N′ der zu bestimmenden zweiten Curve schneidet.

Wir können leicht die zweite Curve durch eine stete Bewegung beschreiben, indem wir den Punct N auf der gegebenen Curve fortrücken lassen, wodurch der Punct S verschiedene Lagen auf OP annimmt. Eine ähnliche Bemerkung gilt für die entsprechende Consruction der vorigen Nummer. Wir können überhaupt diese Construction als einen besondern Fall der letztgegebenen ansehen. Denn, wenn sich der Punct P immer mehr dem Puncte O nähert, und endlich mit demselben zusammenfällt, so geht die dreipunctige Osculation in eine vierpunctige, und die gerade Linie OP in eine Tangente im Osculations-Puncte über.

Wenn wir annehmen, dafs die beiden geraden Linien OM′ und ON in eine einzige zusammenfallen, so erhalten wir folgenden Satz:

Wenn man durch den Osculations-Punct zweier oder mehrerer sich in denselben beiden Puncten osculirenden und schneidenden Curven zweiter Ordnung nach beliebiger Richtung eine gerade Linie zieht, welche die verschiedenen Curven zum zweiten Male schneidet, so vereinigen sich die Tangenten in diesen zweiten Durchschnitten alle in ein und demselben Puncte der durch den Osculations- und Durchschnitts-Punct gehenden geraden Linie.

In der 30. Figur vereinigen sich in Q die beiden Tangenten in N und N′

Hiernach können wir, ähnlich wie in der vorigen Nummer, die obige Aufgabe nun auch dahin modificiren, dafs statt des dritten Punctes eine gerade Linie gegeben ist, von welcher die gesuchte Curve berührt werden soll.

Wir können endlich, nach dem an die Spitze dieser Nummer gestellten Satze, ganz allgemein eine Linie zweiter Ordnung construiren, die eine gegebene in einem gegebenen Puncte osculirt und überdiefs durch irgend zwei andere gegebene Puncte geht. Sey, indem wir uns wieder auf die 30. Figur beziehen, OMN die gegebene Curve, die in O osculirt werden soll, und M′ und N′ zwei Puncte, durch welche die verlangte Curve gehen soll. Man ziehe OM′ und ON′, die der gegebenen Curve in M und N begegnen, und ziehe ferner M′N′ und MN, die sich in S, einem Puncte von OP, schneiden. Hiernach erhalten wir den Punct P, und können alsdann, nach dem Frühern, so viele Puncte der verlangten Curve finden, als wir wollen.

357. Die beiden Puncte, welche wir in den Constructionen der beiden vorigen Nummern S genannt haben, sind, nach dem Vorstehenden, constant für unendlich viele, gewissen Bedingungen unterworfene, Curven; sie sind es auch für unendlich viele Linien-Systeme, die wir nun näher bestimmen wollen. Zu diesem Ende gehen wir zur 3. Gleichung der 354. Nummer zurück:

$$(2\alpha-(\varkappa+\varkappa'))y+(\beta-\varkappa\varkappa')x+2\delta = 0, \qquad (3)$$

und betrachten in derselben α, β und δ als gegebene Coefficienten, $\varkappa$ und $\varkappa'$ aber als noch zu bestimmende Gröfsen. Diese Gleichung bezeichnet gerade Linien, welche die Axe der y, d. h. die Tangente im Anfangs-Puncte, in einem festen und unveränderlichen Puncte schneiden, wenn $(\varkappa+\varkappa')$ constant ist. Um Systeme zweier geraden Linien, die diesen Bedingungen entsprechen, zu construiren, ziehe man irgend eine gerade Linie der Tangente parallel, und bestimme auf dieser geraden Linie verschiedene Paare von Puncten, die von einem festen, beliebig angenommenen, Puncte derselben gleichweit abstehen, und verbinde endlich die Puncte jedes Paares mit dem Berührungs-Puncte. Auf diese Weise erhält man verschiedene Systeme zweier geraden Linien, die auf der Curve Chorden bestimmen, die alle in ein und demselben Puncte der Tangente sich vereinigen.

Wenn die verschiedenen durch die Gleichung (3) dargestellten geraden Linien sich in demselben Puncte der ersten Axe, die eine beliebig zu bestimmende Richtung hat, schneiden sollen, so mufs $\varkappa\varkappa'$ constant seyn. Wenn wir uns auf den Fall rechtwinkliger Coordinaten beschränken, und überdiefs:

$$\varkappa\varkappa'+1 = 0,$$

setzen, so haben wir folgenden bekannten Satz *):

Wenn man einen rechten Winkel, dessen Scheitel in irgend einem Puncte einer Linie zweiter Ordnung angenommen wird, um diesen Scheitel sich drehen läfst, so gehen die durch die Schenkel des Winkels in allen seinen verschiedenen Lagen auf der Curve bestimmten Chorden durch einen festen Punct, der auf der im beliebig angenommenen Puncte errichteten Normalen sich befindet.

Hiernach kann man, wenn irgend eine Linie zweiter Ordnung gegeben ist, in einem beliebigen Puncte derselben, mit blofser Hülfe eines rechten Winkels, die Normale construiren.

Wenn, bei den vorhin gemachten Voraussetzungen, überdiefs noch $\beta = -1$, und also die Curve eine gleichseitige Hyperbel ist, so sind alle durch (3) dargestellten Chorden unter einander und mit der Normalen parallel. Wir verweilen nicht bei der Aussage dieses Satzes, der schon in der 295. Nummer enthalten ist.

358. Wir wollen in dieser Nummer diejenigen Beziehungen aufsuchen, welche zwischen den Constanten der Gleichungen zweier Linien zweiter Ordnung Statt finden müssen, damit diese sich in zweien Puncten berühren. Zu diesem Ende nehmen wir wieder zwei Gleichungen von folgenden Formen:

$$\begin{aligned} y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta x &= 0, \\ y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\delta' x &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

*) *Théorêmes nouveaux sur les lignes et surfaces du second ordre. Par M.* Fregier. *Gerg. Ann.* VI. p. 229. Man vergleiche ferner, wegen der Verallgemeinerung des Satzes: *Gerg. Ann.* VI. p. 321 und VII. p. 95.

indem wir die beiden Curven auf eine gemeinschaftliche Tangente, als zweite, und eine beliebige, durch den Berührungs-Punct gezogene, gerade Linie, als erste Axe, beziehen. Zwischen diesen beiden Gleichungen wollen wir die mit der ersten Potenz von x behafteten Glieder eliminiren; wir brauchen zu diesem Ende nur die beiden Gleichungen von einander abzuziehen, nachdem wir die erste mit δ', die zweite mit δ multiplicirt haben. Auf diese Weise kommen wir zu folgender Gleichung:

$$(\delta'-\delta)y^2+2(\alpha\delta'-\alpha'\delta)xy+(\beta\delta'-\beta'\delta)x^2 = 0, \qquad (2)$$

die ein System zweier geraden Linien darstellt, die durch den Anfangs-Punct der Coordinaten gehen, und alle Durchschnitte der beiden Curven enthalten. In dem Falle, daſs die Curven auſser dem Berührungs-Puncte keinen Punct mehr mit einander gemein haben, stellt die letzte Gleichung nicht mehr zwei gerade Linien, sondern nur den Berührungs-Punct dar. Wir können in dem Falle, daſs die beiden Curven sich schneiden, die letzte Gleichung noch vereinfachen, indem wir die erste Axe, deren Richtung wir bisher ganz unbestimmt gelassen haben, nun durch einen der beiden Durchschnitte legen. Alsdann muſs die Gleichung (2) sich auf ihre beiden ersten Glieder reduciren und mithin in folgende übergehen:

$$(\delta'-\delta)y^2+2(\alpha\delta'-\alpha'\delta)xy = 0, \qquad (3)$$

und endlich, wenn die beiden Durchschnitte der beiden Linien zweiter Ordnung in einen einzigen zusammenfallen sollen, in folgende:

$$y^2 = 0.$$

Hiernach erhalten wir, damit die beiden durch (1) dargestellten Curven sich zwiefach berühren, indem wir als zweite Axe die Tangente in einem der Berührungs-Puncte nehmen, und die erste Axe durch die beiden Berührungs-Puncte legen, folgende beiden Bedingungs-Gleichungen zwischen den Constanten:

$$\beta\delta'-\beta'\delta = 0, \qquad \alpha\delta'-\alpha'\delta = 0, \qquad (4)$$

und diese bringen folgende dritte mit sich;

$$\alpha\beta'-\alpha'\beta = 0.$$

Dieselben Bedingungen sind auch in folgendem Ausdrucke enthalten:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\delta}{\delta'}. \qquad (5)$$

359. Sey nun:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta x = 0, \qquad (6)$$

die Gleichung einer der in der vorigen Nummer betrachteten, sich berührenden, Curven; die beiden Berührungs-Puncte liegen auf der ersten Axe, der eine im Anfangs-Puncte, die Abscisse des andern ist $\left(-\frac{2\delta}{\beta}\right)$. Für die Gleichungen zweier, durch die Berührungs-Puncte nach beliebiger Richtung gezogenen, geraden Linien können wir hiernach folgende nehmen:

$$x+\varkappa y = 0,$$

$$x+\varkappa' y+\frac{2\delta}{\beta} = 0,$$

wo $\varkappa$ und $\varkappa'$ Gröſsen sind, die von der Richtung dieser Linien abhängen, und die wir ganz unbestimmt lassen. Das System der beiden geraden Linien können wir hiernach durch folgende Gleichung darstellen:

$$\beta\varkappa\varkappa' y^2+\beta(\varkappa+\varkappa')xy+\beta x^2+2\delta\varkappa y+2\delta x = 0, \qquad (7)$$

Ziehen wir diese Gleichung von der Gleichung der Curve ab, und dividiren alsdann alle Glieder der resultirenden Gleichung durch y, so kommt:

$$(1-\beta\varkappa\varkappa')y+(2\alpha-\beta(\varkappa+\varkappa'))x-2\delta\varkappa = 0. \qquad (8)$$

Diese Gleichung stellt diejenige Chorde dar, welche durch die beiden Puncte geht, in welchen die beiden durch die Berührungs-Puncte gezogenen geraden Linien der Curve zum zweiten Male begegnen. Diese Chorde schneidet die erste Axe, d. h. diejenige gerade Linie, welche durch die beiden Berührungs-Puncte geht, in einem Puncte, dessen Abscisse ist:

$$x = \frac{2\delta\varkappa}{2\alpha-\beta(\varkappa+\varkappa')} = \frac{2\cdot\frac{\delta}{\alpha}\varkappa}{2-\frac{\beta}{\alpha}(\varkappa+\varkappa')}. \qquad (9)$$

Aus den Gleichungen (4) der vorigen Nummer geht aber hervor, dafs, wenn wir durch die Gleichung (6) (indem wir α, β und δ als unbestimmte Coefficienten betrachten) alle möglichen Curven, welche sich in denselben beiden Puncten der ersten Axe berühren, darstellen: $\frac{\delta}{\alpha}$ und $\frac{\beta}{\alpha}$ constante Werthe haben, und mithin auch für alle diese Curven der durch die Gleichung (9) bezeichnete Punct ein fester und unveränderlicher ist. Wir haben mithin folgenden Satz bewiesen:

Wenn zwei oder mehrere Linien zweiter Ordnung sich in denselben beiden Puncten berühren, und man durch die beiden Berührungs-Puncte nach beliebiger Richtung zwei gerade Linien zieht, die den verschiedenen Curven zum zweiten Male begegnen, so bestimmen diese zweiten Durchschnitte auf jeder derselben eine Chorde, die durch einen festen Punct der die Berührungen verbindenden geraden Linie geht.

Nach diesem Satze können wir mit blofser Hülfe eines Lineals folgende, den frühern analoge, Aufgabe construiren:

„Wenn eine Linie zweiter Ordnung und auf dem Umfange derselben irgend zwei „Puncte gegeben sind, beliebig viele Puncte einer andern Linie derselben Ordnung zu „finden, welche die gegebene in den beiden gegebenen Puncten berührt, und überdiefs „noch durch einen dritten gegebenen Punct geht."

Wenn statt des zweiten Berührungs-Punctes irgend ein zweiter beliebiger Punct gegeben ist, so können wir unmittelbar jenen finden, und somit die allgemeinere Aufgabe auf die vorstehende zurückführen.

Wenn Alles wie im letzten Satze bleibt, und die beiden durch die Berührungs-Puncte gezogenen geraden Linien in einem Puncte einer der Curven sich schneiden, so ordnet sich die Tangente in diesem Puncte in die Reihe der eben bezeichneten Chorden.

Man sieht sogleich ein, dafs in dem Satze der gegenwärtigen Nummer, als besonderer Fall, der Satz der 355. Nummer enthalten ist. Wir können nemlich den Osculations-Punct als einen solchen Punct ansehen, in welchem die beiden Berührungs-Puncte zusammenfallen; die Chorde, welche die letztgenannten Puncte verbindet, geht alsdann in eine Tangente über.

Fig. 31. 360. Es gehören hierher noch zwei einzelne Sätze, von welchen wir den einen unmittelbar in der Gleichung (8) lesen können. Die durch diese Gleichung dargestellte gerade Linie schneidet nemlich die zweite Axe in einem Puncte, dessen Ordinate unabhängig von α ist. Dieser Durchschnitt bleibt mithin ein constanter Punct für alle Curven,

welche die Gleichung (6) darstellt, indem wir β und δ als ein für alle Mal gegeben, α aber als durchaus beliebig betrachten; für alle Curven also, welche die zweite Axe im Anfangs-Puncte osculiren, und sich in demselben Puncte der ersten Axe schneiden. Die Abscisse dieses Durchschnittes ist $\left(-\frac{2\delta}{\beta}\right)$, und mithin stellt die Gleichung (7) zwei nach beliebiger Richtung durch den Osculations-Punct und jenen Durchschnitts-Punct gezogene gerade Linien dar. Also:

Wenn man durch den Osculations- und den Durchschnitts-Punct zweier sich dreipunctig osculirenden Linien zweiter Ordnung nach beliebiger Richtung zwei gerade Linien zieht, so vereinigen sich die durch diese Linien auf den beiden Curven bestimmten Chorden in einem Puncte der gemeinschaftlichen Tangente im Osculations-Puncte.

Dieser Satz liefert eine zweite Construction einer Linie zweiter Ordnung, welche eine gegebene OMN in einem gegebenen Puncte O osculirt, und überdiefs durch irgend zwei gegebene Puncte M′ und N′ geht. Man ziehe nemlich M′N′, die der Tangente in O im Puncte S begegnet, ferner M′O (oder N′O), welche die gegebene Curve in M (oder N) schneidet, ziehe SM (oder SN), welche derselben in m (oder n) zum zweiten Male begegnet, und endlich N′m (oder M′n), die denjenigen Punct P bestimmt, in welchem die gegebene Curve von der gesuchten geschnitten wird. Sobald dieser Punct bestimmt ist, können wir den Durchschnitt jeder durch O oder P gehenden geraden Linie mit der verlangten Curve leicht bestimmen.

361. Den zweiten Satz erhalten wir ebenfalls ohne alle Mühe. Wir nehmen

$$\left.\begin{aligned} y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\delta x &= 0,\\ y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\delta' x &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

für die Gleichungen zweier sich im Anfangs-Puncte berührenden Curven, und ziehen nach einander von jeder dieser beiden Gleichungen die Gleichung eines Systems zweier durch den Berührungs-Punct gehenden geraden Linien:

$$y^2+(\varkappa+\varkappa')xy+\varkappa\varkappa' x^2 = 0,$$

ab. Alsdann ergibt sich, wenn wir zugleich alle Glieder der resultirenden Gleichung durch x dividiren, ähnlich wie in der 354. Nummer:

$$\left.\begin{aligned} (2\alpha-(\varkappa+\varkappa'))y+(\beta-\varkappa\varkappa')x+2\delta &= 0,\\ (2\alpha'-(\varkappa+\varkappa'))y+(\beta'-\varkappa\varkappa')x+2\delta' &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

und wenn wir diese beiden Gleichungen wiederum von einander abziehen, kommt:

$$2(\alpha-\alpha')y+(\beta-\beta')x+2(\delta-\delta') = 0. \quad (3)$$

Die beiden durch (2) dargestellten Chorden schneiden sich also auf einer geraden Linie (3), welche dieselbe bleibt, wie wir auch die Richtung der beiden, durch den Berührungs-Punct gezogenen, geraden Linien bestimmen mögen, und die keine andere ist, als die gemeinschaftliche Chorde der beiden Linien zweiter Ordnung. Denn, wir kommen ebenfalls zu der Gleichung (3), indem wir die Gleichungen (1) von einander abziehen, und alle Glieder der resultirenden Gleichung durch x dividiren. Also:

Wenn man durch den Berührungs-Punct zweier sich einfach berührenden Linien zweiter Ordnung zwei gerade Linien zieht, so bestimmen diese Linien auf den beiden Curven zwei Chorden, die sich auf der gemeinschaftlichen Chorde der Curven schneiden.

Der in diesem Satze bezeichnete Durchschnitt ist ein constanter auch für alle andere Curven, welche mit den beiden gegebenen denselben Berührungs-Punct und dieselben beiden Durchschnitts-Puncte haben. Wenn wir den durch den Berührungs-Punct ge-

henden geraden Linien veränderte Richtungen geben, so bleibt jener Durchschnitt immer auf einer geraden Linie, jener gemeinschaftlichen Chorde. Diese Chorde wird eine gemeinschaftliche Tangente, wenn die beiden Curven sich zum zweiten Male berühren. Dieſs können wir leicht geradezu zeigen. Führen wir nemlich die erste Axe durch die beiden Berührungs-Puncte, so ist nach der letzten Bedingungs-Gleichung der 358. Nummer die Gleichung (3) identisch mit folgenden beiden:

$$2\alpha y+\beta x+2\delta = 0,$$
$$2\alpha' y+\beta' x+2\delta' = 0,$$

in welchen wir ohne Mühe die gemeinschaftliche Tangente der beiden gegebenen Curven im Puncte $\left(0, -\frac{2\delta}{\beta}\right)$ wiederkennen.

Man bemerkt sogleich, daſs aus dem Satze der vorigen Nummer sowol als dieser sich wiederum derjenige Satz, auf welchem die Construction der Poncelet schen Aufgabe beruht, unmittelbar ergibt; überhaupt ist unverkennbar, daſs alle bisher erhaltenen Resultate specielle Fälle eines einzigen allgemeinen Satzes sind. Die folgende Nummer wird zeigen, wie wir zu diesem Satze auf eine eben so leichte Weise gelangen, als zu jedem speciellen Falle desselben.

362. Seyen:

$$\left.\begin{array}{l} y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\gamma' y+2\delta' x+\varepsilon' = 0, \\ y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0, \end{array}\right\} \quad (1)$$

die Gleichungen zweier sich in denselben beiden Puncten der zweiten Axe schneidenden Linien zweiter Ordnung. Alsdann erhalten wir nach der ersten Nummer dieses Paragraphen:

$$2(\alpha'-\alpha)y+(\beta'-\beta)x+2(\delta'-\delta) = 0 \quad (2)$$

für die Gleichung derjenigen Chorde, welche durch die beiden übrigen (reellen oder imaginären) Durchschnitte der beiden Curven geht. Betrachten wir nun die erste Curve als ein für alle Mal gegeben, die zweite Curve aber einzig der Bedingung unterworfen, daſs sie der ersten in denselben beiden Puncten der zweiten Axe begegnet, d. h. nehmen wir α', β', γ', δ' und ε' als constant, ferner $\gamma = \gamma'$, $\varepsilon = \varepsilon'$ und also nur noch α, β und δ als unbestimmte Coefficienten: so schneiden sich alle durch (2) dargestellte Chorden in demselben Puncte der ersten Axe, über die bisher keine nähere Bestimmung getroffen worden ist, wenn in der zweiten der Gleichungen (1) auch noch β und δ constant sind. Damit aber die Bedingung erfüllt werde, daſs β, γ $(= \gamma')$, δ und ε $(= \varepsilon')$ constant seyen, müssen alle durch die eben angeführte Gleichung dargestellte Curven sich in denselben vier Puncten schneiden, und überdieſs muſs die erste Axe durch diejenigen beiden Durchschnitte gehen, welche nicht schon auf der zweiten Axe liegen. Hiermit ist folgender Satz bewiesen:

Wenn beliebig viele Linien zweiter Ordnung, die sich in denselben vier Puncten schneiden, gegeben sind, und man legt durch zwei dieser Durchschnitte eine, übrigens ganz beliebige, Linie derselben Ordnung, welche auſser der einen, allen Curven gemeinschaftlichen, Chorde mit jeder der gegebenen insbesondere noch eine zweite gemeinschaftliche Chorde hat: so gehen alle diese zweiten gemeinschaftlichen Chorden durch ein und denselben Punct, welcher zugleich auf der gemeinschaftlichen Chorde aller gegebenen Curven liegt.

Wenn wir bei drei Curven stehen bleiben, so haben wir also folgenden Satz:

Wenn irgend drei Linien zweiter Ordnung sich in denselben beiden Puncten schneiden, so vereinigen sich die, durch die übrigen Durchschnitte je zweier derselben bestimmten, drei gemeinschaftlichen Chorden in ein und demselben Puncte.

Dieser Satz ist einer der an Folgerungen reichsten in der Theorie der Linien zweiter Ordnung. Wir begnügen uns hier damit, blofs die Aussage desselben zu geben; in dem letzten Paragraphen dieses Abschnittes werden wir auf denselben zurückkommen, und bei der Discussion desselben länger verweilen.

§. 9.

Verbindung der Gleichungen zweier gegebenen Linien zweiter Ordnung zu der Gleichung einer Linie derselben Ordnung. Chordal-System. Chordal-Punct.

363. Seyen:

$$\begin{aligned} y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon &= 0, \\ y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\gamma' y+2\delta' x+\varepsilon' &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

die Gleichungen zweier gegebenen, auf irgend ein beliebiges Coordinaten-System bezogenen, Curven zweiter Ordnung. Wenn wir eine dieser Gleichungen, etwa die zweite, mit einem unbestimmten Coefficienten μ multipliciren, und alsdann zur andern addiren, so erhalten wir die allgemeine Gleichung aller derjenigen Curven derselben Ordnung, welche durch die (reellen oder imaginären) Durchschnitte der beiden gegebenen Curven gehen. Diese Gleichung nimmt, wenn wir die Coefficienten von y^2 auf Eins bringen, folgende Form an:

$$y^2+2\frac{\alpha+\mu\alpha'}{1+\mu}xy+\frac{\beta+\mu\beta'}{1+\mu}x^2+2\frac{\gamma+\mu\gamma'}{1+\mu}y+2\frac{\delta+\mu\delta'}{1+\mu}x+\frac{\varepsilon+\mu\varepsilon'}{1+\mu} = 0. \tag{2}$$

Wenn diese Gleichung ein System zweier geraden Linien oder einen Punct darstellen soll, so haben wir (234) folgende Bedingungs-Gleichung:

$$(1+\mu)(\delta+\mu\delta')^2-2(\alpha+\mu\alpha')(\gamma+\mu\gamma')(\delta+\mu\delta')+(\beta+\mu\beta')(\gamma+\mu\gamma')^2+((\alpha+\mu\alpha')^2-(1+\mu)(\beta+\mu\beta'))$$
$$(\varepsilon+\mu\varepsilon') = 0,$$

die, wenn wir entwickeln und nach den Potenzen von μ ordnen, in folgende übergeht:

$$\begin{aligned} &(\delta'^2-2\alpha'\delta'\gamma'+\beta'\gamma'^2+(\alpha'^2-\beta')\varepsilon')\mu^3+(\delta'^2+2\delta\delta'-2\alpha\gamma'\delta'-2\alpha'\gamma\delta'-2\alpha'\gamma'\delta+\beta\gamma'^2+2\beta\gamma\gamma'+(\alpha'^2-\beta')\varepsilon \\ &+2\alpha\alpha'\varepsilon'-(\beta+\beta')\varepsilon')\mu^2+(\delta^2+2\delta\delta'-2\alpha'\gamma\delta-2\alpha\gamma'\delta-2\alpha\gamma\delta'+\beta'\gamma^2+2\beta\gamma\gamma'+(\alpha^2-\beta)\varepsilon'+2\alpha\alpha'\varepsilon \\ &-(\beta+\beta')\varepsilon)\mu+(\delta^2-2\alpha\delta\gamma+\beta\gamma^2+(\alpha^2-\beta)\varepsilon) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Diese Gleichung gibt wenigstens einen reellen Werth für μ; sie reducirt sich nur dann auf den zweiten Grad, oder mit anderen Worten, eine ihrer Wurzeln wird Null oder unendlich, wenn eine der nachstehenden Gleichungen Statt findet:

$$\delta'^2-2\alpha'\delta'\gamma'+\beta'\gamma'^2+(\alpha'^2-\beta')\varepsilon' = 0,$$
$$\delta^2-2\alpha\delta\gamma+\beta\gamma^2+(\alpha^2-\beta)\varepsilon = 0,$$

d. h. wenn eine der gegebenen Linien zweiter Ordnung selbst schon ein Linien-System oder ein Punct ist.

Nach der in der 324. Nummer angewendeten Schlufs-Weise ist *a priori* ersichtlich, dafs unter den durch die allgemeine Gleichung (2) dargestellten Linien zweiter Ordnung sich immer ein System zweier reellen geraden Linien befindet, und hiernach ergeben sich,

nach der 286. und 287. Nummer, unmittelbar die nachstehenden Folgerungen. Wenn die Gleichung (3) nur einen einzigen reellen Werth für μ gibt, so haben die beiden Curven (1) nur zwei reelle Durchschnitts-Puncte, und ihre Gleichungen lassen sich nur zu der Gleichung eines einzigen Linien-Systems und nicht zu der Gleichung eines Punctes oder einer imaginären Curve verbinden. Wenn die Gleichung (3) drei reelle Wurzeln hat, so sind die Durchschnitts-Puncte der beiden gegebenen Curven alle vier reell oder alle vier imaginär; im ersten Falle sind in der allgemeinen Gleichung die Gleichungen dreier Linien-Systeme, im zweiten Falle die Gleichungen eines Linien-Systems und zweier Puncte enthalten. Wenn die Gleichung (3) zwei gleiche Wurzeln hat, so müssen zwei der vier Durchschnitts-Puncte der beiden gegebenen Curven zusammenfallen und mithin diese Curven sich berühren; wenn diese Gleichung drei gleiche Wurzeln hat, so müssen die beiden gegebenen Curven sich dreipunctig osculiren. Wenn ein resultirendes System aus zwei Parallellinien bestehen soll, so muſs eine Wurzel der Gleichung (3) folgenden Ausdruck annulliren:

$$(\alpha+\mu\alpha')^2-(1+\mu)(\beta+\mu\beta');$$

geschieht dieſs von zweien gleichen Wurzeln dieser Gleichung, so berühren sich die beiden gegebenen Curven zweimal. Diese doppelte Berührung kann aber auch, wenn wir uns diesen Ausdruck erlauben dürfen, imaginär werden; was dann Statt findet, wenn die Elimination von y und x zwischen den beiden gegebenen Gleichungen (1) zu solchen Gleichungen in x und y führt, die zwei Paar gleicher imaginären Wurzeln haben. Man überzeugt sich leicht, daſs in diesem Falle in der allgemeinen Gleichung (2) die Gleichungen zweier identischen Systeme von zwei zusammenfallenden Parallellinien und eines Punctes, und zwar des Poles derjenigen geraden Linie, in welche jene Parallellinien zusammenfallen, enthalten sind. Der Uebergang von der wirklichen zur imaginären doppelten Berührung bezeichnet die vierpunctige Osculation; die Gleichungen zweier sich vierpunctig osculirenden Curven zweiter Ordnung lassen sich zu den Gleichungen dreier identischen Systeme von zwei in die Tangente im Osculations-Puncte zusammenfallenden Parallellinien verbinden.

Wir nennen jedes derjenigen Systeme von zwei geraden Linien, zu dessen Gleichung wir durch Verbindung der Gleichungen zweier Curven zweiter Ordnung gelangen können, ein Chordal-System der beiden Curven, und diejenigen beiden Puncte, welche an die Stelle zweier dieser Chordal-Systeme treten können, Chordal-Puncte.

364. Indem wir für μ eine Wurzel der Gleichung (3) nehmen, erhält die Gleichung (2) folgende Form:

$$y^2+(\xi+\xi')xy+\xi\xi x^2+(\zeta+\zeta')y+(\xi\zeta'+\xi'\zeta)x+\zeta\zeta' = 0,$$

und wir haben alsdann:

$$2\frac{\alpha+\mu\alpha'}{1+\mu} = \xi+\xi',$$

$$\frac{\beta+\mu\beta'}{1+\mu} = \xi\xi',$$

$$2\frac{\gamma+\mu\gamma'}{1+\mu} = \zeta+\zeta',$$

$$2\frac{\delta+\mu\delta'}{1+\mu} = \xi\zeta'+\xi'\zeta,$$

$$\frac{\varepsilon+\mu\varepsilon'}{1+\mu} = \zeta\zeta'.$$

Die Elimination von ξ, ξ', ζ und ζ' zwischen diesen fünf Gleichungen führt wiederum zur Gleichung (3) zurück.

In den nächsten beiden Nummern wollen wir beispielsweise zeigen, wie wir aus diesen Gleichungen, ähnlich, wie es im 8. Paragraphen geschehen ist, geometrische Resultate herleiten können.

365. Wir wollen zu diesem Ende die dritte der letzten fünf Gleichungen betrachten, nemlich folgende:

$$2\frac{\gamma+\mu\gamma'}{1+\mu} = \zeta+\zeta'.$$

Aus dieser Gleichung verschwindet μ, wenn wir $\gamma = \gamma'$ setzen, und wir erhalten alsdann:

$$2\gamma = 2\gamma' = \zeta+\zeta'. \tag{4}$$

Wir kommen auf dieselbe Weise noch zu einem allgemeinern Resultate, wenn wir für μ irgend einen beliebigen Werth nehmen, so daſs die Gleichung (2) irgend eine derjenigen Curven, welche durch die vier Durchschnitte der beiden gegebenen (1) gehen, darstellt. Indem wir diese Gleichung folgendermaſsen schreiben:

$$y^2+2\alpha''xy + \beta''x^2+2\gamma''y+2\delta''x+\varepsilon'' = 0,$$

ergibt sich:

$$\frac{\gamma+\mu\gamma'}{1+\mu} = \gamma'',$$

und mithin, wenn wir, wie vorhin, $\gamma = \gamma'$ setzen:

$$\gamma = \gamma' = \gamma''.$$

Wenn wir bei der Deutung dieses Resultates nur auf denjenigen Fall Rücksicht nehmen, daſs die zweite Axe den Curven wirklich begegne, so erhalten wir folgenden Satz:

Wenn eine gerade Linie zwei gegebene Linien zweiter Ordnung so schneidet, daſs die Mitten der auf ihr interceptirten Chorden beider Curven zusammenfallen, und also zwischen den beiden Curven gleiche Segmente der geraden Linie liegen, so liegen auch gleiche Segmente derselben zwischen je zwei anderen Curven, welche durch die (reellen oder imaginären) Durchschnitte der beiden gegebenen Curven gehen.

Die Construction der 32. Figur bezieht sich auf den besonderen Fall der Gleichung (4), wo die resultirende Curve ein System von zwei geraden Linien ist. NN′ nemlich ist eine gerade Linie, die den beiden Curven in M, M′ und N, N′ so begegnet, daſs MN = M′N′. Diese beiden Curven schneiden einander in den vier Puncten A, B, C und D; verbinden wir diese Puncte, paarweise genommen, (was auf dreifache Weise geschehen kann,) durch zwei gerade Linien, AB und CD, die der geraden Linie NN′ in den Puncten S und S′ begegnen, so ist MS = M′S′. Fig. 32.

Wir gehen hier in kein ausführliches Detail ein, wie wir es in der 298. Nummer in Beziehung auf denjenigen Fall gethan haben, wo eine der gegebenen Linien zweiter Ordnung ein System zweier geraden Linien ist, und bemerken nur noch, daſs wir auch drei Linien-Systeme zusammenstellen können.

366. Als zweites Beispiel wollen wir die beiden Gleichungen: Fig. 33.

$$2\frac{\gamma+\mu\gamma'}{1+\mu} = \zeta+\zeta',$$

$$\frac{\varepsilon+\mu\varepsilon'}{1+\mu} = \zeta\zeta',$$

in Verbindung mit einander, näher betrachten. Wenn wir γ, ε, γ', ε' und ζ als gegeben ansehen, so sind diese beiden Gleichungen zur Bestimmung von μ und ζ' hinreichend. ζ bezeichnet die Ordinate des Durchschnittes S einer Chordalen CF der beiden gegebenen Curven CEK und ABE mit der zweiten Axe; ζ' die Ordinate des Durchschnittes S' der zugehörigen Chordalen DE mit derselben Axe. Wir wollen nun die eine der gegebenen Curven, etwa die erste CEK, als ein für alle Mal gegeben betrachten, neben der zweiten ABE aber irgend eine dritte ABK bestimmen, welche die zweite Axe, über die durchaus keine nähere Bestimmung getroffen ist, in denselben beiden (reellen oder imaginären) Puncten A und B schneidet, als die zweite Curve, und welche überdiefs mit der ersten Curve eine Chordale GH hat, die durch den Punct (ζ, o) oder S geht. Alsdann haben wir dieselben Werthe für γ, ε, γ', ε' und ζ und mithin auch für ζ': gleichviel, ob wir die erste Curve mit der zweiten oder dritten zusammenstellen. Es schneiden sich also auch die mit CF und GH zusammengehörigen Chordalen DE und LK in demselben Puncte S' der zweiten Axe AB, die eine Chordale der zweiten und dritten Curve ist.

Wir können die dritte Curve ABK construiren, indem wir durch irgend einen Punct S, der auf einer Chordalen CF der beiden ersten Curven CEK und ABE liegt, nach beliebiger Richtung zwei gerade Linien SH und SB ziehen, von welchen die eine der ersten Curve in G und H, die andere der zweiten Curve in A und B begegne, und alsdann irgend eine Linie zweiter Ordnung durch die vier Puncte G, H, A und B legen.

Um der Aussage des eben bewiesenen Satzes die bequemste und allgemeinste Form zu geben, wollen wir die drei gegebenen Curven als irgend drei gegebene betrachten, die blofs der Bedingung unterworfen sind, dafs drei Chordalen dreier Chordal-Systeme je zweier derselben, z. B. GH, CF und AB, durch denselben Punct S gehen. Alsdann vereinigen sich in S' ebenfalls drei Chordalen, und da die Beziehung der drei Curven zu einander durchaus dieselbe ist, so schneiden sich auch noch in zweien anderen Puncten S'' und S''' drei Chordalen. Also:

Wenn drei Chordalen je zweier dreier Linien zweiter Ordnung sich in demselben Puncte schneiden, so bilden diese drei Chordalen und die drei zugehörigen ein Viereck mit seinen beiden Diagonalen, so dafs also in jedem Winkel-Puncte dieses Vierecks drei Chordalen sich vereinigen.

Wenn die drei erstgenannten Chordalen unter einander parallel sind, so liegt ein Winkel-Punct des Vierecks unendlich weit. Wenn unter den drei in Rede stehenden Linien zweiter Ordnung sich zwei einander ähnliche befinden, so liegt eine der sechs Chordalen, und also liegen auch zwei Winkel-Puncte des obigen Vierecks, unendlich weit, oder, mit anderen Worten, die beiden Chordal-Systeme der beiden ähnlichen Curven, zusammengestellt mit der beliebigen dritten, bilden ein Parallelogramm, dessen eine Diagonale die Chordale der beiden ähnlichen Curven ist. Wenn durch den Durchschnitt der drei sich in demselben Puncte schneidenden Chordalen noch eine vierte Chordale geht, so fallen die vier Winkel-Puncte des obigen Vierecks in einen einzigen Punct zusammen, so dafs also in diesem Falle alle sechs Chordalen durch denselben Punct gehen.

Wenn man die letzten Bemerkungen berücksichtigt, und überdiefs erwägt, dafs die drei zusammengestellten Linien zweiter Ordnung, paarweise genommen, in mannigfacher Beziehung zu einander stehen, z. B. sich einfach und zwiefach berühren, sich drei- und vierpunctig osculiren können, und dafs man ferner auch zwei Curven mit einem Systeme zweier geraden Linien, eine Curve mit zweien Systemen und endlich drei Systeme zusam-

menstellen kann, so ist offenbar, wie eine lange Reihe von einzelnen Sätzen und Constructionen unmittelbar aus dem allgemeinen Satze sich ergibt. In den folgenden Nummern wollen wir beispielsweise bei einem besondern Falle länger verweilen.

367. Wir wollen nemlich zwei Linien zweiter Ordnung betrachten, zwischen denen eine zwiefache Berührung Statt findet. Wenn man aus irgend einem Puncte Q derjenigen geraden Linie, welche durch die beiden Berührungs-Puncte M und M' geht, und in welche zwei Chordalen der beiden Curven zusammenfallen, zwei gerade Linien QH und QF zieht, von welchen die erste der einen Curve in G und H, die zweite der andern Curve in E und F begegnet, so schneidet jede dritte Linie zweiter Ordnung, welche durch die vier Puncte G, H, E und F geht, jede der beiden gegebenen noch in solchen zwei Puncten, die mit dem Puncte Q in gerader Linie liegen. In der bezüglichen Figur, wo für die dritte Linie zweiter Ordnung ein System zweier geraden Linien PA und PB genommen ist, sind A und B, C und D diese mit Q in gerader Linie liegenden Durchschnitts-Puncte. Fig. 34.

Wenn wir ferner die eine Curve, für welche wir die äufsere nehmen wollen, als ursprünglich gegeben und die beiden Puncte E und F als zwei feste und unveränderliche Puncte betrachten, so können wir zwei gerade Linien PA und PB construiren, welche durch E und F gehen und der gegebenen Curve in den vier Puncten A, B, G und H so begegnen, dafs zwei durch diese vier Puncte gezogene gerade Linien sich auf EF schneiden. Wir brauchen zu diesem Ende nur den Pol der durch E und F gelegten geraden Linie in Beziehung auf die gegebene Curve zu construiren, und diesen Pol, den Punct P, mit den beiden Puncten E und F durch zwei gerade Linien zu verbinden; alsdann erhalten wir die vier Durchschnitte A, B, G und H, und sowohl AB und GH, als auch AH und BG schneiden sich auf EF (306), erstere Linien im Puncte Q, letztere in Q'. Da die eben construirte Aufgabe also eine durchaus bestimmte ist, und wir zwei Durchschnitts-Puncte Q und Q' erhalten; von der andern Seite aber durch E und F unendlich viele Curven gehen, welche die gegebene zweimal berühren, so haben wir folgenden Satz bewiesen, auf den wir auch später noch zurückkommen werden:

Wenn irgend eine Linie zweiter Ordnung und zwei Puncte gegeben sind, und beliebig viele andere Linien derselben Ordnung die gegebene zweimal berühren, und überdiefs durch die beiden gegebenen Puncte gehen, so gehen alle Berührungs-Chorden durch einen von zwei festen Puncten derjenigen geraden Linie, welche die beiden gegebenen Puncte verbindet.

368. Wir können, nach der vorigen Nummer, wenn zwei Linien zweiter Ordnung sich zweimal berühren, einen Punct der Berührungs-Chorde finden, in der Voraussetzung, dafs nur eine dieser Curven gegeben ist und von der andern zwei Puncte E und F bekannt sind. Die letztgenannte Curve ist alsdann vollständig bestimmt, wenn wir noch die Bedingung hinzufügen, dafs die beiden Berührungs-Puncte in einen einzigen zusammenfallen, oder, mit anderen Worten, die beiden Curven sich vierpunctig osculiren sollen. Alsdann liegen nemlich die beiden Puncte Q und Q', deren Construction eben angezeigt worden ist, auf der Tangente im Osculations-Puncte. Den Osculations-Punct finden wir also, indem wir von Q oder Q' eine Tangente an die gegebene Curve legen, und mithin (355) können wir folgende Aufgabe construiren:

Eine Linie zweiter Ordnung zu beschreiben, die eine gegebene vierpunctig osculirt, und überdiefs durch zwei gegebene Puncte geht.

Wenn einer der beiden gegebenen Puncte E und F innerhalb, der andere aufserhalb der gegebenen Curve liegt, so ist offenbar, dafs eine der beiden geraden Linien, PE und PF, der Curve nicht begegnet, und mithin die Aufgabe unmöglich wird. Wenn in dem Falle, dafs die Puncte E und F beide innerhalb oder beide aufserhalb liegen, die durch diese beiden Puncte gehende gerade Linie EF der Curve begegnet, so liegt der Pol P derselben aufserhalb der Curve, und mithin (P, Q und Q′ sind drei zugeordnete Puncte) fällt einer der beiden Constructions-Puncte Q und Q′ aufserhalb, der andere innerhalb. Liegen die Puncte E und F beide innerhalb, so erhalten wir unmittelbar die beiden Puncte Q und Q′, und von einem derselben können wir zwei Tangenten an die gegebene Curve legen; liegen E und F beide aufserhalb, so begegnet keine der beiden durch P, den Pol von EF, gezogenen geraden Linien der Curve, nichts desto weniger bleiben die beiden Puncte Q und Q′ reell (diese Puncte sind diejenigen, zu deren Gleichungen sich die Gleichungen des Systems der beiden geraden Linien PE und PF und der gegebenen Curve verbinden lassen (384)), und von einem derselben lassen sich zwei Tangenten an die gegebene Curve legen; in diesen Fällen gestattet also obige Aufgabe zwei Auflösungen. Wenn endlich die durch E und F gehende gerade Linie der gegebenen Curve nicht begegnet, so liegt der Pol derselben innerhalb, mithin sind die vier Durchschnitts-Puncte A, B, G und H alle vier reell, und die Puncte Q und Q′ liegen beide aufserhalb, so dafs wir von jedem derselben zwei Tangenten an die gegebene Curve legen können: es gibt also in diesem Falle vier verschiedene Curven, welche den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten.

369. Wir können ferner nach der 367. Nummer auch folgende Aufgabe construiren:

Eine Linie zweiter Ordnung zu beschreiben, welche eine gegebene Linie derselben Ordnung zweimal berührt, und überdiefs durch drei gegebene Puncte geht.

Seyen D, E und F die drei gegebenen Puncte, durch welche eine Linie zweiter Ordnung gelegt werden soll, die die gegebene ABHG zweimal berührt. Wir können, indem wir zwei der drei gegebenen Puncte, E und F, nehmen, wie bisher die beiden Constructions-Puncte Q und Q′ finden; eben so können wir für eine andere Zusammenstellung zweier der drei gegebenen Puncte, etwa für D und E, zwei den Puncten Q und Q′ entsprechende Puncte, die wir, ohne die Construction auszuführen, hier R und R′ nennen wollen, bestimmen. Wenn wir alsdann die beiden Puncte Q und Q′ mit den beiden Puncten R und R′ durch vier gerade Linien QR, QR′, Q′R und Q′R′ verbinden, so erhalten wir die Berührungs-Chorden derjenigen vier Curven, welche den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten. Wenn die gegebene Curve von einer der letztbezeichneten geraden Linie, etwa von QR, geschnitten wird, so wird dieselbe von der bezüglichen Constructions-Curve wirklich in zwei Puncten berührt; wenn sie von jener geraden Linie QR berührt wird, so findet eine vierpunctige Osculation statt, und endlich, wenn sie von QR gar nicht getroffen wird, wird die doppelte Berührung, während die verlangte Curve selbst reell bleibt, imaginär. Fassen wir diese Fälle alle drei unter dem Namen der doppelten Berührung zusammen, so sind die Auflösungen der Aufgabe immer reell, falls nur die drei gegebenen Puncte alle drei innerhalb oder alle drei aufserhalb liegen. Wenn einer dieser Puncte auf der Curve selbst liegt, gibt es zwei Auflösungen; wenn zwei Puncte auf derselben liegen, nur eine einzige Auflösung. In nähere Determinationen gehen wir hier nicht ein.

Da wir auf dreifache Weise die drei gegebenen Puncte D, E und F paarweise zusammenstellen können, so erhalten wir neben Q, Q′, R und R′ noch zwei entsprechende Puncte. Von diesen sechs Puncten können wir viermal drei nehmen, welche in gerader Linie liegen.

370. Wenn die beiden gegebenen Puncte, die wir E und F genannt haben, aufserhalb der gegebenen Curve liegen, so können wir unmittelbar Linien-Systeme construiren, die in die Reihe derjenigen Linien zweiter Ordnung gehören, welche durch die beiden gegebenen Puncte gehen und die gegebene Curve zweimal berühren; wir brauchen nemlich zu diesem Ende nur irgend zwei Tangenten durch die beiden gegebenen Puncte zu legen. Wir erhalten hiernach vier solcher Linien-Systeme und vier Berührungs-Chorden, die sich, paarweise genommen, in den beiden festen Puncten Q und Q′ der durch E und F gehenden geraden Linie schneiden. Hiernach erhalten wir eine neue Construction dieser Puncte.

Die in der 367. Nummer angezeigte Construction der Puncte Q und Q′ wird in dem Falle, dafs die gegebene Curve ein System zweier geraden Linien ist, illusorisch. Die eben angezeigte Construction wird es in diesem Falle auch; doch können wir hier durch eine leichte Modification diesem Mangel abhelfen. Zu dieser Modification führt uns die Bemerkung, dafs die Constructions-Puncte Q und Q′ dieselben bleiben, wenn wir statt der gegebenen Curve irgend eine andere nehmen, welche durch diejenigen beiden Puncte e und f geht, in welchen die gegebene Curve von der durch E und F gehenden geraden Linie geschnitten wird. Diefs ist eine Folge davon, dafs die Lage von Q und Q′ einzig von der Lage der vier Puncte E, F, e und f und nicht von der Natur der gegebenen Curve abhängt. Da nemlich PQ′ die Polare von Q sowohl in Beziehung auf die gegebene Curve ABHG ist, als auch in Beziehung auf CDFE, und jede andere, welche durch E und F geht, und die gegebene Curve zweimal berührt, so sind (309) die Puncte Q und Q′ dadurch vollkommen bestimmt, dafs die durch die gegebenen Puncte gehende gerade Linie sowohl in Q, Q′, E und F, als auch in Q, Q′, e und f harmonisch geschnitten wird, wonach die directe Bestimmung derselben in der Construction einer quadratischen Gleichung besteht. Dafs aber PQ′ die Polare von Q in Beziehung auf beide Curven ABHG und CDFE ist, ergibt sich daraus, dafs AH und BG, CF und ED sich in zwei Puncten Q′ und q schneiden, die mit P, dem Durchschnitte von AG und BH, in gerader Linie liegen (64).

371. *Eine Linie zweiter Ordnung zu beschreiben, die zwei gegebene gerade Linien berührt und überdiefs durch drei gegebene Puncte geht.* Fig. 35, 36.

Die beiden geraden Linien, die wir als eine Linie zweiter Ordnung, die zweimal berührt werden soll, betrachten, seyen AB und AC, zwei der drei gegebenen Puncte E und F, und wir wollen erstens annehmen, dafs diese Puncte wie in der 35. Figur aufserhalb des von AB und AC gebildeten Winkels liegen. Diefs vorausgesetzt, ziehe man EF, wovon die beiden gegebenen geraden Linien in e und f geschnitten werden, und lege durch e und f irgend einen Kreis. An diesen Kreis construire man zwei Tangenten von jedem der beiden gegebenen Puncte aus, welche denselben in U und V, W und T berühren. Verbindet man diese vier Berührungs-Puncte durch die vier geraden Linien TU, WV, UW und VT, so schneiden sich die beiden ersten dieser geraden Linien in Q, die beiden letzten in Q′.

Wenn wir statt der beiden Puncte E und F einen derselben und den dritten gegebenen Punct nehmen und für diese Puncte die eben angezeigte Construction wiederholen, so erhalten wir zwei neue den Puncten Q und Q′ entsprechende Puncte, die wir R und R′ nennen wollen. Jede der vier durch Q und R, Q und R′, Q′ und R und durch Q′ und R′ gezogenen geraden Linien bestimmt auf den beiden gegebenen zwei solche Puncte, in welchen eine der vier, den Forderungen der Aufgabe genügenden, Curven diese Linien berührt.

Wenn zweitens die beiden Puncte E und F, wie in der 36. Figur, innerhalb des Winkels BAC liegen, so brauchen wir nur in der Construction des eben behandelten Falles die Puncte E und F mit den Puncten e und f zu vertauschen; d. h. einen Kreis durch E und F zu legen, und an denselben durch e und f Tangenten zu ziehen. Das Uebrige der Construction bleibt gerade wie vorhin. Wir können zur Erleichterung derselben den durch E und F gelegten Kreis so bestimmen, daſs er zugleich durch den dritten gegebenen Punct geht.

In den beiden Constructionen der 35. und 36. Figur ergibt sich unmittelbar nach bekannten Sätzen (310), daſs Q, Q′, E und F sowohl als Q, Q′, e und f harmonische Theilungs-Puncte sind.

Fig. 35, 36. 372. *Eine Linie zweiter Ordnung zu beschreiben, die drei gegebene gerade Linien berührt, und überdieſs durch zwei gegebene Puncte geht.*

Seyen E und F wiederum die beiden gegebenen Puncte und AB und AC zwei der drei gegebenen geraden Linien, die wir, mit einander verbunden, als eine Linie zweiter Ordnung betrachten. Alsdann bestimmen sich, wie in der vorigen Nummer, die beiden Constructions-Puncte Q und Q′. Indem wir nach einander die dritte gegebene gerade Linie mit AB und AC zusammenstellen, erhalten wir auf der, durch die beiden gegebenen Puncte E und F gehenden, geraden Linien gerade auf dieselbe Weise noch zwei Paar anderer Puncte, die den Puncten Q und Q′ entsprechen, und die wir R und R′, S und S′ nennen wollen. Drei der so bestimmten sechs Puncte liegen zwischen E und F, so wie zwischen e und f, und für diese drei Puncte wollen wir Q′, R′ und S′ nehmen. Es sind im Allgemeinen vier Curven möglich, die den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten; die drei Berührungs-Chorden jeder derselben gehen durch drei jener sechs in gerader Linie liegenden Puncte. Wenn die gegebenen Puncte beide innerhalb des von den drei gegebenen geraden Linien gebildeten Dreiecks oder innerhalb ein und desselben der drei von diesen Linien nach drei Seiten hin begränzten unendlichen Flächen-Räumen sich befinden, und mithin auf einer Ellipse, Parabel oder demselben Hyperbel-Zweige liegen: so erhalten wir folgende Zusammenstellung für jene viermal drei Puncte:

Q, R, S; Q, R′, S′; Q′, R, S′; Q′, R′, S.

Wenn aber die beiden gegebenen Puncte in zweien von zwei der drei geraden Linien gebildeten Scheitel-Winkeln liegen, und überdieſs zu beiden Seiten der dritten dieser Linien, in welchem Falle die zu construirenden Curven Hyperbeln sind und die beiden gegebenen Puncte auf beiden Zweigen derselben liegen: so haben wir statt des letztern Schema folgendes:

Q′, R′, S′; Q′, R, S; Q, R′, S; Q, R, S′.

Die Construction unserer Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, in ein gegebenes Dreieck eine Linie zweiter Ordnung so zu beschreiben, daſs die drei Berührungs Chorden durch drei bekannte, in gerader Linie liegende, Puncte gehen. Durch zwei dieser drei

Puncte ist die Aufgabe bestimmt. Folgende Bemerkung führt zur Construction derselben. In der 35. Figur wird FQ in F, Q', E und Q harmónisch geschnitten; eben so wird also jede andere durch F, den Durchschnitt der Tangenten in T und W, gehende gerade Linie von den beiden Berührungs-Chorden TV und WV und von der Tangente in V harmonisch geschnitten. Ist daher der Punct F, irgend ein Punct Q der Berührungs-Chorde WV und die Tangente in V bekannt, so können wir auf FQ denjenigen Punct Q' leicht construiren, der zugleich auf der Berührungs-Chorde TV liegt. Die letztgenannte Berührungs-Chorde ist also vollkommen bestimmt, wenn wir schon einen Punct derselben kennen. Hiernach ergibt sich folgende Construction der an die Spitze dieser Nummer gestellten Aufgabe.

Seyen (Fig. 37) AB, AC und BC die drei gegebenen geraden Linien, E und F die beiden gegebenen Puncte und Q, Q', R, R', S und S' die sechs auf EF liegenden Constructions-Puncte. Man ziehe QB, von der AC in D geschnitten werde, suche (nach 64) zu B, D und Q den vierten harmonischen Theilungs-Punct O, und verbinde diesen Punct durch zwei gerade Linien mit S und S'. Alsdann bestimmen diese beiden Linien auf AC und BC diejenigen Puncte N' und N'', M' und M'', in welchen zwei der vier gesuchten Curven diese Linien berühren, und zwar diejenigen beiden Curven, deren drei Berührungs-Chorden durch Q, R, S und durch Q, R', S' gehen. Fig. 37.

373. In je zweien der vier Combinationen dreier Puncte in jedem beliebigen der beiden Schemata der vorigen Nummer kommt ein Punct zweimal vor, so z. B. in den beiden Combinationen Q, R, S und Q, R', S' der Punct Q. Hieraus folgt, daſs zwei sich entsprechende Berührungs-Chorden, MM' und NN', zweier der durch E und F gehenden und in das Dreieck ABC beschriebenen Curven die durch E und F gehende gerade Linie in demselben Puncte Q schneiden. Die beiden in der 37. Figur construirten Curven MM'M'' und NN'N'' schneiden sich aber (was jedesmal geschieht) noch in zweien anderen Puncten G und H, die wir auch, ohne daſs irgend etwas in der Construction sich ändert, statt E und F als ursprünglich gegeben betrachten können. Es schneiden sich also wiederum zwei Berührungs-Chorden in demselben Puncte der durch G und H gehenden geraden Linie. Es ist leicht einzusehen, daſs diese beiden Berührungs-Chorden keine anderen sind, als MM' und NN', und daſs mithin diese beiden Linien, so wie EF und GH, alle vier, durch denselben Punct, durch Q, den Mittelpunct eines Chordal-Systems der beiden eingeschriebenen Curven, gehen. Eben so schneiden sich FG, EH, MM'' und NN'' in P, und EG, FH, M'M'' und N'N'' in O. Also: Fig. 37

Wenn zwei Linien zweiter Ordnung in ein gegebenes Dreieck beschrieben sind, so schneiden sich die entsprechenden Berührungs-Chorden der beiden Curven in denjenigen drei Puncten, welche die Mittelpuncte der drei Chordal-Systeme dieser Curven, und mithin zugeordnete Pole in Beziehung auf jede derselben sind.

374. Wir wollen der in der 366. Nummer angewandten Art der Beweisführung eine noch etwas gröſsere Ausdehnung geben. Wenn wiederum die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon &= 0, \\ y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\gamma' y+2\delta' x+\varepsilon' &= 0, \qquad (1) \\ y^2+2\alpha'' xy+\beta'' x^2+2\gamma'' y+2\delta'' x+\varepsilon'' &= 0, \end{aligned}$$

drei durch dieselben vier Puncte gehende Linien zweiter Ordnung darstellen, so haben wir folgende beiden Gleichungen:

$$\frac{\gamma+\mu\gamma'}{1+\mu} = \gamma'', \qquad \frac{\varepsilon+\mu\varepsilon'}{1+\mu} = \varepsilon'',$$

wo μ, wie früher, einen unbestimmten Coefficienten bezeichnet. Wenn wir zu diesen beiden Gleichungen noch eine Bedingungs-Gleichung, für welche wir nachstehende nehmen wollen:

$$\gamma''^2 - \varepsilon'' = 0, \qquad (2)$$

hinzufügen, so sind μ, ε'' und γ'' durchaus bestimmt, wenn wir γ, ε, γ' und ε' als gegeben betrachten. γ und ε behalten dieselben Werthe, so lange die erste Curve durch zwei feste Puncte geht, und wir durch diese beiden Puncte die zweite Axe legen. Die Bedingungs-Gleichung (2) findet Statt, wenn die dritte Curve diese Axe berührt. Die zweite Curve, und mithin γ' und ε', wollen wir als gegeben betrachten. Hierin liegt folgender Satz:

Wenn zwei Linien zweiter Ordnung von einer dritten geschnitten werden, so lassen sich durch die beidesmaligen vier Durchschnitte zwei Paar Linien derselben Ordnung legen, welche eine Chordale der beiden erstgenannten berühren: die beiden Berührungs-Puncte sind für beide Paare dieselben.

Wir gehen hier in kein Detail ein.

375. Wir wollen in dieser Nummer die beiden Gleichungen:

$$\frac{\alpha+\mu\alpha'}{1+\mu} = \alpha'', \qquad \frac{\beta+\mu\beta'}{1+\mu} = \beta'', \qquad (3)$$

welche zwischen den beiden ersten Constanten der Gleichungen (1) und dem unbestimmten Coefficienten μ Statt finden müssen, mit einer Bedingungs-Gleichung zwischen α'' und β'' zusammenstellen, und für diese Bedingungs-Gleichung folgende nehmen:

$$\alpha''^2 - \beta'' = 0, \qquad (4)$$

d. h. voraussetzen, daſs die dritte Curve eine Parabel sey. Sobald wir α, β, α' und β' als gegeben betrachten, sind die vorstehenden drei Gleichungen zur Bestimmung von μ, α'' und β'' hinreichend. α und β oder α' und β' behalten aber dieselben Werthe, wenn wir die erste oder zweite Curve mit irgend einer andern, ihr ähnlichen und ähnlich liegenden, vertauschen. Hiernach ergibt sich folgender Satz:

Die Durchmesser aller Parabeln, welche sich durch die jedesmaligen vier Durchschnitte irgend einer von mehreren unter einander ähnlichen Linien zweiter Ordnung mit anderen, ebenfalls unter einander ähnlichen, Linien derselben Ordnung legen lassen, haben eine bestimmte Richtung.

Da durch vier Puncte sich zwei Parabeln legen lassen, ist diese Richtung eine zwiefache.

Wenn die eine Curve von der andern zweimal berührt wird, so berührt die entsprechende Parabel beide in denselben beiden Puncten, und die Richtung ihrer Durchmesser ist durch diejenige gerade Linie, welche durch die Mittelpuncte der beiden Curven und die Mitte der Berührungs-Chorde geht, bestimmt.

Als unter einander ähnliche Linien zweiter Ordnung können wir verschiedene Systeme von zwei geraden Linien nehmen, die eine bestimmte Richtung haben. Wenn nur eine Curve zweiter Ordnung gegeben ist, und wir auf derselben vier Puncte beliebig annehmen, so können wir diese Puncte durch zwei gerade Linien, die wir als eine Linie zweiter Ordnung betrachten, verbinden. Alsdann ist offenbar, daſs wir vier diesem Linien-Systeme ähnliche Linien zweiter Ordnung erhalten, wenn wir um die gegebene Curve ein Parallelogramm beschreiben, dessen Seiten jenen beiden geraden Linien des

Systems parallel sind, und von den vier Seiten desselben je zwei, an einander anstofsende, zusammenstellen. Die Richtung der Durchmesser der beiden, durch die vier angenommenen Puncte gehenden, Parabeln ist durch die beiden Diagonalen dieses Parallelogrammes bestimmt. Da diese beiden Diagonalen in dem Mittelpuncte der gegebenen Curve sich schneiden, und wir die vier gegebenen Puncte auf dreifache Weise durch zwei gerade Linien verbinden können, so haben wir indirect folgenden Satz bewiesen:

Wenn in eine gegebene Linie zweiter Ordnung irgend ein Viereck beschrieben ist, und wir beschreiben um dieselbe drei Parallelogramme, deren Seiten den beiden Paaren gegenüberliegender Seiten und den beiden Diagonalen des eingeschriebenen Vierecks parallel sind, so liegen die Winkel-Puncte derselben auf denselben beiden Durchmessern der gegebenen Curve, und mithin sind die Seiten der drei eingeschriebenen Parallelogramme, die diesen umgeschriebenen entsprechen, parallel.

376. Statt der Gleichung (4) können wir jede andere Bedingungs-Gleichung zwischen α'' und β'' mit den beiden Gleichungen (3) zusammenstellen, und finden alsdann, übrigens ganz bei denselben Voraussetzungen als bisher, dafs α'' und β'' constant sind, d. h. die resultirenden Curven alle dasselbe Axen-Verhältnifs und eine ähnliche Lage haben. Wir wollen denjenigen Fall noch hervorheben, wo folgender Ausdruck:

$$\frac{(1+\beta'') - (4\alpha''^2+(1-\beta'')^2)^{1/2}}{(1+\beta'')+(4\alpha''^2+(1-\beta'')^2)^{1/2}},$$

einer gegebenen Gröfse gleich gesetzt wird, d. h. wo, bei der Annahme rechtwinklicher Coordinaten, das Axen-Verhältnifs der resultirenden Curven ein gegebenes ist (251). Diesem Falle entspricht folgender Satz:

Wenn zwei Reihen unter einander ähnlicher und ähnlich liegender Curven zweiter Ordnung gegeben sind, so haben diejenigen Curven von gegebenem Axen-Verhältnifs, welche sich durch die Durchschnitte je zweier, aus beiden Reihen genommenen, Curven legen lassen, ebenfalls eine ähnliche Lage.

Nach diesem Satze können wir folgende Aufgabe construiren:

Durch vier gegebene Puncte eine Linie zweiter Ordnung von gegebenem Axen-Verhältnifs zu legen.

Wenn wir nemlich voraussetzen, dafs durch die vier gegebenen Puncte irgend eine Linie zweiter Ordnung gehe, so können wir um diese Curve ein Parallelogramm beschreiben, dessen Seiten zweien geraden Linien parallel sind, die die gegebenen Puncte, paarweise genommen, mit einander verbinden. Alsdann bezeichnen die beiden Diagonalen dieses Parallelogrammes die Richtungen zweier zugeordneten Durchmesser der in Rede stehenden Curve so wie jeder andern, welche dieselbe in den beiden auf jener Berührungs-Chorde liegenden Puncten, berührt. Hiernach folgt aus dem letzten Satze, dafs jene Richtungen auch die Richtungen zweier zugeordneten Durchmesser j e d e r durch die vier gegebenen Puncte gehenden Linie zweiter Ordnung sind.

Diese beiden zugeordneten Durchmesser sind den Durchmessern der beiden, durch die vier gegebenen Puncte gehenden, Parabeln parallel.

Wenn wir statt der, durch die vier gegebenen Puncte gehenden, Curve durch diese Puncte ein Linien-System legen, so erhalten wir die Richtungen jener beiden zugeordneten Durchmesser, indem wir die Gleichungen des eben bezeichneten Linien-Systems und eines zweiten, dessen beide gerade Linien denen eines der beiden übrigen, durch die vier

gegebenen Puncte gehenden, Systeme parallel sind, zu den Gleichungen zweier zusammenfallenden geraden Linien verbinden. Nehmen wir zu diesem Ende für die Gleichungen der beiden Linien-Systeme, die denselben Mittelpunct haben müssen:

$$xy = 0, \qquad y^2+(\varkappa+\varkappa')xy+\varkappa\varkappa'x^2 = 0,$$

so ergeben sich aus der Verbindung derselben, folgende beiden, in eine einzige zusammengezogenen, Gleichungen:

$$(y\pm\sqrt{\varkappa\varkappa'}.x)^2 = 0.$$

Hiernach sind die beiden in Rede stehenden Durchmesser den, durch die beiden Gleichungen:

$$y = \sqrt{\varkappa\varkappa'}.x, \qquad y = -\sqrt{\varkappa\varkappa'}.x,$$

gegebenen, und sehr leicht zu construirenden, geraden Linien parallel.

Es ist zugleich aus der Form der letzten beiden Gleichungen ersichtlich, dafs, wenn wir (was auf dreifache Art geschehen kann) durch die vier gegebenen Puncte zwei gerade Linien und durch den Durchschnitt derselben noch zwei andere parallel mit jenen beiden zugeordneten Durchmessern ziehen: von diesen vier geraden Linien jede beliebige gerade Linie harmonisch geschnitten wird. Wir hätten hiernach auch in der 370. Nummer die beiden Puncte Q und Q' construiren können.

Wenn das Verhältnifs der beiden Axen ein gegebenes ist, so ergibt sich, nach den Entwicklungen des 2. Paragraphen dieses Abschnittes, das Verhältnifs derjenigen zugeordneten Durchmesser, die irgend einen gegebenen Winkel mit einander bilden. Hiernach ist also die vorstehende Aufgabe auf die Aufgabe der 284. Nummer zurückgeführt. Sie gestattet, da die Richtung der gröfsern und kleinern Axe insbesondere nicht näher bestimmt ist, eine doppelte Auflösung.

Wenn die vier gegebenen Puncte auf dem Umfange eines Kreises liegen, so müssen die beiden Durchmesser, deren Richtung wir oben bestimmt haben, nothwendig auf einander senkrecht stehen. Im Allgemeinen müssen die von jenen Durchmessern gebildeten Winkel denjenigen Winkeln gleich seyn, welche von den gleichen Durchmessern derjenigen durch die vier gegebenen Puncte gehenden Ellipse, deren Axen-Verhältnifs der Einheit am nächsten kommt, gebildet werden. Von der andern Seite läfst sich durch vier gegebene Puncte keine Hyperbel legen, deren Asymptoten-Winkel mehr von einem rechten Winkel abweicht, als diejenigen Winkel, welche die beiden zugeordneten Durchmesser, deren Richtung dieselbe für alle durch jene vier Puncte gehende Linien zweiter Ordnung ist, einschliefsen. Hiernach erhalten wir als besondere Fälle die Constructionen folgender beiden Aufgaben:

„Durch vier gegebene Puncte diejenige Ellipse zu legen, welche dem Kreise am näch-
„sten kommt, und diejenige Hyperbel, deren Asymptoten-Winkel ein *maximum* oder
„*minimum* ist.“

Der Nerv der letzten Beweisführungen liegt in vorstehenden Beispielen so offen am Tage, dafs es überflüfsig wäre, bei diesem Gegenstande noch länger zu verweilen.

377. Seyen (264):

$$\left.\begin{array}{l} y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0, \\ y^2+2\alpha' xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0, \end{array}\right\} \quad (1)$$

die Gleichungen irgend zweier Linien zweiter Ordnung, bezogen auf zwei gerade Linien, die durch die vier Durchschnitte derselben gehen, und sey:

$$y = ax+b, \quad (2)$$

die Gleichung irgend einer geraden Linie. Alsdann sind (244):

$$(\alpha+a)y+(\beta+\alpha a)x+(\delta+\gamma a) = 0,$$
$$(\alpha'+a)y+(\beta+\alpha' a)x+(\delta+\gamma a) = 0, \quad (3)$$

die Gleichungen derjenigen Durchmesser beider Curven, welche die der gegebenen geraden Linie parallelen Chorden halbiren. Ziehen wir diese beiden Gleichungen von einander ab, so wird $(\alpha-\alpha')$ gemeinschaftlicher Factor, nach dessen Hinweglassung wir folgende Gleichung erhalten:

$$y+ax = 0. \quad (4)$$

Diese Gleichung ist von α und α' unabhängig, und bleibt also dieselbe für je zwei beliebige Curven, welche durch die (reellen oder imaginären) Durchschnitte der beiden gegebenen gehen.

Wir wollen ferner zwischen der ersten Gleichung bei (3) und der Gleichung (4) a eliminiren. Zu diesem Ende multipliciren wir zuvörderst die letztgenannte Gleichung mit α, und ziehen alsdann dieselbe von der ersten ab; hiernach bleibt:

$$ay+\beta x+\delta+\gamma a = 0,$$

und wenn wir für a seinen Werth $\left(-\frac{y}{x}\right)$ substituiren, kommt:

$$y^2-\beta x^2+\gamma y-\delta x = 0.$$

In dieser Gleichung erkennen wir sogleich die Gleichung des geometrischen Ortes für die Mittelpuncte aller derjenigen Linien zweiter Ordnung, die durch die (reellen oder imaginären) Durchschnitte der beiden gegebenen Curven gehen, wieder (326). Also:

Wenn irgend zwei Linien zweiter Ordnung oder mehrere derselben, welche ein gemeinschaftliches Chordal-System haben, gegeben sind, und man zieht nach beliebiger Richtung eine gerade Linie, so laufen diejenigen Durchmesser der verschiedenen Curven, deren zugeordnete dieser geraden Linie parallel sind, in demselben Puncte zusammen. Der geometrische Ort dieser Puncte, für alle verschiedenen Richtungen der beliebig gezogenen geraden Linie, ist diejenige Linie zweiter Ordnung, welche die Mittelpuncte aller derjenigen enthält, welche dasselbe Chordal-System haben.

Der erste Theil dieses Satzes ist bekannt *). In der nächsten Nummer wollen wir dem Beweis desselben, der ebenfalls schon in der 365. Nummer enthalten ist, noch eine andere Form geben.

378. Sey:

$$\mu y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0, \quad (1)$$

die Gleichung irgend einer Linie zweiter Ordnung. Wir können diese Gleichung, indem wir jeden Coefficienten beliebig in zwei Theile zerlegen, folgendermaafsen schreiben:

$$(\mu' y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\gamma' y+2\delta' x+\varepsilon')+(\mu'' y^2+2\alpha'' xy+\beta'' x^2+2\gamma'' y+2\delta'' x+\varepsilon'') = 0;$$

wonach wir also folgende Gleichungen haben:

$$\mu'+\mu'' = \mu, \quad \alpha'+\alpha'' = \alpha, \quad \beta'+\beta'' = \beta, \quad \gamma'+\gamma'' = \gamma, \quad \delta'+\delta'' = \delta, \quad \varepsilon'+\varepsilon'' = \varepsilon.$$

Bei dieser Voraussetzung drücken:

$$\mu' y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2+2\gamma' y+2\delta' x+\varepsilon' = 0,$$
$$\mu'' y^2+2\alpha'' xy+\beta'' x^2+2\gamma'' y+2\delta'' x+\varepsilon'' = 0, \quad (2)$$

je zwei mögliche Linien zweiter Ordnung aus, welche sich auf der gegebenen schneiden.

Diejenigen Durchmesser der drei Curven (1) und (2), deren Ordinaten der zweiten Axe parallel sind, werden durch folgende Gleichungen:

*) Gerg. Ann. VII, p. 229.

$$\mu y + \alpha x + \gamma = 0,$$
$$\mu' y + \alpha' x + \gamma' = 0,$$
$$\mu'' y + \alpha'' x + \gamma'' = 0,$$

dargestellt. Addiren wir die beiden letzten dieser Gleichungen, so erhalten wir die erste. Da über die zweite Axe durchaus keine nähere Bestimmung gemacht worden ist, so ist obiger Satz bewiesen.

Fig. 38. 379. Da zu den durch vier gegebene Puncte M, M', M'' und M''' gehenden Linien zweiter Ordnung drei Systeme von zwei geraden Linien gehören, so ist in dem Vorstehenden beiläufig ein Satz vom Viereck enthalten. Wenn nemlich AB' irgend eine gerade Linie ist, die den beiden Paaren gegenüberstehender Seiten und den beiden Diagonalen eines gegebenen Vierecks in A und B, A' und B', A'' und B'' begegnet, so laufen diejenigen drei geraden Linien, welche einerseits durch die drei Durchschnitte der beiden Paare gegenüberstehender Seiten und der beiden Diagonalen, durch P, Q und O, und andrerseits durch die Mitten von AB, A'B' und A''B'', durch C, C' und C'', gehen, in ein und demselben Puncte S zusammen. Der Punct S ist also leicht durch den Durchschnitt zweier von diesen drei geraden Linien zu construiren.

Wenn fünf Puncte gegeben sind, so können wir dieselbe auf fünf verschiedene Arten zu vier combiniren, und erhalten also, wenn wir wie eben construiren, in Beziehung auf jede gegebene gerade Linie, fünf in gerader Linie liegende Puncte. Die so bestimmte neue gerade Linie ist derjenige Durchmesser der durch die fünf gegebenen Puncte gehenden Linie zweiter Ordnung, dessen zugeordneter Durchmesser der gegebenen geraden Linie parallel ist. Durch die Construction von zwei jener fünf in gerader Linie liegenden Puncte ist also die Aufgabe direct gelöset: wenn eine Linie zweiter Ordnung durch fünf Puncte gegeben ist, denjenigen Durchmesser derselben zu bestimmen, dessen zugeordneter einer gegebenen geraden Linie parallel ist.

Wenn wir der gegebenen geraden Linie irgend eine andere Richtung geben, so erhalten wir fünf auf einer neuen geraden Linie liegende Puncte. Alle solche gerade Linien schneiden sich in einem constanten Puncte, dem Mittelpuncte der durch die fünf gegebenen Puncte bestimmten Linie zweiter Ordnung.

Wir können nach dem Vorstehenden auch eine Linie zweiter Ordnung construiren, wenn vier Puncte derselben und die Richtung zweier zugeordneten Durchmesser gegeben sind. Wenn nemlich M, M', M'' und M''' die vier gegebenen Puncte sind, und AB' die Richtung des einen zugeordneten Durchmessers anzeigt, so geht der zugeordnete durch den Constructions-Punct S, und ist mithin vollkommen bestimmt. Die Aufgabe gestattet nur eine einzige Auflösung, kann aber nach der 376. Nummer unbestimmt seyn.

380. Bei denselben Bestimmungen als in der 378. Nummer erhalten wir:

$$\begin{aligned} 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon &= 0, \\ 2\gamma' y + 2\delta' x + \varepsilon' &= 0, \\ 2\gamma'' y + 2\delta'' x + \varepsilon'' &= 0; \end{aligned} \quad (3) \qquad \begin{aligned} \gamma y + \delta x + \varepsilon &= 0, \\ \gamma' y + \delta' x + \varepsilon' &= 0, \\ \gamma'' y + \delta'' x + \varepsilon'' &= 0; \end{aligned} \quad (4)$$

für die Gleichungen der drei Asymptoten-Chorden des Anfangs-Punctes (d. h. derjenigen geraden Linien, die durch die beiden Durchschnitte jeder der drei Curven (1) und (2) mit zweien, den Asymptoten derselben parallelen, und durch den Anfangs-Punct gehenden geraden Linien bestimmt werden), und der drei Polaren desselben. Jede der Gleichungen (3) und (4) ist eine Folge der beiden andern. Wir haben also, da der Anfangs-Punct der Coordinaten jeder beliebige seyn kann, folgende beiden Sätze bewiesen:

Wenn mehrere Linien zweiter Ordnung sich in denselben vier Puncten schneiden, und man durch irgend einen beliebigen Punct den Asymptoten jeder derselben zwei gerade Linien parallel zieht, so vereinigen sich diejenigen Chorden, welche durch die beiden auf jeder Linie zweiter Ordnung auf diese Weise bestimmten Durchschnitte gehen, in ein und demselben Puncte.

Wenn mehrere Linien zweiter Ordnung sich in denselben vier Puncten schneiden, so gehen die Polaren jedes beliebig angenommenen Punctes auf allen diesen Linien zweiter Ordnung durch ein und denselben Punct.

381. In Beziehung auf den letztern Satz wollen wir in ein ausführlicheres Detail eingehen, und zu diesem Ende, wie in der 377. Nummer, zwei jener Curven betrachten und ihre Gleichungen auf ein gemeinschaftliches Chordal-System beziehen. Diese Gleichungen seyen:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$
$$y^2+2\alpha' xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

wonach wir für die Polaren irgend eines Punctes (y', x') folgende Gleichungen erhalten:

$$(y'+\alpha x'+\gamma)y+(\alpha y'+\beta x'+\delta)x+\gamma y'+\delta x'+\varepsilon = 0,$$
$$(y'+\alpha' x'+\gamma)y+(\alpha' y'+\beta x'+\delta)x+\gamma y'+\delta x'+\varepsilon = 0. \quad (1)$$

Ziehen wir diese letzten beiden Gleichungen von einander ab, so kommt, wenn wir zugleich durch $(\alpha-\alpha')$ dividiren:

$$x'y+y'x = 0. \quad (2)$$

Hieraus folgt (was auch, indem wenigstens ein Linien-System in die Reihe der in Rede stehenden Linien zweiter Ordnung gehört, *a priori* ersichtlich ist (268)), daſs diejenige gerade Linie, welche durch den Punct (y', x') und denjenigen Punct geht, in welchem sich die Polaren von (y' x') schneiden, von den beiden Coordinaten-Axen, d. h. von zwei zusammengehörigen Chordalen, harmonisch geschnitten wird.

Hiernach kann man, wenn eine Chordale irgend zweier Linien zweiter Ordnung gegeben ist, die zugehörige Chordale finden. Man lege nemlich zu diesem Ende von irgend einem beliebigen Puncte an die beiden Curven Tangenten, und ziehe die beiden Berührungs-Chorden. Den Durchschnitt dieser beiden Chorden und den beliebig angenommenen Punct verbinde man durch eine gerade Linie, und suche zu diesen beiden Puncten und demjenigen, in welcher die letztgezogene gerade Linie der gegebenen Chordalen begegnet, den vierten harmonischen Theilungs-Punct. Der so bestimmte Punct gehört der gesuchten Chordalen an, zu deren vollständigen Bestimmung man die eben angezeigte Construction nur noch einmal zu wiederholen braucht.

Diese Construction können wir noch verschiedenfach modificiren und vereinfachen. Wenn wir z. B. annehmen, der beliebige Punct liege auf einer gegebenen geraden Linie in unendlicher Entfernung, so sind die beiden Polaren dieses Punctes diejenigen Durchmesser der beiden Curven, deren zugeordnete der gegebenen geraden Linie parallel sind. (Hiernach erscheint der erste Theil des Satzes der 377. Nummer als ein besonderer Fall des letztern Satzes der vorigen Nummer.) Ziehen wir also durch den Durchschnitt der beiden Durchmesser der gegebenen geraden Linie eine andere parallel, so ist, da ein harmonischer Theilungs-Punct unendlich weit liegt, dieser Durchschnitt die Mitte des auf der letztgezogenen geraden Linie von den beiden Chordalen interceptirten Stückes.

Wir können für den beliebigen Punct auch den Mittelpunct einer der beiden Curven nehmen. Alsdann ergibt sich, ähnlich wie eben, daſs die durch jenen Mittelpunct mit

der Polaren desselben auf der andern Curve parallel gezogene, und von zweien zusammengehörigen Chordalen begränzte, gerade Linie in jenem Puncte halbirt wird.

Wenn wir endlich den beliebigen Punct auf einer der Curven selbst annehmen, so wird die Tangente in diesem Puncte von der Polaren desselben auf der zweiten Curve und von je zwei zusammengehörigen Chordalen harmonisch geschnitten.

Nach dem Vorstehenden sind die Chordal-Systeme zweier Linien zweiter Ordnung dadurch bestimmt, dafs sie drei gerade Linien, auf deren jeder zwei Puncte gegeben sind, harmonisch schneiden (die drei geraden Linien können parallel genommen werden); oder auch dadurch, dafs sie drei gerade Linien (die aber alsdann nicht mehr parallel genommen werden können) so schneiden, dafs die von ihnen auf denselben interceptirten Stücke in drei gegebenen Puncten halbirt werden.

382. Da sowol jede der Gleichungen (1), als auch die Gleichung (2) der vorigen Nummer, in Beziehung auch y', x' und y, x symmetrisch sind, so folgt, dafs die Beziehung des beliebig angenommenen Punctes (y', x') und des Constructions-Punctes (y, x) zu einander eine durchaus gegenseitige ist.

Wenn der angenommene Punct in eine der Coordinaten-Axen fällt, und also y' oder x' verschwindet, so geht die Gleichung (2) über in $y = o$ oder $x = o$, d. h. in die Gleichung derselben Axe, auf welcher der angenommene Punct liegt. Also:

Wenn man von irgend einem Puncte einer gemeinschaftlichen (reellen oder idealen) Chorde zweier oder mehrerer Curven zweiter Ordnung Tangenten an dieselben legt, so schneiden sich die Berührungs-Chorden in einem zweiten Puncte derselben gemeinschaftlichen Chorde.

Die Chorde wird in diesen beiden Puncten und ihren Durchschnitten mit der Curve harmonisch getheilt.

Wenn wir in dem letzten Satze mehrere Linien zweiter Ordnung zusammenstellen, so brauchen dieselben nur eine gemeinschaftliche Chorde zu haben. Diefs ist sogleich aus den Gleichungen (1) der vorigen Nummer ersichtlich, in denen β und δ ausfällt, indem wir zugleich $x' = o$ und $x = o$ setzen.

Wenn wir zugleich $y' = o$ und $x' = o$ setzen, so werden die beiden Gleichungen (1) identisch: die beiden Polaren des Mittelpunctes eines Chordal-Systems fallen in eine einzige gerade Linie zusammen.

§. 10.

Allgemeine Schemata.

383. Wir wollen, der Kürze halber, die Gleichungen dreier Linien zweiter Ordnung durch folgende Symbole bezeichnen:

$$A = o, \quad A' = o, \quad A'' = o;$$

wir wollen ferner voraussetzen, dafs diese drei Linien zweiter Ordnung eine gemeinschaftliche (reelle oder ideale) Chorde haben, deren Gleichung wir durch

$$c = o$$

darstellen, so wie die Gleichungen der zweiten gemeinschaftlichen (reellen oder idealen) Chorde der ersten und zweiten, der ersten und dritten und der zweiten und dritten Linie zweiter Ordnung durch:

$$a'' = o, \quad a' = o, \quad a = o.$$

Alsdann erhalten wir, indem μ'', μ' und μ gehörig zu bestimmende Coefficienten bedeuten, folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} A - \mu'' A' &= c.a'' = o, \\ A - \mu' A'' &= c.a' = o, \\ A' - \mu A'' &= c.a = o. \end{aligned} \quad (1)$$

Wenn wir die beiden ersten dieser drei Gleichungen von einander abziehen, so kommt:

$$\mu'' A' - \mu' A'' = c(a' - a'') = o.$$

Die Form dieser Gleichung zeigt, dafs dieselbe ein System zweier geraden Linien, von welchen eine die gemeinschaftliche Chorde der drei Linien zweiter Ordnung ist, darstellt, und dafs sie mithin mit der letzten der Gleichungen (1) identisch ist. Hieraus folgt:

$$\mu = \frac{\mu'}{\mu''}, \qquad a = \frac{a' - a''}{\mu''}.$$

Aus dem letzten dieser beiden Ausdrücke erhellet, dafs die zweiten gemeinschaftlichen Chorden je zweier der drei Linien zweiter Ordnung sich in demselben Puncte schneiden. Also:

Wenn irgend drei Linien zweiter Ordnung eine gemeinschaftliche (reelle oder imaginäre) Chorde haben, so vereinigen sich die zugehörigen Chorden je zweier derselben, alle drei, in ein und demselben Puncte (362).

Wir wollen die Discussion der einzelnen Fälle dieses Satzes mehr andeuten als ausführen. Zuerst können wir für die in Rede stehenden drei Linien zweiter Ordnung drei wirkliche Curven nehmen; ferner auch, wenn wir voraussetzen, dafs die beiden ersten Curven sich wirklich schneiden oder sich berühren, statt der dritten Curve ein System von zwei geraden Linien, die durch zwei Durchschnitts-Puncte gehen oder sich im Berührungs-Puncte schneiden, und alsdann auch in eine einzige gerade Linie zusammenfallen können. Wenn man also durch jeden von zwei Durchschnitten zweier Linien zweiter Ordnung (welche Durchschnitte auch in einen Berührungs-Punct zusammenfallen können) nach beliebiger Richtung eine gerade Linie zieht, so ist der Ort für die Durchschnitte derjenigen beiden Chorden, welche auf den beiden Curven durch jene beiden geraden Linien bestimmt werden, eine neue gerade Linie, und zwar die zweite Chordale desjenigen Chordal-Systems, das durch obige beiden Durchschnitte bestimmt wird. Hiernach kann man (Fig. 39.) die zweite Chordale zweier sich in zwei Puncten M und m schneidenden Curven mit blofser Hülfe eines Lineals construiren. Zu diesem Ende ziehe man durch die beiden Durchschnitts-Puncte nach beliebiger Richtung zwei gerade Linien NN' und nn', welche der einen Curve in N und n, der andern in N' und n' begegnen, alsdann schneiden sich Nn und N'n' in einem Puncte L der gesuchten Chordalen. Auf dieselbe Weise erhalten wir einen zweiten Punct derselben und somit diese Linie selbst. Fig. 39.

Wenn wir annehmen, dafs zwei der drei in Rede stehenden Curven sich vierpunctig oder dreipunctig osculiren oder zweimal berühren, so bestimmt jede beliebige dritte Curve, die die beiden ersten im Osculations-Puncte oder in einem der beiden Berührungs-Puncte berührt, auf diesen beiden Curven zwei Chorden, die sich auf der Tangente im Osculations-Puncte, oder derjenigen geraden Linie, die den Osculations-Punct mit dem Durchschnitts-Puncte verbindet, oder endlich auf der Tangente im zweiten Berührungs-Puncte

schneiden. Wenn man ferner durch den Osculations- und Durchschnitts-Punct zweier sich dreipunctig osculirenden Curven, oder durch die Berührungs-Puncte zweier sich zweimal berührenden Curven, irgend eine dritte Curve legt, so bestimmt dieselbe auf den beiden erstern zwei Chorden, die sich auf der Tangente im Osculations-Puncte oder auf der Berührungs-Chorde schneiden.

Wenn wir für die dritte Curve in den vorstehenden Resultaten ein System von zwei geraden Linien nehmen, so erhalten wir die Entwicklungen der 354. — 356. und der 358. — 361. Nummer.

Wenn wir annehmen, dafs zwei der drei in Rede stehenden Linien zweiter Ordnung unter einander ähnlich sind, so liegt ihre zweite Chordale unendlich weit entfernt, mithin sind die beiden auf denselben durch die dritte Curve bestimmten Chordalen parallel. Bei diesem Falle haben wir mit einiger Ausführlichkeit schon in der 345. Nummer verweilt.

Fig. 17. Wir können ferner eine beliebige Curve mit zwei Systemen von zwei geraden Linien zusammenstellen, und erhalten alsdann den Satz vom eingeschriebenen Sechseck (292) und die verschiedenen Modificationen desselben für die besonderen Fälle, dafs Winkel-Puncte desselben zusammenfallen. Wenn wir uns nämlich wiederum auf die 17. Figur beziehen, so haben die beiden Linien-Systeme $M'''M'$ und $M''M$, $M_{'''}M$ und $M_{''}M'$ mit der Curve die gemeinschaftliche Chorde MM', die drei zweiten Chorden sind AB, $M''M'''$ und $M_{''}M_{'''}$. Diese drei Linien schneiden sich also in demselben Puncte, oder, was dasselbe heifst, der Durchschnitt der letztgenannten beiden Chorden, D, liegt mit A und B in gerader Linie.

Wenn wir endlich drei Systeme von zwei geraden Linien zusammenstellen, so erhalten wir unmittelbar die Sätze der 70. — 76. Nummer.

Der Nerv der Beweisführung in dieser Nummer liegt darin, dafs, wenn wir die beiden ersten der Gleichungen (1) von einander abziehen, die resultirende Gleichung wiederum ein System zweier geraden Linien darstellt. Diefs wird in dem vorstehenden Falle dadurch bedingt, dafs in diesen beiden Gleichungen ein gemeinschaftlicher Factor des ersten Grades, c, vorkommt. Aber auch wenn diese beiden Gleichungen die Form vollständiger Quadrate annehmen, läfst sich diejenige Gleichung, die wir durch Abziehen derselben von einander erhalten, in zwei Factoren des ersten Grades zerlegen. Diese Bemerkung führt uns zu einem zweiten Schema.

384. Seyen wiederum:

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = 0,$$

die Gleichungen dreier Linien zweiter Ordnung; die erste dieser Linien berühre die zweite und dritte jede zweimal, und die dadurch bestimmten Berührungs-Chorden seyen durch die Gleichungen:

$$p = 0, \quad q = 0,$$

dargestellt. Alsdann haben wir folgende beiden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} A-\mu'A' &= p^2 = 0, \\ A-\mu''A'' &= q^2 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

und, indem wir abziehen, ergibt sich:

$$\mu'A'-\mu''A'' = q^2-p^2 = (q+p)(q-p) = 0. \qquad (2)$$

Diese Gleichung bezeichnet ein Chordal-System der zweiten und dritten Linie zweiter Ordnung; vergleichen wir dieselbe mit folgender Gleichung:

$$A'-\mu A'' = a.a' = 0,$$

indem die beiden Chordalen durch

$$a = o, \quad a' = o,$$

dargestellt werden, so erhalten wir:

$$\mu = \frac{\mu''}{\mu'}, \quad a.a' = \frac{1}{\mu'}(q+p)(q-p),$$

mithin, indem wir durch ξ und ξ' zwei unbestimmte Coefficienten bezeichnen, deren Product gleich ist μ':

$$\xi a = q+p, \quad \xi' a' = q-p,$$

woraus ersichtlich ist, daſs die geraden Linien:

$$p = o, \quad q = o, \quad a = o, \quad a' = o,$$

alle vier durch denselben Punct gehen. Wir haben also folgenden Satz, den wir auch unmittelbar an die 367. Nummer hätten anknüpfen können, bewiesen:

Wenn zwei Linien zweiter Ordnung beide von einer dritten zweimal berührt werden, so schneiden sich die beiden Berührungs-Chorden in dem Mittelpuncte eines Chordal-Systems der beiden erstgenannten Linien zweiter Ordnung.

Die doppelte Berührung kann durch vierpunctige Osculation hindurch in eine imaginäre übergehen. Andere Modificationen ergeben sich nach der verschiedenen Natur der zusammengestellten Linien zweiter Ordnung. Wir können zuvörderst ein System zweier geraden Linien nehmen, die von irgend zwei Curven berührt werden; wenn wir beliebig viele Curven nehmen, die jene beiden geraden Linien berühren, und überdieſs durch irgend zwei feste Puncte gehen, oder überhaupt eine gemeinschaftliche Chordale haben, so gehen alle Berührungs-Chorden durch einen festen Punct. Wir können ferner voraussetzen, daſs ein gegebenes Linien-System von einer Curve und von irgend einem zweiten Linien-System zweimal berührt werde *), und kommen alsdann unmittelbar zu der allgemeinen Theorie der Pole und Polaren (306). Wenn wir eine Curve betrachten, welche von zwei Paar gerader Linien berührt wird, so erhalten wir den Newtonschen Satz vom umschriebenen Viereck (310). Wir können endlich auch eine Curve nehmen, die von einer andern zweimal, und überdieſs noch von zwei geraden Linien berührt wird. Dieser letzte Fall liefert die Construction folgender Aufgabe:

„Eine Linie zweiter Ordnung zu beschreiben, die eine gegebene vierpunctig osculirt, „und überdieſs zwei gegebene gerade Linien berührt."

Wir können nemlich diese Aufgabe als aufgelöset betrachten, wenn wir den Osculations-Punct bestimmt haben (355). Um diesen zu finden, verbinde man die vier Durchschnitte der beiden geraden Linien und der Curve noch durch zwei Paar gerader Linien, und lege von den Durchschnitten der Linien jedes Paares Tangenten an die gegebene

*) Wir sagen von zwei Linien-Systemen, der Analogie nach, daſs sie einander berühren, wenn alle vier Linien in demselben Puncte sich schneiden. In der Uebertragung des allgemeinen Satzes auf diesen besondern Fall liegt durchaus nichts Gewagtes. Denn Alles kommt nur auf die Form der Gleichungen (1) an, und wir können offenbar immer die Gleichungen:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2 = o, \quad xy = o,$$

zu einer Gleichung von folgender Form:

$$(y+\varkappa x)^2 = o,$$

verbinden (376), so lange nur β positiv ist, d. h. das eine Linien-System in dieselben beiden der von dem andern Systeme gebildeten Scheitel-Winkel fällt.

Curve. Die Berührungs-Puncte sind alsdann diejenigen Puncte, in welchen die gegebene Curve von denjenigen osculirt wird, die den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten. Die Determination ist derjenigen in der 368. Nummer ganz analog.

Wir können, eben so leicht als die vorige, auch folgende Aufgabe auflösen:

„Eine Linie zweiter Ordnung zu beschreiben, die eine gegebene zweimal und über-„diefs drei gegebene gerade Linien berührt."

Indem wir nemlich die gegebene Curve nach einander mit je zwei der gegebenen geraden Linien, als einer Linie zweiter Ordnung, zusammenstellen, erhalten wir, ähnlich wie in der 369. Nummer, viermal drei Puncte, die auf den vier Berührungs-Chorden liegen, welche den vier, der Aufgabe im Allgemeinen Genüge leistenden, Curven entsprechen. Wir müssen hierbei nicht übersehen, dafs die doppelte Berührung, wenn jene Chorden der gegebenen Curve nicht begegnen, eine imaginäre ist.

Fig. 17. In diesem Beweise ist zugleich auf indirectem Wege der in der vorigen Nummer begriffene Satz, dafs in jedem in eine Linie zweiter Ordnung eingeschriebenen Sechseck die gegenüberliegenden Seiten sich in solchen drei Puncten schneiden, die in gerader Linie liegen, bewiesen; und zugleich ist dargethan, dafs eine solche gerade Linie, etwa ADB, diejenige ist, welche durch zwei (reelle oder imaginäre) Puncte geht, in denen die gegebene Curve von einer solchen Curve berührt wird, die überdiefs drei Diagonalen des Sechsecks, MM', M''M$_{\prime\prime}$ und M'''M$_{\prime\prime\prime}$, berührt.

Um dem Schema dieser Nummer die ganze Allgemeinheit zu geben, die es mit sich bringt, müssen wir die zweiten Theile der beiden Gleichungen (1) mit doppeltem Vorzeichen behaften. Wenn wir diese Gleichungen von einander abziehen, indem wir in denselben verschiedene Vorzeichen nehmen, so kommt statt (2):

$$\mu' A' - \mu'' A'' = \pm(p^2+q^2) = 0,$$

eine Gleichung, die nicht mehr ein Chordal-System der zweiten und dritten Curve, sondern einen Chordal-Punct derselben darstellt. Diesen Punct können wir construiren, indem wir zugleich:

$$p = 0, \quad q = 0,$$

setzen; die beiden Berührungs-Chorden schneiden sich also im Chordal-Puncte, der hier an die Stelle des Mittelpunctes des im Anfange dieser Nummer betrachteten Chordal-Systems tritt.

Fig. 40. Wenn wir z. B. in der 40. Figur für die Linie zweiter Ordnung, die von jeder der beiden Curven zweimal berührt wird, zwei äufsere Tangenten nehmen, so vereinigen sich die beiden Berührungs-Chorden Tt und T't' im Puncte O, dem Mittelpuncte des Chordal-Systems POQ. Nehmen wir hingegen eine innere und eine äufsere gemeinschaftliche Tangente, so geht die Berührungs-Chorde durch einen der beiden Chordal-Puncte der beiden Curven: so geht z. B. Tτ durch O'', und T'τ' durch O'.

Wenn alle vier gemeinschaftliche Tangenten gezogen sind, so haben wir zwei Curven, welche die Seiten desselben Vierecks Ss''σs''' berühren, woraus denn nach dem oben angeführten Newtonschen Satze folgt, dafs die drei Diagonalen der durch die vier Tangenten gebildeten vollständigen vierseitigen Figur, nemlich s's, s'''s'' und Sσ, zu je zwei genommen, sich in den drei Puncten O, O' und O'' schneiden. Hiernach können wir leicht die beiden Chordal-Puncte zweier sich nicht schneidenden Curven bestimmen, wenn ihre gemeinschaftlichen Tangenten bekannt sind, und diese ergeben sich durch eine einfache Construction (nach der 388. Nummer), wenn wir das Chordal-System kennen.

S, O'', σ und O' sind vier harmonische Theilungs-Puncte (50).

385. Wir gehen zu einem dritten, an die vorige Nummer sich anschliefsenden, Schema über. Seyen:

$$A = o, \quad A' = o, \quad A'' = o, \quad A''' = o,$$

die Gleichungen von vier Linien zweiter Ordnung, von welchen jede der drei letztern die erste zweimal berührt. Alsdann erhalten wir folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} A+\mu'A' &= p^2 = o, \\ A+\mu''A'' &= q^2 = o, \\ A+\mu'''A''' &= r^2 = o, \end{aligned} \qquad (1)$$

wobei wir durch μ', μ'' und μ''' drei unbestimmte Coefficienten und durch

$$p = o, \quad q = o, \quad r = o,$$

die drei Berührungs-Chorden bezeichnen. Wenn wir die Gleichungen (1), paarweise genommen, von einander abziehen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mu'A'-\mu''A'' &= p^2-q^2 = o, \\ \mu'A'-\mu'''A''' &= p^2-r^2 = o, \\ \mu''A''-\mu'''A''' &= q^2-r^2 = o, \end{aligned} \qquad (2)$$

für die Gleichungen eines Chordal-Systems je zweier der drei letzten Curven: Gleichungen, von denen wir die dritte durch Abziehen der beiden ersten erhalten. Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

Wenn eine gegebene Linie zweiter Ordnung von dreien andern zwiefach berührt wird, so gehen diejenigen Chordal-Systeme je zweier der drei letztgenannten Curven, in deren Mittelpuncten die drei Berührungs-Chorden, paarweise genommen, sich schneiden, alle drei durch dieselben vier Puncte.

In dem Falle, wo nach der Schlufs-Bemerkung der vorigen Nummer zwei Puncte (dafs deren immer zwei seyn müssen, ergibt sich sogleich aus dem Anblick der Gleichungen (2)) an die Stelle zweier Chordal-Systeme treten, fällt die directe geometrische Bedeutung des vorstehenden Satzes hinweg; wir erhalten alsdann zwei Puncte, d. h. zwei Ellipsen, die bis zum Verschwinden ihr Axen-Verhältnifs beibehalten haben, deren Gleichungen sich zu der Gleichung des Linien-Systems verbinden lassen.

Wir wollen die Discussion des vorstehenden Satzes nur auf einzelne besondere Fälle ausdehnen, und zu diesem Ende **erstens** irgend eine Curve zweiter Ordnung nehmen, um die ein Sechseck beschrieben ist, dessen drei Paare gegenüberstehender Seiten wir als drei jene Curve zweimal berührende Linien zweiter Ordnung betrachten. Alsdann erhalten wir sechs leicht zu bestimmende gerade Linien, von denen viermal drei durch denselben Punct gehen; drei solcher geraden Linien, die sich in demselben Puncte schneiden, sind die drei Diagonalen des umschriebenen Sechsecks (320).

386. Wir wollen als zweiten Fall des Satzes der vorigen Nummer ein System zweier geraden Linien betrachten, welche von drei Linien zweiter Ordnung zweimal berührt werden, und überdiefs für eine dieser drei Linien zweiter Ordnung ein neues Linien-System nehmen. Wir haben also irgend zwei Curven, zwei ihrer gemeinschaftlichen Tangenten und zwei durch den Durchschnitt derselben gehende gerade Linien. Der diesem besondern Falle entsprechende Satz ist folgender: Fig. 40.

Wenn zwei Curven zweiter Ordnung beide von denselben beiden geraden Linien berührt werden, und man zieht durch den Durchschnitt dieser gemeinschaftlichen Tangenten irgend zwei den Curven begegnende gerade Linien, so lassen sich durch die auf jeder der beiden Curven bestimmten vier Durchschnitts-Puncte noch zwei Linien-Sy-

steme legen: die auf diese Weise sich ergebenden vier Linien-Systeme schneiden sich, paarweise genommen, in vier Puncten des Chordal-Systems der beiden Curven.

In der 40. Figur sind SM und SN die beiden, durch S, den Durchschnitt der gemeinschaftlichen Tangenten, gehenden geraden Linien. Es schneiden sich die beiden Linien-Systeme MN, $\mu\nu$ und M'N', $\mu'\nu'$ in vier solchen Puncten p, p', q und q', die auf zweien zusammengehörigen Chordalen der beiden Curven liegen. Statt der in der Figur ausgeführten Construction hätten wir auch die beiden (nicht gezogenen) Linien-Systeme Mν, Nμ und M'ν', Nμ' zusammenstellen können, und alsdann vier andere Puncte derselben beiden Chordalen Op und Oq erhalten.

Wir können für die eine, durch S gehende, gerade Linie, etwa für SM, eine der beiden Tangenten, etwa St, nehmen, und erhalten alsdann die beiden Linien-Systeme Nt, νt und N't', ν't', welche sich auf dem Chordal-Systeme der beiden Curven schneiden.

387. Indem wir eine durch den Durchschnitt zweier gemeinschaftlichen Tangenten gehende gerade Linie als ein System zweier zusammenfallenden betrachten, ergibt sich folgender Satz:

Wenn man durch den Durchschnitt zweier gemeinschaftlichen Tangenten irgend zweier Curven zweiter Ordnung eine beiden Curven begegnende gerade Linie zieht, so bilden die, in den vier Durchschnitten an beide Curven gelegten, Tangenten ein vollständiges Viereck, dessen zwei Diagonalen ein Chordal-System der beiden Curven sind, und dessen dritte Diagonale wiederum durch den Durchschnitt derselben beiden gemeinschaftlichen Tangenten geht.

Fig. 40. Der letzte Theil dieses Satzes ergibt sich sogleich. In der 40. Figur ist durch den Punct S die gerade Linie SN gelegt, die den beiden Curven in N, ν, N' und ν' begegnet. Die Tangenten in diesen vier Puncten schneiden sich in den sechs Puncten P, P', Q, Q' A und A'. PP' und QQ' bilden das Chordal-System der beiden Curven. AA' geht durch den Punct S; denn AT wird in t und B, so wie A'T' in t' und B' harmonisch getheilt (309), und da T und T', B und B', t und t' mit S in gerader Linie liegen, so liegen auch A und A' nothwendig mit demselben Puncte in gerader Linie.

388. Nach den vorigen beiden Nummern erhalten wir auf leichte Weise die Chordal-Systeme zweier gegebenen Curven zweiter Ordnung, wenn die Durchschnitte ihrer gemeinschaftlichen Tangenten bekannt sind. Wir wollen in dieser Nummer die gemeinschaftlichen Tangenten vermittelst eines Chordal-Systems construiren.

Fig. 40. In der in der vorigen Nummer angezeigten Construction (wir betrachten zuerst den Fall der 40. Figur, wo die beiden Curven keinen Punct mit einander gemein haben) schneiden sich die beiden äufseren und die beiden inneren Tangenten in zwei Puncten P' und P der zwischen beide Curven hindurch gehenden Chordalen; hingegen schneiden die ungleichnamigen Tangenten beider Curven sich in zwei Puncten Q' und Q der andern Chordalen. Wenn wir daher die Construction umkehren, und von irgend einem Puncte der Chordalen PP' zwei innere oder zwei äufsere Tangenten an beide Curven legen, oder von irgend einem Puncte der andern Chordalen QQ' eine innere Tangente an die eine, und eine äufsere Tangente an die andere Curve, so gehen die, durch die jedesmaligen beiden Berührungs-Puncte gehenden, geraden Linien durch den festen Punct S, den Durchschnitt der gemeinschaftlichen äufsern Tangenten.

Wenn wir statt des Punctes S den Durchschnitt der inneren gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Curven nehmen, und durch diesen Punct σ irgend eine den Curven be-

gegnende gerade Linie legen, so bleibt Alles wie in dem vorigen Falle, nur dafs die Durchschnitte zweier inneren oder zweier äufseren Tangenten in die Chordale QQ', hingegen die Durchschnitte zweier ungleichnamigen Tangenten der beiden Curven in die Chordale PP' fallen. Wenn wir daher, umgekehrt, von einem beliebigen Puncte der Chordalen QQ' zwei innere oder zwei äufsere Tangenten an beide Curven ziehen, oder von einem beliebigen Puncte der Chordalen PP' eine innere Tangente an eine Curve und eine äufsere an die andere, so gehen diejenigen geraden Linien, welche die jedesmaligen beiden Berührungen verbinden, durch den festen Punct σ, den Durchschnitt der beiden inneren gemeinschaftlichen Tangenten.

Aus dem Vorstehenden erhellet, dafs, wenn wir von irgend einem Puncte einer der beiden Chordalen, PP' und QQ', an die beiden Curven vier Tangenten legen und die Berührungen auf der einen Curve mit den Berührungen auf der andern durch vier gerade Linien verbinden: diese Linien, paarweise genommen, in den beiden Durchschnitten der beiden inneren und der beiden äufseren gemeinschaftlichen Tangenten sich schneiden. Diese Durchschnitte σ und S liegen, nach der Schlufs-Bemerkung der 384. Nummer, auf der Polaren des Durchschnittes O der Chordalen PP' und QQ', die in Beziehung auf beide Curven ein und dieselbe gerade Linie ist.

Wir haben noch zwei Paar Durchschnitte gemeinschaftlicher Tangenten der beiden sich nicht schneidenden Curven, s und s', s'' und s''', die auf den Polaren von O'' und O' liegen. Durch diese Durchschnitte können wir aber keine, beiden Curven begegnende, gerade Linie legen, wonach die Sätze der beiden vorigen Nummern, so wie die Umkehrung des letztern dieser Sätze, hier keine Anwendung finden.

Wenn die beiden gegebenen Curven sich in vier Puncten schneiden, so finden die Constructionen der beiden vorigen Nummern für die sechs Durchschnitte je zweier der vier gemeinschaftlichen Tangenten Statt. Diese sechs Puncte, paarweise genommen, S und S', s und s', s'' und s''', entsprechen den drei Chordal-Systemen, deren Mittelpuncte O, O' und O'' sind, und wenn irgend ein Punct eines dieser Systeme gegeben ist, so erhalten wir sogleich die entsprechenden beiden Durchschnitts-Puncte der gemeinschaftlichen Tangenten. Ziehen wir z. B. von einem Puncte Q der Chordalen MM' zwei Tangenten RU und RV, RU' und RV', an jede der beiden Curven, so schneiden sich die durch die Berührungen gehenden geraden Linien UU' und VV', UV' und U'V in den Puncten S und S'. Fig. 41.

Wenn die beiden gegebenen Curven sich nur in zwei Puncten schneiden, so gibt es nur zwei gemeinschaftliche Tangenten; Alles bleibt für den Durchschnitt derselben wie zuvor. Wenn man von irgend einem Puncte des einzig reellen Chordal-Systems, etwa von R, Tangenten an die beiden Curven zieht, so schneiden sich wiederum UU' und VV' in S; es schneiden sich aber auch UV' und U'V in einem festen, innerhalb beider Curven liegenden, Puncte, der die Rolle des Durchschnittes der beiden übrigen, imaginären, Tangenten spielt. Fig. 42.

Wenn zwei Curven, von denen eine ganz innerhalb der andern liegt, und das Chordal-System derselben gegeben ist, und man zieht von einem Puncte des letztern wie bisher Tangenten an die beiden Curven, so schneiden sich die vier durch die Berührungen gelegten geraden Linien in zwei festen innerhalb beider Curven liegenden Puncten, von denen sich mithin keine Tangenten an dieselben legen lassen.

Fig. 41, 42. Wir haben also allgemein, wenn wir zugleich noch auf die 382. Nummer, nach der UV und U'V' sich in R', einem Puncte der Chordalen MM', schneiden, Rücksicht nehmen, folgenden Satz:

Wenn man von irgend einem Puncte einer Chordalen irgend zweier Curven zweiter Ordnung zwei Tangenten an jede derselben zieht, so lassen sich durch die vier Berührungs-Puncte drei Paare gerader Linien legen, von denen die Linien zweier Paare sich in zweien festen Puncten und die Linien des dritten Paares sich in einem solchen Puncte schneiden, der immer auf derjenigen Chordalen bleibt, von deren einem Puncte aus die Tangenten gezogen worden sind *).

Fig. 43. 389. Zwei Parabeln können nicht mehr als drei gemeinschaftliche Tangenten haben. Wenn vier Puncte gegeben sind, so können wir auf der Stelle (261, 270) die drei gemeinschaftlichen Tangenten der beiden durch diese vier Puncte gehenden Parabeln bestimmen. Seyen nemlich A, B, C und D die vier gegebenen Puncte, die beiden Paare gegenüberliegender Seiten und die beiden Diagonalen schneiden sich in den Winkel-Puncten des Dreiecks O''O'O, und die drei gesuchten Tangenten bilden das Dreieck TT'T'', dessen Winkel-Puncte in den Mitten der Seiten des eben bezeichneten Dreiecks O''O'O liegen.

*) Sobald dieser Satz für eine besondere Lage der beiden Curven zweiter Ordnung bewiesen ist, ist seine Gültigkeit allgemein dargethan. Denn wenn wir von einem Normalfalle, etwa dem Falle der 41. Figur, ausgehen, und die beiden Curven auf dasjenige Chordal-System beziehen, auf welchem wir den Punct R angenommen haben, so können wir die Coordinaten der vier Berührungs-Puncte U, V, U' und V' zwischen den Gleichungen der durch R gehenden Tangenten und den Gleichungen der beiden Curven eliminiren. Zwischen diesen Coordinaten finden die, dem Satze des Textes entsprechenden, Beziehungen Statt. Es ändert sich aber nichts in den Formen der Rechnung, durch welche wir zu jenen Coordinaten-Werthen gelangen, wenn wir irgend zwei andere Curven nehmen, die eine beliebige Lage zu einander haben, und dieselben auf ein entsprechendes Coordinaten-System beziehen: also ändert sich auch nichts in den obigen Beziehungen der vier Berührungs-Puncte zu einander. Diese Art zu schliefsen fliefst aus demselben allgemeinen Princip, aus welchem auch die Bedeutung und der Gebrauch der verschiedenen Vorzeichen hervorgeht (4), und nach welchem die analytische Behandlung der Geometrie einen unschätzbaren Vorzug vor jeder andern, und namentlich, was die Theorie der Linien zweiter Ordnung anbelangt, vor der Projections-Methode behauptet.

Es ist leicht ersichtlich, dafs die beiden äufseren, so wie die beiden inneren Tangenten, durch eine Gleichung des zweiten Grades, in welcher als Constanten einzig die Constanten der beiden Curven vorkommen, gegeben sind. Es hängt aber von den Werthen dieser Constanten, also von der Natur und der gegenseitigen Lage der beiden Curven ab, ob diese Gleichung ein wirkliches Linien-System oder einen Punct ausdrückt. Im letztern Falle läfst offenbar diese Gleichung eines Punctes sich mit der Gleichung jeder der beiden Curven zu einer Gleichung von der Form: $(y+\varkappa x+\sigma)^2 = 0$ verbinden; und somit ist direct bewiesen, was aus dem Satze der vorstehenden Nummer durch Umkehrung folgt, dafs der Satz der 387. Nummer (so wie der vorhergehenden) sich auch auf die in Rede stehenden Durchschnitte imaginärer Tangenten, z. B. auf den Punct σ der 42. Figur bezieht.

390. Wir wollen ein viertes Schema entwickeln. Seyen

$$A = o, \quad A' = o, \quad A'' = o, \tag{1}$$

die Gleichungen irgend dreier gegebenen Linien zweiter Ordnung; alsdann stellen, wenn μ' und μ'' irgend zwei unbestimmte Coefficienten bedeuten, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A''+\mu A &= o, \\ A''+\mu' A' &= o, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

die wir, der Kürze wegen, durch:

$$B = o, \quad B' = o, \tag{3}$$

bezeichnen, irgend zwei neue Linien zweiter Ordnung dar, die durch die Durchschnitte der ersten und dritten und der zweiten und dritten gegebenen Curve gehen. Wenn wir die beiden Gleichungen (2) von einander abziehen, so erhalten wir:

$$\mu A - \mu' A' = B - B' = o: \tag{4}$$

die Gleichung einer Linie zweiter Ordnung, welche einerseits durch die Durchschnitte der beiden Curven: $A = o$ und $A' = o$, andrerseits durch die Durchschnitte der beiden Curven: $B = o$ und $B' = o$, geht. Hiernach ergibt sich folgender allgemeine Satz;

Die (reellen oder imaginären) Durchschnitte irgend zweier gegebenen Linien zweiter Ordnung, so wie die (reellen oder imaginären) Durchschnitte irgend zweier anderen Linien derselben Ordnung, welche sich durch die Durchschnitte jener beiden gegebenen mit einer beliebigen dritten legen lassen, befinden sich auf dem Umfange ein und derselben neuen Linie zweiter Ordnung.

391. Folgendes fünfte Schema ist mit dem Schema der vorigen Nummer verwandt, und führt zu denselben geometrischen Constructionen. Bei der bisherigen Bezeichnung ist:

$$A+\mu' A'+\mu'' A'' = o, \tag{5}$$

die Gleichung einer Linie zweiter Ordnung. Diese Gleichung wird befriedigt, wenn wir zugleich

$$\left.\begin{aligned} A+\mu' A' &= o, \quad \text{und} \quad A'' = o, \\ A+\mu'' A'' &= o, \quad \quad „ \quad \quad A' = o, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

setzen. Die beiden Paare durch diese letzten Gleichungen dargestellter Linien zweiter Ordnung schneiden sich also auf der durch die Gleichung (1) dargestellten. Also:

Wenn irgend drei Linien zweiter Ordnung gegeben sind, so wird jede der beiden ersteren von einer beliebigen Linie derselben Ordnung, die durch die (reellen oder imaginären) Durchschnitte der anderen derselben mit der gegebenen dritten geht, so geschnitten, daſs die beidesmaligen vier (reellen oder imaginären) Durchschnitte auf dem Umfange ein und derselben neuen Linie zweiter Ordnung liegen.

392. Die Schemata der letzten beiden Nummern gestatten eine ausführliche Discussion: wir begnügen uns hier damit, einige Einzelnheiten hervorzuheben. Fig. 44.

Wir wollen zuerst annehmen, daſs die gegebenen Linien zweiter Ordnung, so wie auch die durch die Durchschnitte derselben gelegten, Systeme von zwei geraden Linien seyen. Demgemäſs seyen in der 44. Figur A'B'C'D', ABCD und ELFM die drei durch $A'' = o$, $A' = o$ und $A = o$, und hiernach EHFG und IMKL die beiden durch $A+\mu' A' = o$ und $A+\mu'' A'' = o$ dargestellten Linien zweiter Ordnung. Alsdann erhalten wir, nach der vorigen Nummer, die acht Puncte A', B', C', D', A, B, C und D, die auf ein und derselben Linie zweiter Ordnung liegen.

Dieselben acht Puncte erhalten wir nach der 390. Nummer, wenn wir die Linien-Systeme ABCD, AMBL und ELFM durch A = o, A′ = o und A″ = o und hiernach ED′FC′ und A′B′C′D′ durch B = o und B′ = o darstellen *).

*) Zu demselben Resultate kommen wir auch auf folgendem Wege. Seyen:

$$U = o, \quad U' = o,$$

die Gleichungen zweier gegebenen Linien vierter Ordnung. Alsdann stellt:

$$U + \mu U' = o,$$

die allgemeine Gleichung aller Linien derselben Ordnung dar, die durch die 16 Durchschnitte der beiden gegebenen gehen. Wenn der erste Theil der letzten Gleichung, bei gehöriger Bestimmung des unbestimmten Coefficienten μ, einen Factor des zweiten Grades hat, so ist der übrige Factor, im Allgemeinen, von demselben Grade. Wenn also 8 der 16 Durchschnitte der beiden gegebenen Curven auf einer Linie zweiter Ordnung liegen, so liegen die übrigen 8 auf einer andern Linie derselben Ordnung. In der 44. Figur seyen die beiden gegebenen Linien vierter Ordnung die beiden Systeme von vier geraden Linien AB, CD, A′B′, C′D′ und EH, FG, IM, KL; die 8 Durchschnitte E, F, G, H, I, K, L und M liegen auf dem Systeme zweier geraden Linien EL, FM, und mithin auch die 8 übrigen A, B, C, D, A′, B′, C′ und D′ auf ein und derselben Linie zweiter Ordnung.

Der Analogie wegen wollen wir noch die Gleichungen zweier gegebenen Linien dritter Ordnung:

$$V = o, \quad V' = o,$$

zu der allgemeinen Gleichung aller Linien derselben Ordnung, welche durch die 9 Durchschnitte der beiden gegebenen gehen:

$$V + \mu V' = o,$$

verbinden. Wenn der erste Theil dieser Gleichung, bei einer schicklichen Annahme von μ, einen Factor vom ersten Grade hat, so ist der andere Factor, im Allgemeinen, vom zweiten Grade. Wenn also 3 der 9 Durchschnitte der beiden gegebenen Curven in gerader Linie liegen, so liegen die übrigen 6 auf einer Linie zweiter Ordnung, und umgekehrt, wenn 6 der 9 Durchschnitte auf einer Linie zweiter Ordnung liegen, so liegen die übrigen drei in gerader Linie.

Der erste Theil dieses Satzes gibt eine neue Construction einer Linie zweiter Ordnung, die durch fünf gegebene Puncte geht. Es sey nemlich (indem wir uns die Figur in Gedanken hinzuthun) BM′AM irgend ein Viereck, AB eine Diagonale desselben, und auf dieser Diagonalen D ein beliebiger Punct, durch welchen irgend zwei gerade Linien gehen, von denen eine, M″M‴, zweien gegenüberliegenden Seiten des Vierecks, AM und BM′, in M″ und M‴ begegnet, und die andere, $M_{\prime\prime}M_{\prime\prime\prime}$, den beiden andern gegenüberliegenden Seiten, AM′ und $BM_{\prime}$, in $M_{\prime\prime}$ und $M_{\prime\prime\prime}$. Alsdann können wir die beiden Linien-Systeme AM, $M_{\prime\prime}M_{\prime\prime\prime}$, M′B und AM′, M″M‴, MB für jene gegebenen Linien dritter Ordnung nehmen, die sich in neun Puncten, A, D, B, $M_{\prime\prime}$, M′, M‴, $M_{\prime\prime\prime}$, M und M″, schneiden, von welchen die drei erstgenannten in gerader Linie und die sechs übrigen auf einer Linie zweiter Ordnung liegen. Wenn nun M‴, M, M″, $M_{\prime\prime}$ und M′ fünf gegebene Puncte sind, so ziehe man $M_{\prime\prime\prime}M$, MM″, $M_{\prime\prime}M'$ und beliebig durch M′ die gerade Linie M′B. Alsdann ist das Viereck BM′AM vollständig bestimmt, mithin auch die Diagonale AB, der Durchschnitt D derselben mit der geraden Linie, die $M_{\prime\prime\prime}$ und $M_{\prime\prime}$ verbindet, und endlich M″D, von welcher M′B in M‴, einem sechsten Puncte der durch M‴, M, M″, $M_{\prime\prime}$ und M′ gehenden Linie

393. Nach der vorigen Nummer ergibt sich eine hübsche Art, eine Linie zweiter Ordnung zu bestimmen, wenn irgend fünf Puncte derselben gegeben sind. Diese Puncte seyen A, B, C, D und A'. Durch vier dieser Puncte, etwa durch die vier ersten, lege man zwei Linien-Systeme, etwa ABCD und AMBL, durch den fünften Punct A' ziehe man nach beliebiger Richtung zwei gerade Linien, A'F, welche dem ersten jener Systeme in G und F, und A'B', welche dem zweiten Systeme in I und K begegnen. Man verbinde G und I, F und K durch zwei gerade Linien GI und FK, die den beiden Linien-Systemen ABCD und AMBL aufser in G und F, I und K noch in den Puncten E und H, L und M begegnen, und verbinde auch diese beiden Paare von Puncten durch die geraden Linien EH und LM. Alsdann schneiden die beiden Linien-Systeme A'FEH und A'B'LM sich in vier Puncten A', B', C' und D' der zu bestimmenden Linie zweiter Ordnung. Wir erhalten also auf diese Weise zu gleicher Zeit drei neue Puncte derselben. Fig. 44.

Wir hätten dieselben drei Puncte B', C' und D' gefunden, wenn wir in der eben angezeigten Construction, statt die Puncte G und I, F und K durch zwei gerade Linien zu verbinden, IF und GK gezogen hätten.

Wenn wir durch den fünften gegebenen Punct A', statt A'F und A'B', zwei solche gerade Linien legen, die zweien anderen, von denen jede durch irgend zwei der vier ersten gegebenen Puncte geht, parallel sind, so erhalten wir, nach der eben angezeigten Construction, zwei Paar paralleler Chorden der zu bestimmenden Linie zweiter Ordnung, und hiernach sogleich den Mittelpunct derselben.

394. In der 45. Figur sind DABC und D'A'B'C' zwei gegebene, sich nicht schneidende, Curven und ABCD ist ein System zweier geraden Linien, das den beiden Curven in den Puncten A, B, C, D und A', B', C', D' begegnet. Durch diese Durchschnitts-Puncte sind zwei neue Linien-Systeme ACBD und A'C'D'B' gelegt; diese schneiden sich Fig. 45.

zweiter Ordnung, geschnitten wird. Es ist leicht, diese Curve durch eine stetige Bewegung des Punctes M''' zu beschreiben. Bei dieser Gelegenheit begegnen wir folgendem Satze: der Ort für die dritten Winkel-Puncte (M''') aller Dreiecke, deren drei Seiten durch irgend drei feste Puncte (M'', M', A) gehen, und deren zwei erste Winkel-Puncte (D, B) auf irgend zweien festen geraden Linien ($M_{'''}M_{''}$, $MM_{'''}$) fortrücken, ist eine Linie zweiter Ordnung, die durch fünf, als gegeben zu betrachtende, Puncte geht.

Der zweite Theil des obigen Satzes gibt unmittelbar den Satz vom eingeschriebenen Sechseck (292). Hiervon überzeugt uns ein Blick auf die 17. Figur, wenn wir wieder, wie vorhin, die beiden Linien-Systeme AM, $M_{''}M_{'''}$, M'B und AM', M''M''', MB für die beiden Linien dritter Ordnung nehmen.

Endlich erhalten wir auch auf der Stelle die Sätze der 77. — 87. Nummern. Denn, denken wir uns in der 30. Figur der 2. Tafel das von den geraden Linien A'A, A'A'', B'B und B'B'' bestimmte Viereck ausgeführt, so schneiden sich AB und A''B'' auf derjenigen Diagonalen dieses Vierecks, die durch die beiden Winkel-Puncte A' und B' geht; und also liegen nach dem ersten Theile des obigen Satzes die beiden übrigen Winkel-Puncte des Vierecks (die Durchschnitte von A'A und B'B'', A'A'' und B'B) und die vier Puncte A, B, A'' und B'' auf derselben Linie zweiter Ordnung, und mithin nach dem zweiten Theile jenes Satzes, indem wir die beiden Linien-Systeme SB'', S'A, S''B' und SA', S'B'', S''A für die beiden Linien dritter Ordnung nehmen, die drei Puncte S, S' und S'' in gerader Linie.

in den vier Puncten α, β, γ und δ, welche (391) alle vier auf einer Linie zweiter Ordnung liegen, die mit den beiden gegebenen Curven dasselbe Chordal-System hat. Hiernach können wir folgende Aufgabe auflösen:

Eine Linie zweiter Ordnung zu beschreiben, die durch die imaginären Durchschnitte zweier gegebenen und überdieſs durch einen gegebenen Punct geht.

Sey α der gegebene Punct; durch denselben ziehe man nach beliebiger Richtung zwei gerade Linien, von welchen eine, AC, der einen Curve in A und C, die andere, A'C', der andern Curve in A' und C' begegne. Man ziehe ferner AA', welche die beiden Curven zum zweiten Male in B und B', so wie CC', welche dieselben zum zweiten Male in D und D' schneide, und endlich BD und B'D'. Alsdann schneiden die beiden geraden Linien AC und BD die beiden geraden Linien A'C' und B'D', auſser in α, noch in drei neuen Puncten β, γ und δ der zu construirenden Curve.

Statt einer der beiden gegebenen Curven kann auch das Chordal-System derselben gegeben seyn. Wenn die eine Chordale alsdann der Curve begegnet, die andere nicht, so ergibt sich eine der vorstehenden ganz entsprechende Construction einer Linie zweiter Ordnung, die durch drei gegebene Puncte und zugleich durch die beiden imaginären Durchschnitte einer gegebenen Linie zweiter Ordnung und einer, derselben nicht begegnenden, geraden Linie geht.

395. Wenn eine Curve und auf dem Umfange derselben zwei Puncte gegeben sind, so können wir durch diese beiden Puncte eine gerade Linie und in einem derselben eine Tangente an die gegebene Curve legen, und alsdann eine Curve construiren, welche durch irgend einen gegebenen Punct α geht, und überdieſs mit der gegebenen Curve jene gerade Linie und jene Tangente zum Chordal-Systeme hat, oder, mit anderen Worten, dieselbe in einem der beiden auf ihrem Umfange liegenden Puncten osculirt, in dem andern schneidet. Diese Construction können wir geradezu in der, in der vorigen Nummer angezeigten, lesen, wenn wir nur an die Stelle einer der beiden Curven, DABC und D'A'B'C', das eben bezeichnete Chordal-System setzen; und wir können zugleich, ähnlich wie in der 393. Nummer, die Richtung der durch α zu ziehenden geraden Linien so bestimmen, daſs wir den Mittelpunct der gesuchten Curve auf der Stelle erhalten.

Fig. 29. Wenn der Osculations-Punct und der Durchschnitts-Punct sich in einen Osculations-Punct der höchsten Ordnung vereinigen, so besteht das Chordal-System aus zwei, in die gemeinschaftliche Tangente zusammenfallenden, geraden Linien; alsdann erhalten wir nach der in Rede stehenden Construction unmittelbar nur einen einzigen neuen Punct der verlangten Curve.

Sey nemlich die äuſsere der beiden Curven der 29. Figur die gegebene, die im Puncte O von einer durch α gehenden Curve vierpunctig osculirt werden soll. Man ziehe durch α die, übrigens beliebige, gerade Linie AC, die der Curve in A und C, und SN, die der Tangente OS in S (in welchen Punct nach der vorigen Bezeichnung die vier Puncte A', B', C' und D' zusammenfallen) begegne; ziehe ferner SA und SC, welche die Curve zum zweiten Male in B und D schneiden, und endlich BD, von welcher SN (A'C') in einem neuen Puncte, γ, der gesuchten Curve geschnitten wird.

Man überzeugt sich leicht, daſs die früher gegebenen Constructionen der beiden Aufgaben dieser Nummer aus den vorstehenden Constructionen als besondere Fälle sich ergeben (355, 356, 360).

396. Wenn der in der Aufgabe der 394. Nummer gegebene Punct α einer der beiden Chordal-Puncte (oder überhaupt der Mittelpunct eines Chordal-Systems) der beiden gegebenen Curven ist, so fallen die vier Puncte α, β, γ und δ in einen einzigen zusammen, d. h. AC, A'C', BD und B'D' schneiden sich in ein und demselben Puncte. Fig. 45.

In der 46. Figur ist durch O, einen Chordal-Punct der beiden Curven, AC, die der einen Curve in A und C, und OA', die der andern Curve in A' und C' begegnet, gezogen. AA', CC' (AC' und A'C) begegnen den beiden Curven zum zweiten Male in B und B', D und D' (E und E', F und F'). BD, B'D' (EF und E'F') gehen, so wie AC und A'C', durch O. Fig. 46.

397. Wenn die in der 390. Nummer durch A = o und A' = o bezeichneten Curven zwei ähnliche und ähnlich liegende sind, so stellt die Gleichung B—B' = o eine dritte ähnliche und ähnlich liegende Curve dar, von welcher wir, neben den beiden Durchschnitten der beiden erstgenannten Curven, noch die vier Durchschnitte der beiden durch B = o und B' = o dargestellten Curven erhalten. Hiernach können wir, ähnlich wie in den Constructionen der vorigen Nummern, eine Hyperbel bestimmen, wenn die Richtung ihrer Asymptoten und überdiefs drei Puncte derselben gegeben sind. Wir brauchen nemlich zu diesem Ende für die durch A = o und A' = o dargestellten Curven nur zwei solche Systeme zweier, den Asymptoten parallelen, geraden Linien zu nehmen, die sich in irgend zweien der drei gegebenen Puncte schneiden.

398. Wenn, indem wir wieder zu dem Schema der 390. Nummer zurückgehen, irgend drei jener acht Puncte, die auf dem Umfange der durch B—B' = o dargestellten Linie zweiter Ordnung sich befinden, in gerader Linie liegen, so liegen nothwendig alle acht Puncte auf zweien geraden Linien vertheilt.

Wenn die beiden Gleichungen B = o und B' = o zwei Linien-Systeme bezeichnen, die denselben Mittelpunct haben, so stellt offenbar jede Gleichung des zweiten Grades, die wir durch Verbindung derselben erhalten, ein neues Linien-System dar, das ebenfalls denselben Mittelpunct hat, oder einen blofsen Punct, jenen Mittelpunct selbst. Diefs ist auf der Stelle ersichtlich; denn es sey, indem wir den Anfangs-Punct gehörig bestimmen:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2 = \nu B = o,$$
$$y^2+2\alpha' xy+\beta' x^2 = \nu' B' = o,$$

alsdann stellt, wenn μ einen unbestimmten Coefficienten bedeutet:

$$y^2+2\frac{\alpha+\mu\alpha'}{1+\mu}xy+\frac{\beta+\mu\beta'}{1+\mu}x^2 = o,$$

offenbar ein neues System zweier sich im Anfangs-Puncte schneidenden, geraden Linien dar. Auf einem solchen Systeme: B—B' = o, schneiden sich, nach der 390. Nummer, die beiden Curven: A = o und A' = o, oder, mit anderen Worten, die Durchschnitte dieser beiden Curven liegen, paarweise genommen, mit demjenigen Puncte, in welchem die vier geraden Linien der beiden Systeme: B = o und B' = o, sich schneiden, in gerader Linie. Wenn die beiden Curven sich wirklich schneiden, so bezeichnet B—B' = o ein System zweier reellen geraden Linien.

In der 47. Figur entspreche die Curve der Gleichung: A'' = o, die beiden Linien-Systeme ABCD und ACBD den Gleichungen: A = o und A' = o. Diese Linien-Systeme schneiden die Curven in den Puncten F, G, K und L; E, H, I und M so, dafs FK und GL, EI und HM alle vier durch den Punct S gehen: alsdann gehen durch den- Fig. 47.

selben Punct auch die beiden geraden Linien AD und BC, welche die Durchschnitte der beiden Linien-Systeme, paarweise genommen, mit einander verbinden.

Der Punct S kann sowohl aufserhalb als auch innerhalb der gegebenen Curve fallen. Die vier Paare von Puncten F und G, H und I, K und L, M und E können alle oder zum Theil sich zu Berührungs-Puncten vereinigen; hiernach erhalten wir, als besondern Fall, den Newtonschen Satz vom umschriebenen Viereck. Statt der beiden Linien-Systeme ABCD und ACBD können wir irgend zwei andere Curven nehmen, welche durch die Puncte F, G, K, L und H, I, M, E gehen. Hiernach erhalten wir folgenden Satz, von welchem derjenige, welcher dem Schema der 384. Nummer entspricht, nur ein besonderer Fall ist:

Wenn eine Linie zweiter Ordnung von zweien anderen so geschnitten wird, dafs durch die beidesmaligen vier Durchschnitte sich zwei Paar gerader Linien legen lassen, die sich in demselben Puncte schneiden, so gehen durch diesen Durchschnitts-Punct auch zwei zusammengehörige Chordalen der beiden letztgenannten Linien zweiter Ordnung.

Wir brechen hier die Entwicklungen dieses ersten Bandes ab.

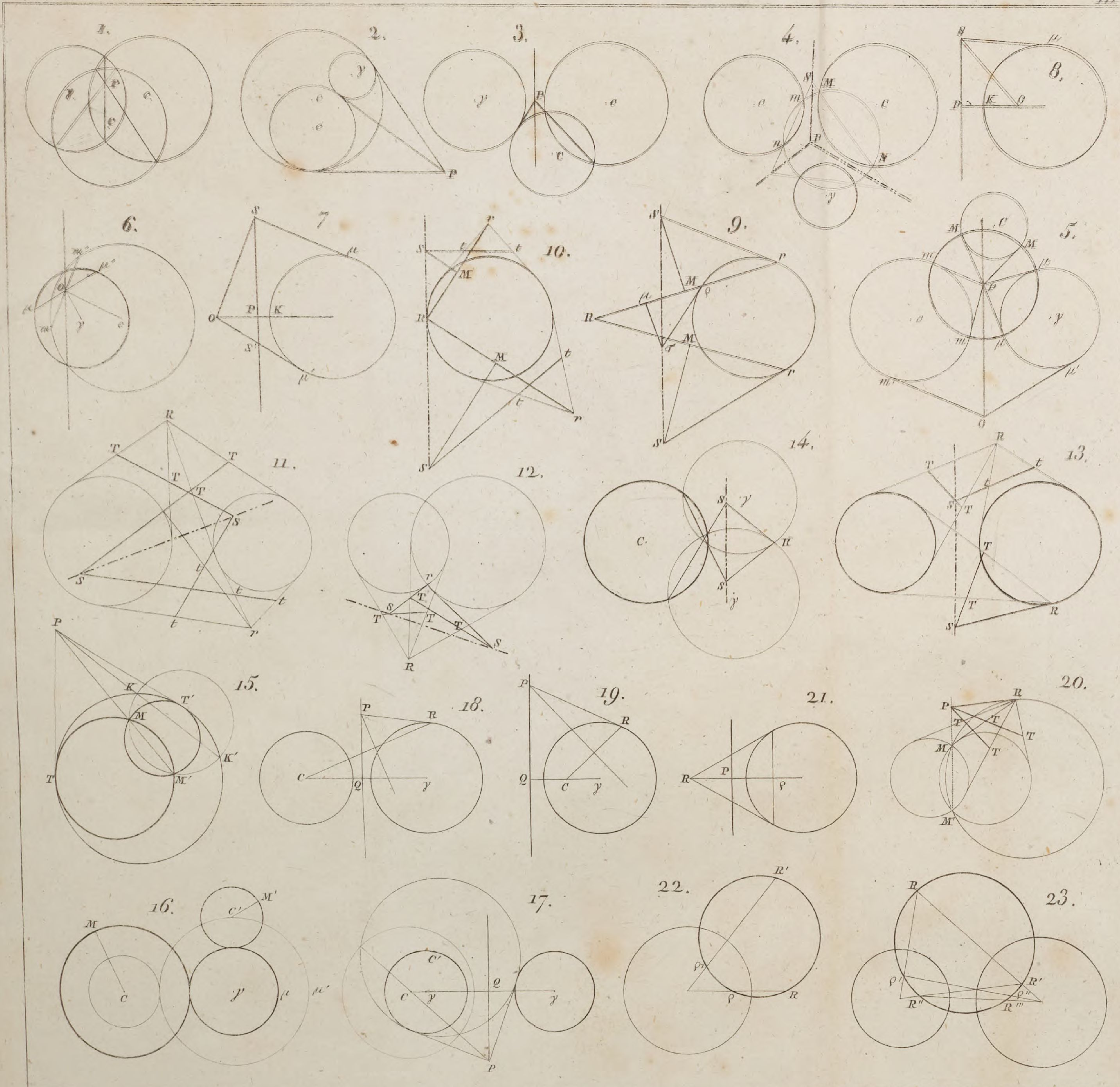
BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

Verbesserungen.

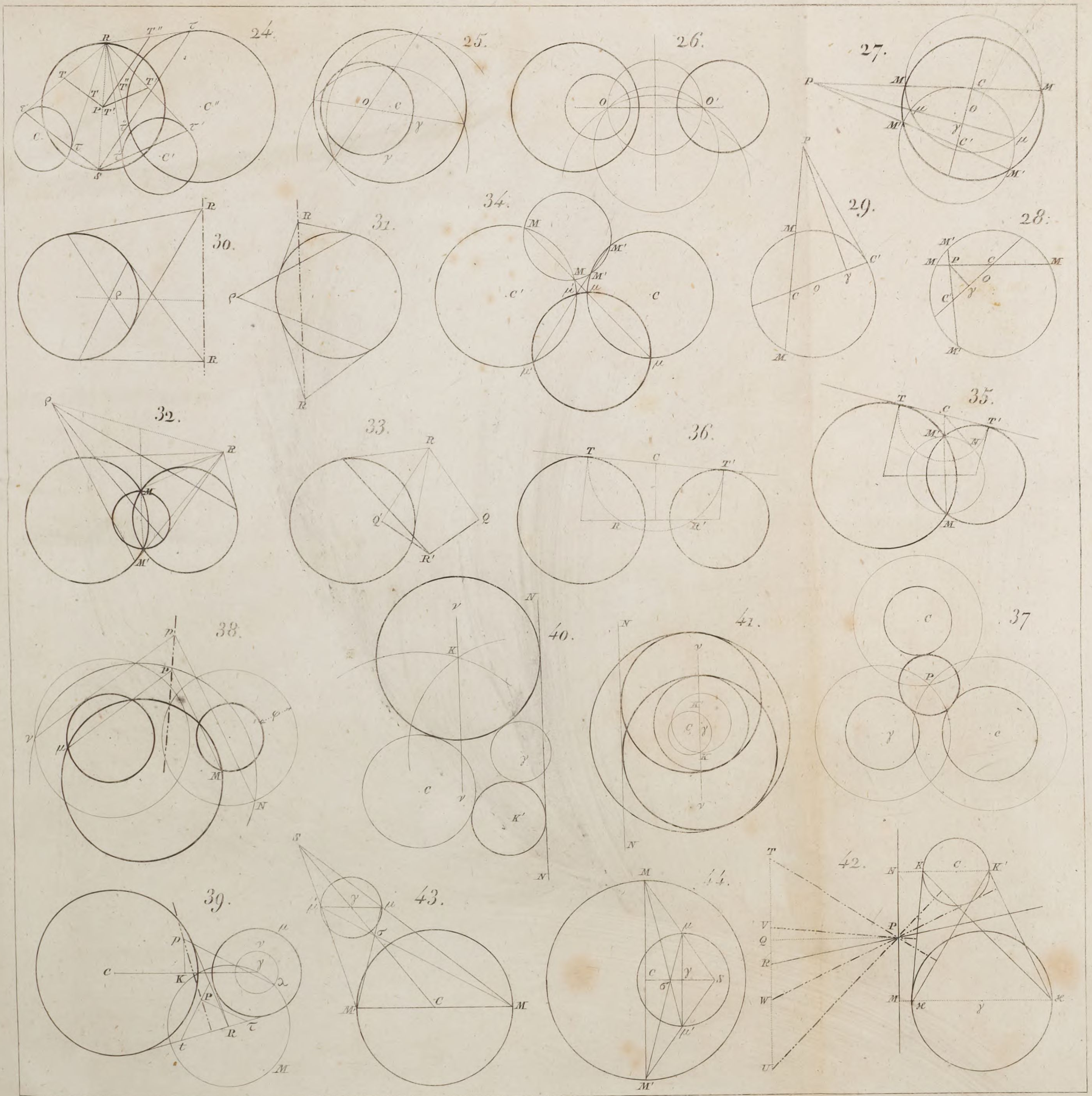
Seite	Zeile		
7	11	v. o.	statt o lies $\frac{1}{0}$.
8	13	v. u.	fehlt ein Accent.
16	14	v. o.	statt $y = \chi x$, $y = \chi' x = -\chi x$, l. $y = \varkappa x$, $y = \varkappa' x = -\varkappa x$,.
„	16	„ „	„ $A \pm A' = o$ l. $\varkappa + \varkappa' = o$.
28	17	„ „	„ $+1\mu'$ l. $1+\mu'$.
29	1	v. u.	„ *tang* l. *tang α*.
31	8	v. o.	fehlt ein Accent.
34	2	v. u.	steht der Buchstabe a zuviel.
38	19	v. o.	fehlt ein Accent.
„	28	„ „	steht ein zwiefacher Accent statt eines einfachen.
39	10	v. u.	fehlt ein Accent.
40	18	v. o.	desgleichen.
42	2	„ „	statt BB″ l. BB′.
45	19	„ „	ist ausgelassen: $y =$.
„	9	v. u.	steht und an der unrichtigen Stelle.
„	5	„ „	statt y l. x.
49	18	„ „	Man streiche die Benennung „Chordalpunct zweier Kreise“, die überflüßig ist, und zu einem Mißverständniß führen könnte.
„	13	„ „	B^2 muß innerhalb der Klammer stehen.
57	4	„ „	statt β l. β^2.
61	15	„ „	fehlt der Exponent 2.
63	1	„ „	statt Puncte l. Pole.
64	11	v. o.	steht das Wort darstellen einmal zuviel.
75	5	v. u.	fehlt der Theilungsstrich des Bruches.
90	3	„ „	fehlen in dem ersten Theile der Gleichung die beiden Exponenten.
91	3	„ „	st. den l. die.
96	24	v. o.	st. Chordale l. Chordalen.
106	5	„ „	st. ergibt l. ergäbe.
„	5	v. u.	fehlt ein Accent.
109	18	„ „	nach dem Worte berühren ist ausgelassen: bekannt sind.
128	16	„ „	st. Aufforderung l. Umformung.
135	2	„ „	st. (9) l. (7).
136	3	v. o.	st. Asymtoten l. Asymptoten.
„	15	v. u.	müssen die Worte und hiernach zwei Zeilen tiefer stehen.
„	10	„ „	st. $1 \pm \beta$ l. $1 + \beta$.
141	2	„ „	st. discusion de l'équalion l. discussion de l'équation.
146	22	v. o.	muß der Nenner des Bruches zum Quadrat erhoben werden.
„	25	„ „	st. 146 l. 246.
156	15	v. u.	st. $\varkappa^2$ l. k^2.
„	11	„ „	st. $x^2 h$ l. $\varkappa^2 h$.
159	9	„ „	st. 171 l. 271.
160	18	v. o.	st. Gleicung l. Gleichung.
„	20	„ „	st. pq l. py.
165	16	„ „	st. $(xy' - xy')^2$ l. $(xy' - x'y)^2$.
169	15	„ „	st. abzieht l. abziehn.
„	21	„ „	st. (m—1)punctig l. mpunctig; st. $(m-1)^2$ l. $m(m-2)$.
„	32	„ „	st. (m—1)punctig l. mpunctig.
„	34	„ „	st. (m—2)punctig l. (m—1)punctig.
178	15	„ „	steht zu Anfang der Gleichung ein x zuviel.
185	16	v. u.	st. Permututionen l. Permutationen.
228	12	„ „	st. hat l. haben.
233	oben		st. dritter l. zweiter.

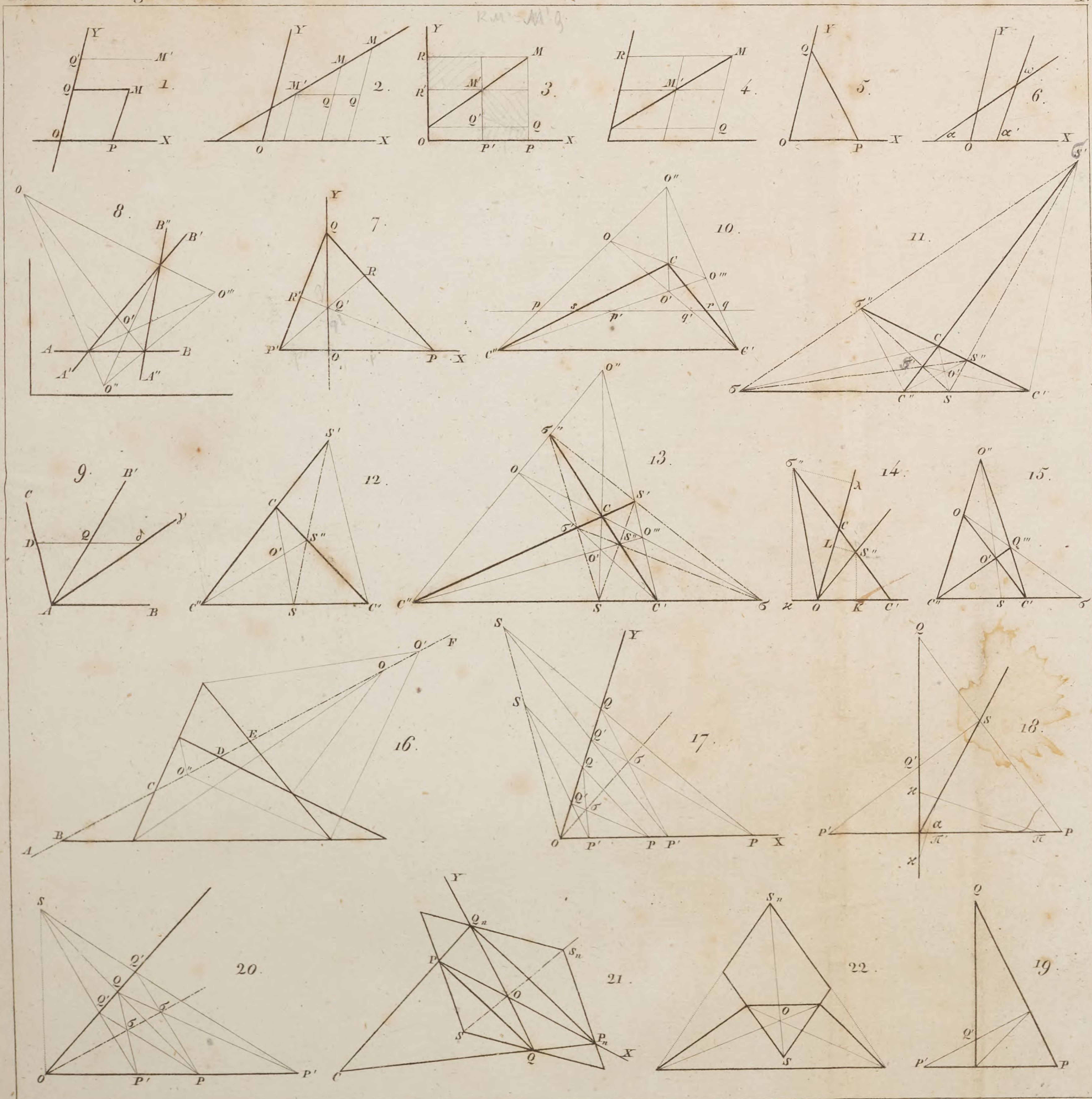
ESSEN,

gedruckt bei G. D. Bädeker.

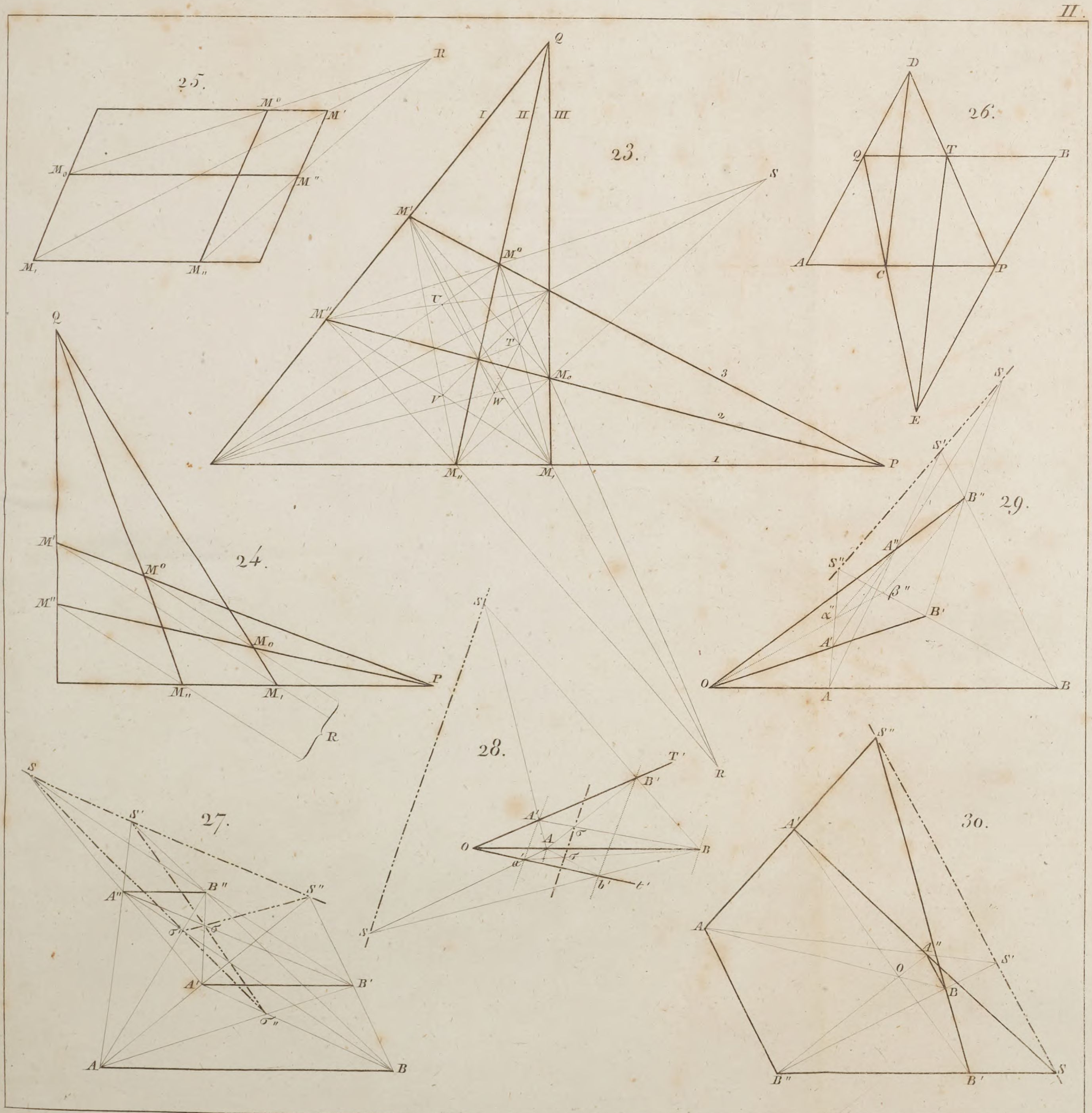


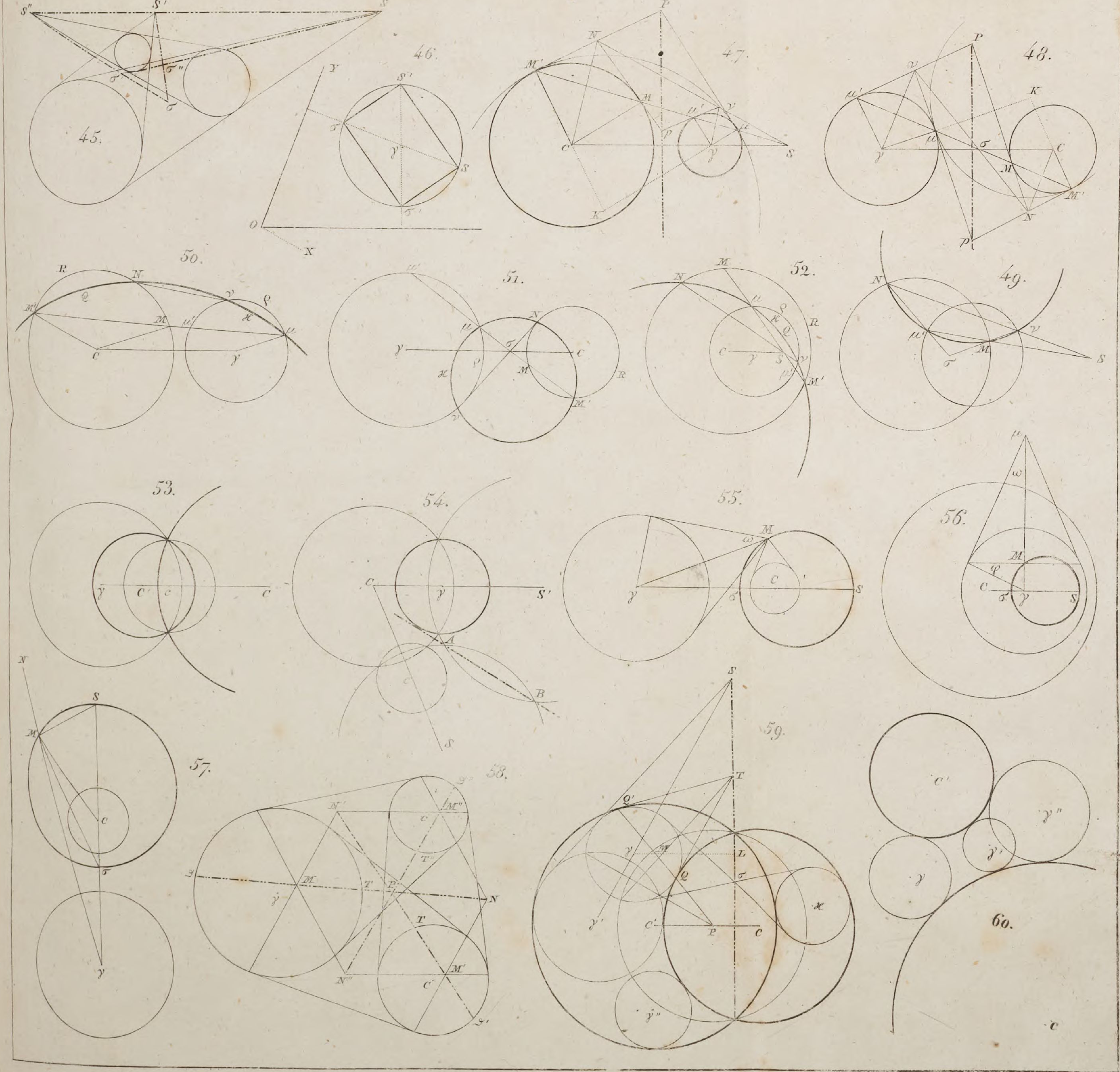
1.
2.
3.
4.
8.
6.
7
10.
9.
5.
11.
12.
14.
13.
15.
18.
19.
21.
20.
16.
17.
22.
23.

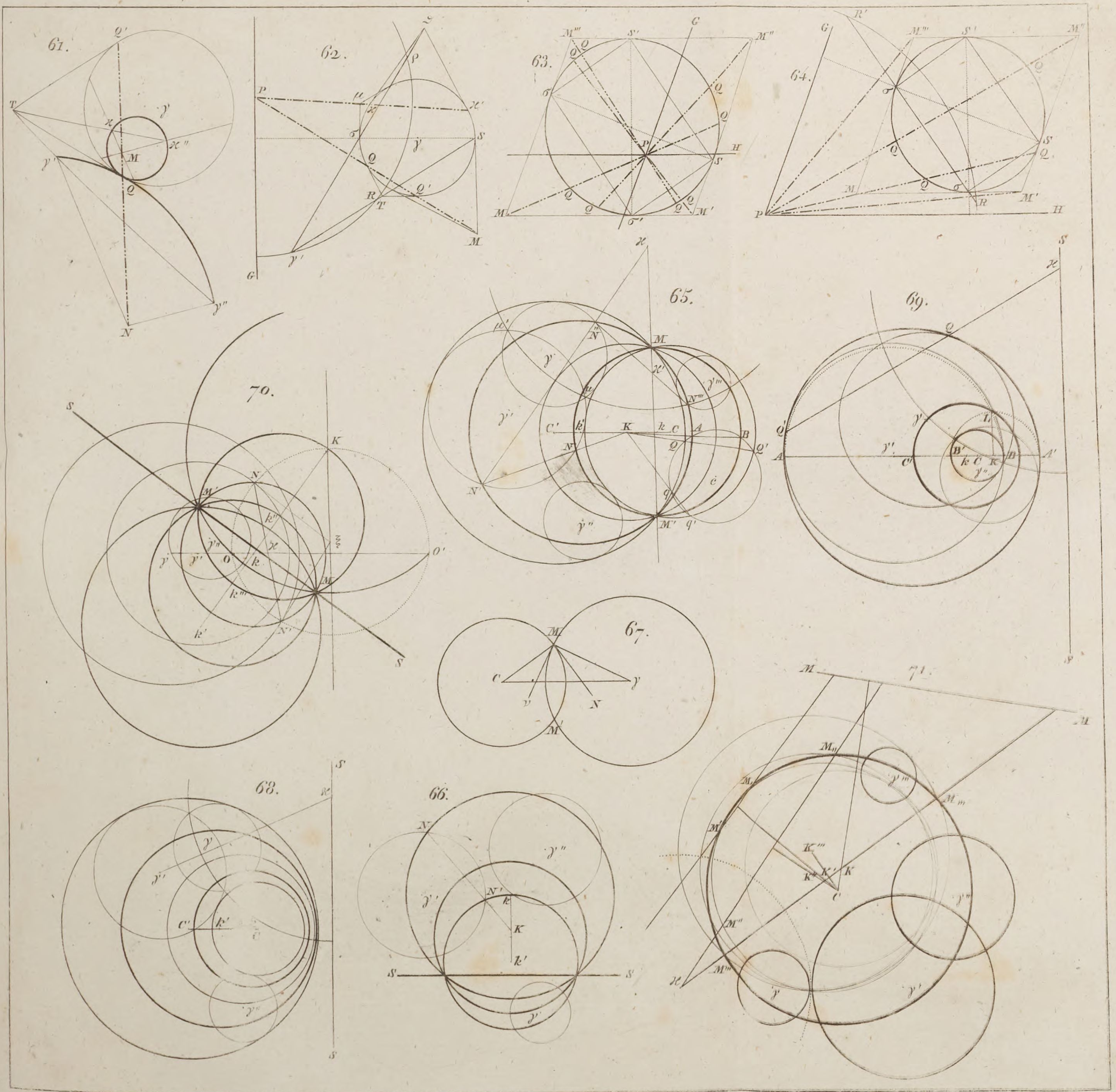

24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.

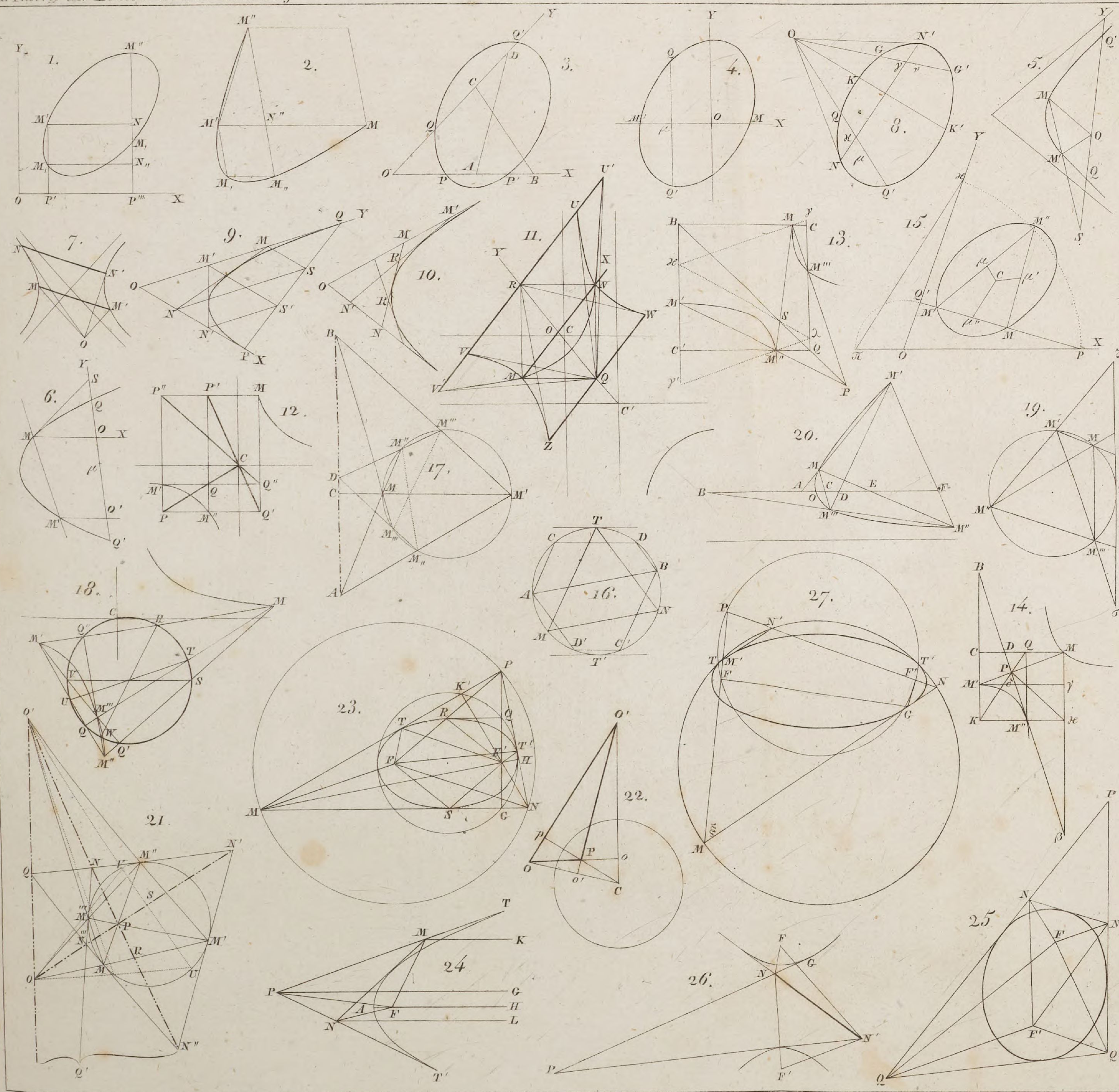


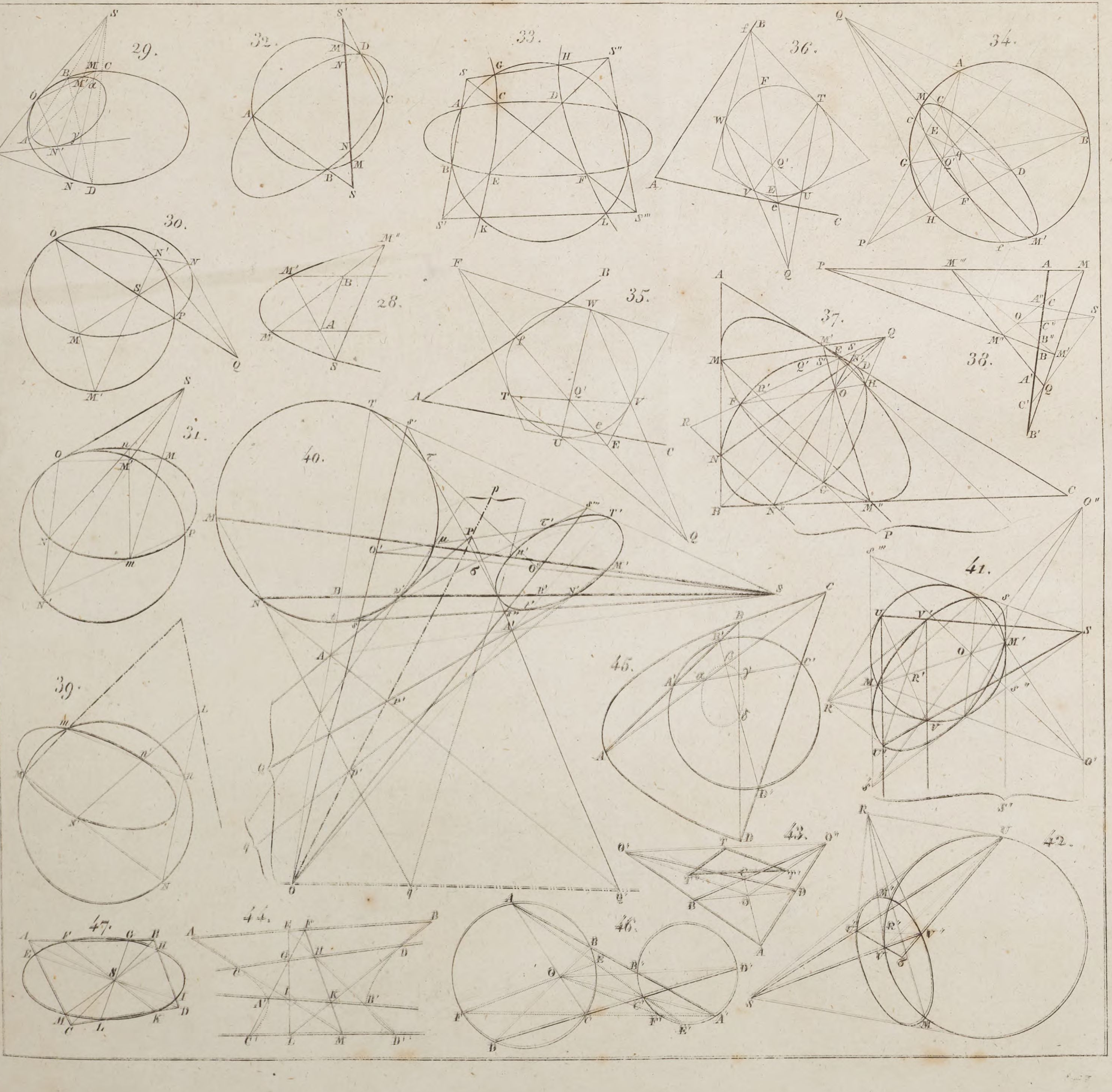
Fr. Ed. Müller sc. Leipzig


25.
23.
26.
24.
29.
28.
27.
30.


45.
46.
47.
48.
50.
51.
52.
49.
53.
54.
55.
56.
57.
58.
59.
60.


61.
62.
63.
64.
65.
69.
70.
67.
71.
68.
66.




29.
32.
33.
36.
34.
30.
28.
35.
37.
38.
31.
40.
41.
39.
45.
43.
42.
47.
44.
46.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Plücker, Julius,

Analytisch-geometrische Entwicklungen

Bd.: 1

Essen (1828)

4 Math.p. 274 l-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053748-8